Prostriedky popisu lineárnych systémov

- popis spojitých systémov (LAKI) v časovej oblasti
  - diferenciálna rovnica
  - impulzová charakteristika
  - konvolúcia
- popis diskrétnych systémov (LDKI) v časovej oblasti
  - diferenčná rovnica
  - impulzová charakteristika
- popis spojitého systému v „p – rovine“ – LT
- popis diskrétneho systému v „z – rovine“
  - prenosová funkcia
    - frekvenčné charakteristiky
    - vzťah medzi „p“ a „z“ rovinou

Analógové a digitálne spracovanie signálov 2

Laplaceova transformácia a z-transformácia

Prehľad

- Definícia a koncept transformácií
- Laplaceova transformácia (LAKI)
- z – transformácia (LDKI)
- Prenosová funkcia sústavy

Čo sú to transformácie?

- Pojem ***transformácia*** vyjadruje matematickú operáciu, ktorá mení danú funkciu –ORIGINÁL na novú funkciu – OBRAZ
- Laplaceova tranformácia
- Fourierova tranformácia
- z – transformácia
- Diskrétna Fourierova tranformácia

Prečo používame transformácie?

- Transformácie umožňujú zmenu komplikovaných problémov na jednoduchšie:
  1. Zjednodušený problém vyriešime v obrazovej rovine
  2. Použijeme inverznú transformáciu na získanie riešenia v rovine originálu
- Príklad:
  1. Laplaceova transformácia na riešenie **diferenciálnych rovníc**
  2. z – transformácia na riešenie **diferenčných rovníc**

Koncept transformácií

- Transformácie sú založené na vhodnom mapovaní
  1. funkcií reprezentujúcich signály alebo sekvencie na nové (komplexné) funkcie, ktoré nazývame ***obrazy***
  2. sústavy **diferenciálnych** alebo **diferenčných** rovníc popisujúcich systém na **algebraické** rovnice novej (komplexnej) premennej
- Skúmame signály a systémy tak, že skúmame ich obrazy alebo komplexné rovnice novej (komplexnej) premennej

Dôležité vlastnosti

- Jednoznačnosť $\mathcal{T}(x_1) = \mathcal{T}(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- Homogénnosť $\mathcal{T}(Kx) = K\mathcal{T}(x),\ \mathcal{T}^{-1}(KX) = K\mathcal{T}^{-1}(X)$
- Additívnosť

$$\mathcal{T}(x_1 + x_2) = \mathcal{T}(x_1) + \mathcal{T}(x_2),\ \mathcal{T}^{-1}(X_1 + X_2) = \mathcal{T}^{-1}(X_1) + \mathcal{T}^{-1}(X_2)$$

- Diferenciácia a diferencia, operácia diferencovania sa mení na algebraickú operáciu násobenia

$\mathcal{T}(x) = X$ a $\mathcal{T}^{-1}(X) = x$, K – konštanta

Integrálne transformácie

- snaha o matematické vyjadrenie technických signálov

Predpokladáme:

technické signály vieme vyjadriť ako vlastné kmity sústav

Ortogonálne funkcie (zaviedol Fourier):

$$\int \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t)\, dt = \begin{matrix} 0 & \text{pre } i \neq j \\ k & \text{pre } i = j \end{matrix}$$

Laplaceova transformácia – integrálna transformácia

nástroj na riešenie spojitých LTI systémov a elektrických obvodov

Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia

- analytický nástroj pri popise, analýze a štúdiu **LTI systémov** a elektrických obvodov
- má význam pri analýze **kauzálnych** systémov popísaných lineárnymi **diferenciálnymi** rovnicami s konštantnými koeficientami

Definícia

$$\int \varphi_i(t)\cdot\varphi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{pre } i \neq j \\ k & \text{pre } i = j \end{cases}$$

Máme funkciu $x(t)$ a chceme ju vyjadriť ako množinu ortogonálnych funkcií:

$$X(p) = L\big(x(t)\big) = \int_0^{\infty} x(t)\cdot e^{-pt}\,dt$$

Laplaceova transformácia $X(p)$ **kauzálneho** signálu $x(t)$

Opačne: z $X(p)$ vieme získať časovú funkciu:

$$x(t) = L^{-1}\big(X(p)\big) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p)\cdot e^{pt}\,dp$$

Inverzná Laplaceova transformácia

Funkcie $\mathbf{x(t)}$ a $\mathbf{X(p)}$ tvoria ***Laplace transform pair*** : $\mathbf{x(t)} \leftrightarrow \mathbf{X(p)}$. Premenná $\mathbf{p}$ sa nazýva ***komplexná premenná***.

Laplaceova transformácia – komplexná premenná p (s)

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{-at}\, u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

$$t^n\, u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\sin(\omega t)\, u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t)\, u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\, u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\, u(t) \leftrightarrow \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

Vlastnosti

Jednoznačnosť

$$x_1(t) = x_2(t) \Leftrightarrow X_1(s) = X_2(s)$$

Homogénnosť

$$\mathcal{L}(Kx(t)) = K\mathcal{L}(x(t))$$
$$\mathcal{L}^{-1}(KX(s)) = K\mathcal{L}^{-1}(X(s))$$

Additívnosť

$$\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = \mathcal{L}(x_1(t)) + \mathcal{L}(x_2(t))$$
$$\mathcal{L}^{-1}(X_1(s) + X_2(s)) = \mathcal{L}^{-1}(X_1(s)) + \mathcal{L}^{-1}(X_2(s))$$

Diferencovateľnosť

$$\mathcal{L}(\mathrm{D}x(t)) = s\mathcal{L}(x(t)) - x(0^-) = sX(s) - x(0^-)$$

$$\mathrm{D}x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

Konvolúcia

$$\mathcal{L}\int_0^\infty x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = X(s)H(s)$$

Prenosová funkcia spojitého systému

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\sum_{m=0}^{M} b_m D^m y(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n D^n x(t)$$

Ustálený LTI systém popísaný diferenciálnou rovnicou s konštantnými koeficientami

$$X(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow Y(p)$$

$$\left(\sum_{m=0}^{M} b_m p^m\right) \cdot Y(p) = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n p^n\right) \cdot X(p)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Prenosová funkcia

$$H(p) = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot p^n}{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot p^m}$$

z – transformácia

nástroj na riešenie diskrétnych LTI systémov

z – transformácia

- *z* – ***transformácia***
- analytický nástroj pri popise, analýze a štúdiu **LDKI systémov**
- má význam pri analýze **kauzálnych** systémov popísaných lineárnymi **diferenčnými** rovnicami

Definícia

$$X(z) = Z\{x_{(n)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{(n)} z^{-n}$$

z – transformácia $X(z)$
kauzálnej sekvencie $\{x_{(n)}\}$

$$x_{(n)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z$$

Inverzná
***z* – transformácia**

Γ je oblasť integrácie

Postupnosť (sekvencia) $\{x_{(n)}\}$ a funkcia $X(z)$ tvoria dvojicu ***z transformácie*** : $\{x(n)\} \leftrightarrow X(z)$.

z – ***komplexná premenná***

z – transformácia

$$
\begin{array}{lcl}
\delta_{(n)} & \leftrightarrow & 1 \\
u_{(n)} & \leftrightarrow & \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{1}{1-z^{-1}} \\
a^n u_{(n)} & \leftrightarrow & \dfrac{z}{z-a} = \dfrac{1}{1-az^{-1}} \\
n\, u_{(n)} & \leftrightarrow & \dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\
\sin(\theta n)\, u_{(n)} & \leftrightarrow & \dfrac{z \sin(\theta)}{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1} \\
\cos(\theta n)\, u_{(n)} & \leftrightarrow & \dfrac{z(z-\cos(\theta))}{z^2 - 2z\cos(\theta) + 1} \\
\mathrm{e}^{-\alpha n} \sin(\theta n)\, u_{(n)} & \leftrightarrow & \dfrac{z\,\mathrm{e}^{-\alpha} \sin(\theta)}{z^2 - 2z\,\mathrm{e}^{-\alpha}\cos(\theta) + \mathrm{e}^{-2\alpha}} \\
\mathrm{e}^{-\alpha n} \cos(\theta n)\, u_{(n)} & \leftrightarrow & \dfrac{z(z-\mathrm{e}^{-\alpha}\cos(\theta))}{z^2 - 2z\,\mathrm{e}^{-\alpha}\cos(\theta) + \mathrm{e}^{-2\alpha}}
\end{array}
$$

Vlastnosti

Jadnoznačnosť

$$\{x_{(n)}\} = \{y_{(n)}\} \Leftrightarrow X(z) = Y(z)$$

Homogénnosť

$$Z(K\{x_{(n)}\}) = KX(z)$$
$$Z^{-1}(KX(z)) = K\{x_{(n)}\}$$

Aditívnosť

$$Z(\{x_{(n)}\} + \{y_{(n)}\}) = X(z) + Y(z)$$
$$Z^{-1}(X(z) + Y(z)) = \{x_{(n)}\} + \{y_{(n)}\}$$

Posunutie

$$Z\{x_{(n-\mu)}\} = z^{-\mu}X(z)$$
$$Z^{-1}z^{-\mu}X(z) = \{x_{(n-\mu)}\}$$

Konvolúcia

$$Z\{x_{(n)}\} * \{h_{(n)}\} = Z\{h_{(n)}\} * \{x_{(n)}\} = X(z)H(z)$$
$$Z^{-1}(X(z)H(z)) = \{x_{(n)}\} * \{h_{(n)}\} = \{h_{(n)}\} * \{x_{(n)}\}$$

Konvolúcia

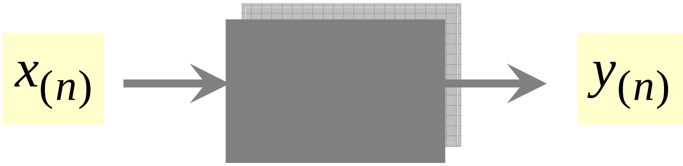
Konvolúcia dvoch kauzálnych sekvencií je definovaná:

interaktivne: http://www.jhu.edu/~signals/lecture1/frames.html

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

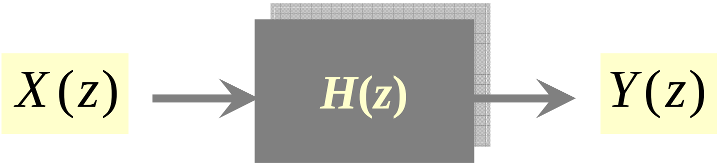
$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Prenosová funkcia diskrétneho systému



$$\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^{L} a_k \cdot x(n-k)$$

Ustálený LTI systém opísaný lineárnou diferenčnou rovnicou s konšt. koef.



$$\left(\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}\right) \cdot Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{L} a_k \cdot z^{-k}\right) \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Prenosová funkcia

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{L} a_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M} b_k \cdot z^{-k}}$$