2. Základné lineárne obvody s pasívnymi súčiastkami

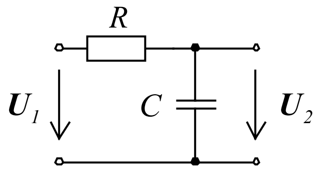
Cieľ kapitoly: Zdôvodniť a na základe jednoduchých elektronických obvodov ukázať vhodnosť používania logaritmických asymptotických charakteristík pri analýze a syntéze takýchto obvodov pre široký rozsah ich parametrov. Na základe analýzy frekvenčnej charakteristiky dolnopriepustného filtra druhého rádu definovať okrem asymptot aj parametre používané v analogických systémoch druhého rádu v rôznych odvetviach elektrotechniky.

2.1 Asymptotické frekvenčné charakteristiky prenosových článkov

Aké sú hlavné dôvody pre použitie logaritmického zobrazenia frekvencie a amplitúdy signálov v elektronike?
Zariadenia v silnoprúdovej elektrotechnike a elektroenergetike pracujú s frekvenciou napätia 50, 60 Hz. Niektoré mobilné elektrocentrály majú frekvenciu napätia 400 Hz. Tak isto hodnoty napätia, prúdu a výkonu pre konkrétne silnoprúdové zariadenie sa nemenia vo veľkom rozsahu - stačí preto lineárne zobrazenie uvedených veličín na grafoch, alebo meracích prístrojoch.
Úplne odlišná situácia je v elektronike, kde sa takmer všetky parametre použitých prvkov, napätí a prúdov menia v rozsahu 6 a niekedy aj viac dekád. Dynamický rozsah niektorých veličín v elektronike (frekvencia, napätie, prúd, odpor, časový interval atď.) je obrovský a preto je nevyhnutné používať z dôvodu prehľadnosti logaritmické zobrazenia veľkosti sledovanej veličiny na jednej, alebo dvoch osiach.

2.2 Dolnopriepustný RC článok - asymptotická frekvenčná charakteristika

Uvažujeme jednoduchý dolnopriepustný (DP) RC filter podľa nasledujúceho obrázku:



Obr. 2.1 Pasívny DP RC filter ako prenosový článok.

Prenosová funkcia napätia uvedeného článku sa dá ľahko odvodiť do tvaru:

$\dfrac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1} = \boldsymbol{T}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega RC}$, ak použijeme označenie $RC = \dfrac{1}{\omega_h}$, môžeme napísať pre

prenos napätia ako funkciu relatívneho (normovaného) kmitočtu $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_n}$.

Bezrozmerná veličina Ω je tzv normovaná kruhová frekvencia.

Potom sa dá prenosová funkcia napätia napísať v exponenciálnom tvare pomocou modulovej a argumentovej (fázovej) frekvenčnej charakteristiky.

$$\boldsymbol{T}(j\Omega)=\frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1}=\frac{1}{1+j\Omega}=\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}e^{-jarctg\Omega} \qquad (2.1)$$

Tento komplexný prenos napätia obsahuje dve frekvenčné charakteristiky, ktoré môžeme sledovať buď samostatne, alebo v celku. Závisí to od konkrétneho použitia RC článku. Modul komplexnej prenosovej funkcie predstavuje **modulovú frekvenčnú charakteristiku.**

Modulová frekv. charakteristika: $$|\boldsymbol{T}(\Omega)|=\left|\frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \qquad (2.2)$$

Fázová frekv. charakteristika: $$arg\,\boldsymbol{T}(j\Omega)=\varphi(\Omega)=-arctg(\Omega) \qquad (2.3)$$

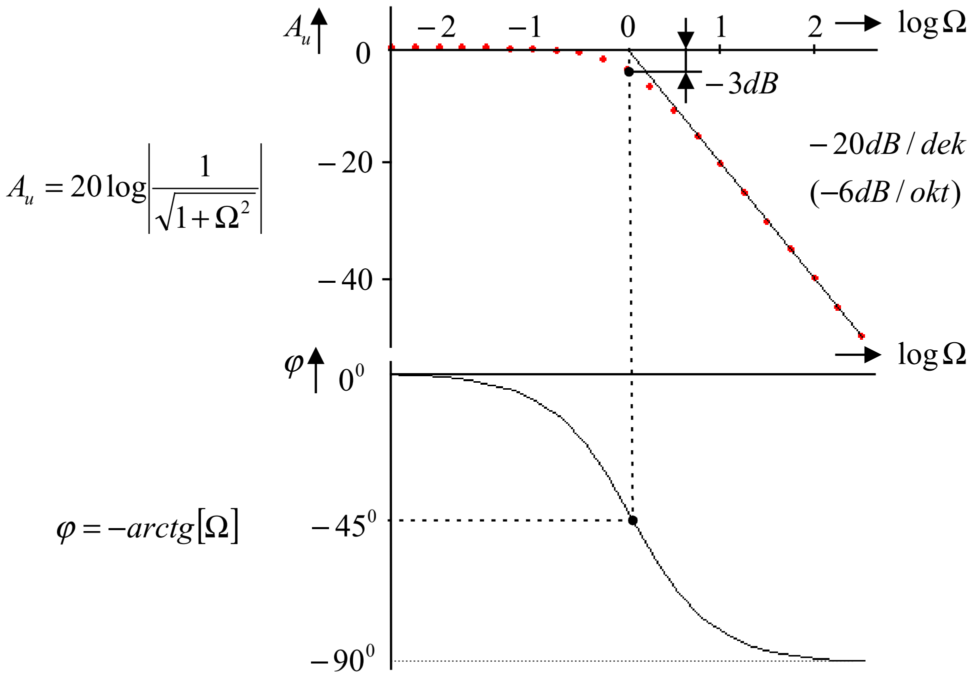
Logaritmovaním modulovej charakteristiky dostaneme prenos napätia v **decibeloch, (dB).**

$$20\log\frac{U_2}{U_1}=20\log\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \quad \text{[dB]} \qquad (2.4)$$

Tento vzťah (funkcia premennej Ω) má 2 **asymptoty** (charakteristické dotyčnice).

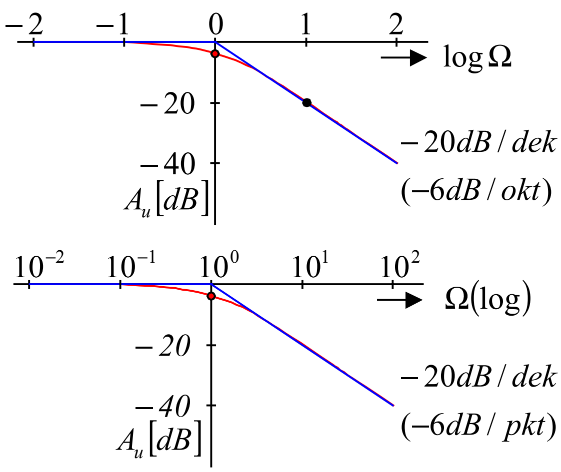
1. asymptota je pre $\Omega \ll 1 \rightarrow 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}=0$
2. asymptota je pre $\Omega \gg 1 \rightarrow 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}=20\log\frac{1}{\Omega}=-20\log\Omega$

Grafickým zobrazením získame asymptotické charakteristiky modulu relatívnej prenosovej funkcie napätia DP filtra RC ako funkcie logaritmu normovanej kruhovej frekvencie $\log\Omega$ na osi x. Na nasledujúcom obrázku sú obidve frekvenčné charakteristiky (modulová aj fázová) znázornené, vrátane asymptot modulovej frekvenčnej charakteristiky.



Obr. 2.2 Grafy skutočných a asymptotických frekv. charakteristík DP RC článku v logaritmických súradniciach.

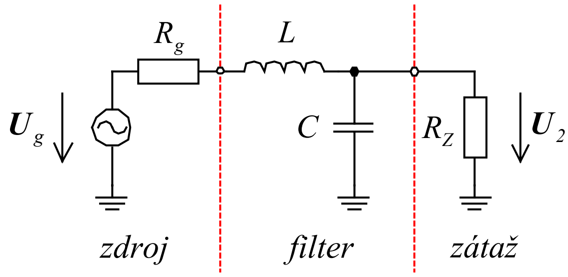
V praxi sa pri analýze a syntéze lineárných prenosových článkov pracuje obvykle s asymptotami modulovej frekvenčnej charakteristiky. Nakoľko sú to priamky, ľahko sa s nimi pracuje a umožňujú získať rýchle prehľad aj o frekvenčnej charakteristike aj zložitejšieho obvodu s kaskádou rôznych prenosových článkov. Fázovú charakteristiku vieme odhadnúť tiež pomocou tvaru asymptot modulovej charakteristiky.
Na nasledujúcom obrázku sú znázornené dva spôsoby označenia hodnôt frekvencie na osi x. Pri prvom spôsobe v hornej časti obrázku vynášame priamo logaritmus pomernej frekvencie, tak ako to vyplýva priamo zo zápisu frekvenčnej charakteristiky. V odborných publikáciach a časopisoch sa však vžil druhý spôsob označenia frekvenčnej osi, znázornený v spodnej časti obrázku. Jeho výhodou je to, že na osi frekvencie sa vynáša priamo frekvencia v logaritmickej mierke. Je teda okamžitý prehľad o absolútnej hodnote frekvencie.



Obr. 2.3 Označovanie frekvenčnej osi pre asymptotické frekvenčné charakteristiky prenosového DP článku.

2.3 Dolnopriepustný LC článok 2. rádu

Zapojenie na obr. 2.4 predstavuje dolnopriepustný filter s reaktančnými ideálnymi prvkami L, C, ktorý je zapojený medzi zdroj signálu a jeho prijímač (záťaž R_z, alebo spotrebič v prípade signálu s väčším napätím). Samotný LC filter nespotrebováva žiadny činný výkon. Parametre filtra, jeho frekvenčnú charakteristiku, však zásadne ovplyvňuje vnútorný odpor generátora R_g a odpor záťaže R_z. Analýzou obvodu ukážeme, že jeho prenosová funkcia je druhého rádu a po jej zovšeobecnení ju možno výhodne použiť aj na opis rôznych iných obvodov a subsystémov ako napr. operačného zosilňovača, fázového závesu a podobne. Výsledky analýzy sa teda dajú dosť široko zovšeobecniť.



Obr. 2.4 Dolnopriepustný LC filter vrátane zdroja signálu a jeho spotrebiča

Pre generátor s harmonickým napätím U_g môžeme vypočítať prenosovú funkciu fázorovou metódou ustáleneho stavu v obvode. Keďže všetky prúdy a napätia v obvode sú harmonické môžeme napísať nasledovné základné vzťahy:
Pre výstupné napätie na záťaži platí: (pre skrátenie zápisu použijeme p=jω)

$$\boldsymbol{U}_z = \boldsymbol{U}_g \frac{\boldsymbol{Z}_z}{\boldsymbol{Z}_z + \boldsymbol{Z}_g} \qquad \text{kde} \qquad \boldsymbol{Z}_g = R_g + pL \qquad \boldsymbol{Z}_z = \frac{R_z}{1 + pCR_z}$$

Analogicky, ako v prípade RC článku definujeme prenosovú funkciu napätia.

$$\boldsymbol{A}(p) = \frac{\boldsymbol{U}_z}{\boldsymbol{U}_g} = \frac{\boldsymbol{Z}_z}{\boldsymbol{Z}_z + \boldsymbol{Z}_g} = \frac{\dfrac{R_z}{1 + pCR_z}}{\dfrac{R_z}{1 + pCR_z} + R_g + pL} = \frac{R_z}{R_z + R_g + pCR_zR_g + pL + p^2LCR_z}$$

Pre napätie s nulovou frekvenciou (p=0 - jednosmerné napätie) je prenos rovný:

$$\boldsymbol{A}(p = 0) = \frac{R_z}{R_z + R_g} = A_0$$

Túto hodnotu využijeme ako vzťažnú hodnotu pre relatívnu prenosovú funkciu.

$$\boldsymbol{A}_r(p) = \frac{A(p)}{A_0} = \frac{1}{1 + p\dfrac{CR_zR_g + L}{R_z + R_g} + p^2\dfrac{LCR_z}{R_z + R_g}}$$

Ak zavedieme známu substitúciu (Thomsonov vzťah), $\dfrac{1}{LC} = \omega_r^2$, potom môžeme posledný vzťah upraviť na tvar :

$$A_r(p)=\frac{\omega_r^2 / A_0}{p^2+p(\underbrace{\frac{R_g}{L}}_{\frac{1}{\tau_L}}+\underbrace{\frac{1}{R_z C}}_{\frac{1}{\tau_c}})+\frac{\omega_r^2}{A_0}}=\frac{\frac{\omega_r^2}{A_0}}{p^2+p(\frac{1}{\tau_L}+\frac{1}{\tau_c})+\frac{\omega_r^2}{A_0}} \qquad (2.5)$$

Menovateľa výrazu (2.5) upravíme na takzvaný štandardný tvar polynómu 2. rádu

$$p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2 .$$

Tento polynóm má dva parametre ξ, ω_n , ktoré majú jasný fyzikálny význam. Parameter ω_n predstavuje frekvenciu vlastných kmitov obvodu a parameter ξ charakterizuje ich tlmenie – čím je menší, tým je obvod menej tlmený. Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách komplexného kmitočtu "p" dostaneme prevodové vzťahy :

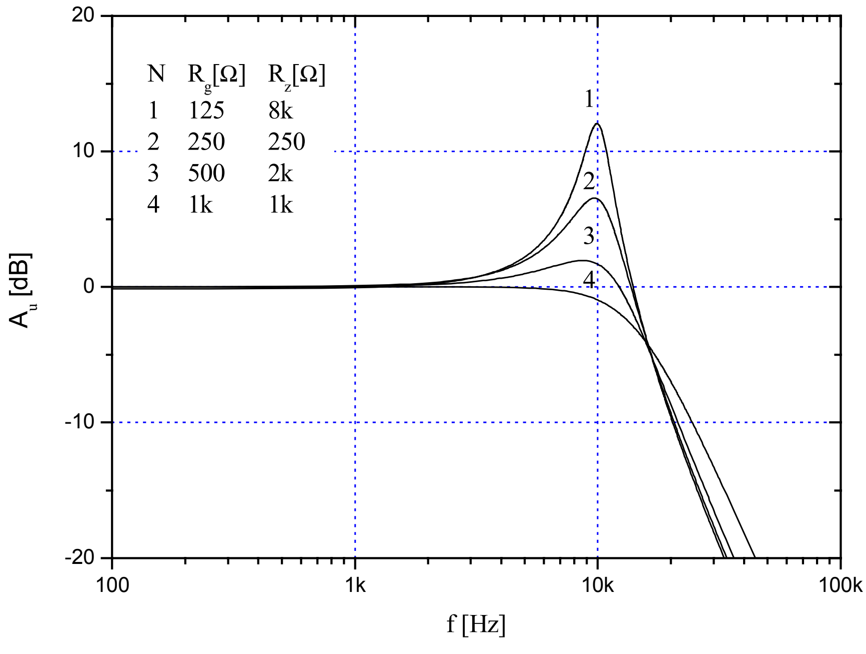
$$\omega_n=\frac{\omega_r}{\sqrt{A_0}}; \qquad (2.6)$$

$$2\xi\omega_n=\frac{1}{\tau_L}+\frac{1}{\tau_c}\Rightarrow\xi=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{A_0}}{\omega_r}\frac{\tau_L+\tau_c}{\tau_L\tau_c} \qquad (2.7)$$

Prenosová relatívna charakteristika potom získa tvar:

$$A_r(p)=\frac{\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2} \qquad (2.8)$$

Modul relatívnej frekvenčnej charakteristiky (2.8) má pre rôzne hodnoty "činiteľa tlmenia" ξ tvar podľa obr. 2.5. Bol vypočítaný pomocou programu SPICE. Veľkosť ξ môžeme pre konkrétne hodnoty L, C, R_g, R_z vypočítať pomocou vzťahu (2.7) a predchádzajúcich vzťahov. Hodnota A_u na osi y je v dB. *(L=15,916mH, C=15,916nF)*



Obr. 2.5 Normované modulové frekvenčné charakteristiky LC DP filtra

Príklad: Uvažujme v elektronike častý prípad keď platí $R_g = R_z = R$ a $\tau_L = \tau_c = \tau$.

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad A_0 = \frac{R_z}{R_z + R_g} = \frac{1}{2}; \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{A_0}} = \frac{\omega_r}{0{,}707}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{A_0}}{\omega_r}\frac{\tau_L + \tau_C}{\tau_L \tau_C} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{0{,}5}}{\omega_r}\frac{2}{\tau} = \sqrt{0{,}5}\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{R} = 0{,}707$$

Číselne hodnoty: $L = 15{,}916\ mH,\ C = 15{,}916\ nF,\ R_g = R_z = R = 1\ k\Omega$ (krivka č. 4 na obr.2.5) $f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{15{,}916.10^{-3}.15{,}916.10^{-9}}} = 10^4\ Hz \quad \rightarrow \quad f_n = 1{,}141\ .\ 10^4\ Hz$

Prenos $A_r(j\omega)$ má pri frekvencii $p = j\omega_n$ číselnú hodnotu:

$$\boldsymbol{A}_r(j\omega_n) = \frac{\omega_n^2}{-\omega_n^2 + 2\xi\omega_n j\omega_n + \omega_n^2} = \frac{1}{j2\xi} \Rightarrow \left|\boldsymbol{A}_r(j\omega_n)\right| = \frac{1}{2\xi} = 0{,}707$$

Urobme ešte normovanie komplexnej frekvencie $P = \dfrac{p}{\omega_n}$

$$\boldsymbol{A}_r(P) = \frac{1}{P^2 + 2\xi\dfrac{p}{\omega_n} + 1} = \frac{1}{P^2 + 2\xi P + 1}$$

V našom špeciálnom prípade $(\xi = 0{,}707) \Rightarrow A_r = \dfrac{1}{P^2 + \sqrt{2}P + 1} \Rightarrow$ dostali sme relatívnu prenosovú funkciu tzv. Butterwortovho filtra 2.rádu.

2.4 Asymptotická aproximácia všeobecnej frekvenčnej charakteristiky

$\boldsymbol{T}(p) = \dfrac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_0}{d_n p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \ldots + d_0}$ pričom b_i, d_i – sú reálne koeficienty, a v reálnych sústavách platí $n \geq m$

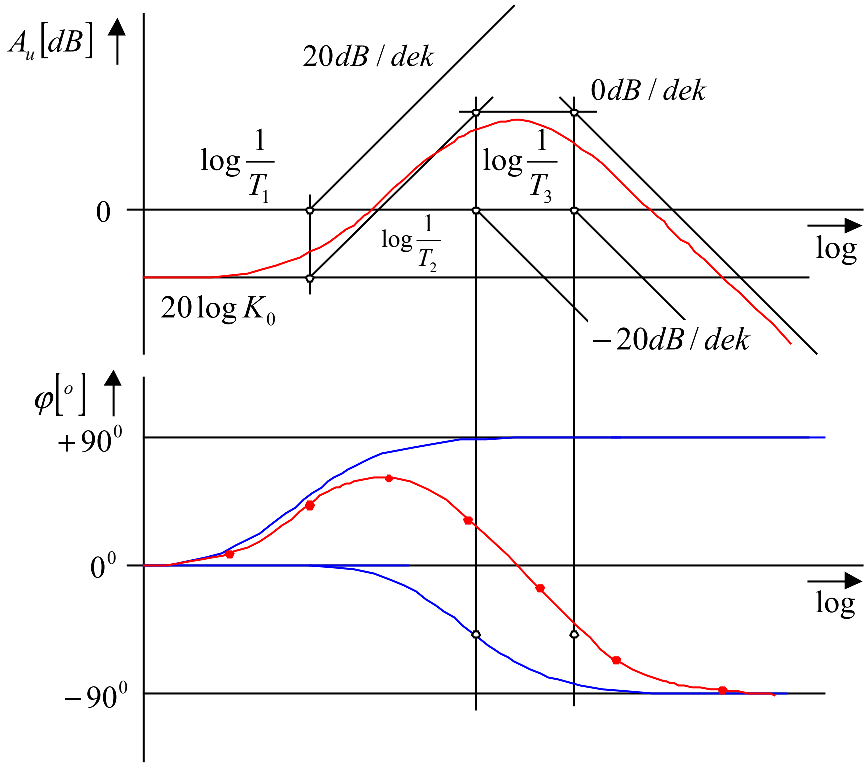
Ak vypočítame korene menovateľa (póly) a korene čitateľa (nuly), potom môžeme $\boldsymbol{T}(p)$ napísať v tvare :

$\boldsymbol{T(p)} = K\dfrac{(p - z_1)(p - z_2)\ldots\ldots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\ldots\ldots(p - p_n)}$ $\quad z_1, \ldots z_m$ – nuly $\ p_1, \ldots p_n$ – póly

$$\underbrace{20\log\left|T(p)\right|}_{dB} = 20\log K + \sum_m 20\log\left|p - z_i\right| - \sum_n 20\log\left|p - p_i\right|$$

Jednotlivé koreňové súčinitele ($p-z_i$), ($p-p_i$) majú svoje asymptoty s kladnou smernicou (pre nuly) resp. zápornou smernicou (pre póly).

Uvažujme pre účely príkladu, že nuly aj póly sú reálne a sú záporné (podmienka pre stabilnú minimálnofázovú sústavu)



Obr. 2.6 Príklad asymptotických a skutočných frekvenčných charakteristík prenosovej funkcie