SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra telekomunikácií

VÝPOČTY NA HOMOGÉNNYCH VEDENIACH

TLKV
ZS 2009/2010

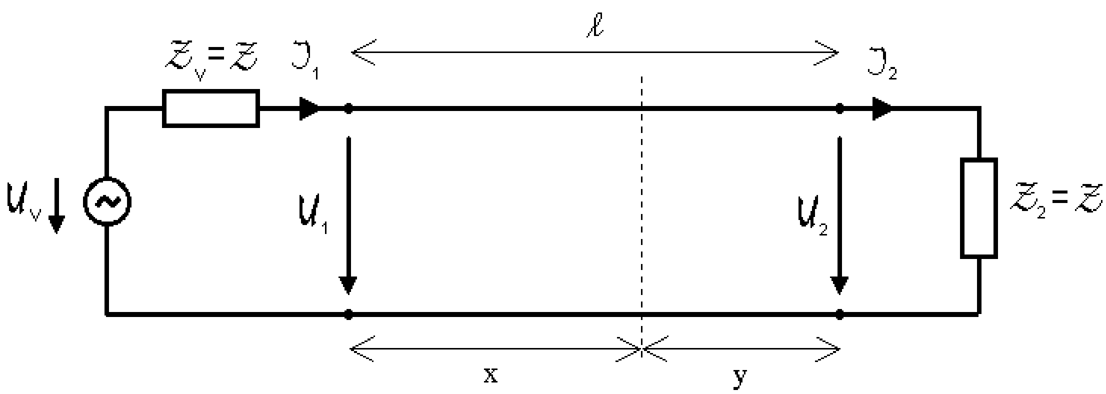
Patrik Hollý
8. krúžok
Mer. skupina 7

Úlohy: 1. Vypočítajte vlnovú impedanciu $\mathcal{Z} = Z \cdot e^{j\varphi z}$, špecifickú konštantu tlmenia α, špecifickú konštantu fázového posunu β a fázovú rýchlosť v_f pre zadané hodnoty homogénneho vedenia. Ďiaľkový kábel Dkϕ *0,9CuXV*

2. Vypočítané hodnoty závislostí: $Z = f(\omega)$, $\varphi_z = f(\omega)$, $Re\{\mathcal{Z}\} = f(\omega)$, $Im\{\mathcal{Z}\} = f(\omega)$, $\alpha = f(\omega)$, $\beta = f(\omega)$, $v_f = f(\omega)$ spracovať graficky.

3. Pre vypočítané hodnoty $\mathcal{Z}$ *a* δ z prvej úlohy:

a) Zistite vektor napätia $\mathcal{U}(x)$ a okamžité hodnoty u(x) pre f = 45kHz, t = 0,8s a vzdialenosť x = 0; 0,5; 1 … 6km ak je modul napätia U_v = 10V a počiatočná fáza $\varphi_v = 50°$.



Dané vedenie je prispôsobené tak, že je na ňom iba postupujúca vlna.

b) pre hodnoty napätia vektora $\mathcal{U}(x)$ zostrojte hodograf a k nemu prislúchajúci priebeh okamžitých hodnôt napätia u(x).

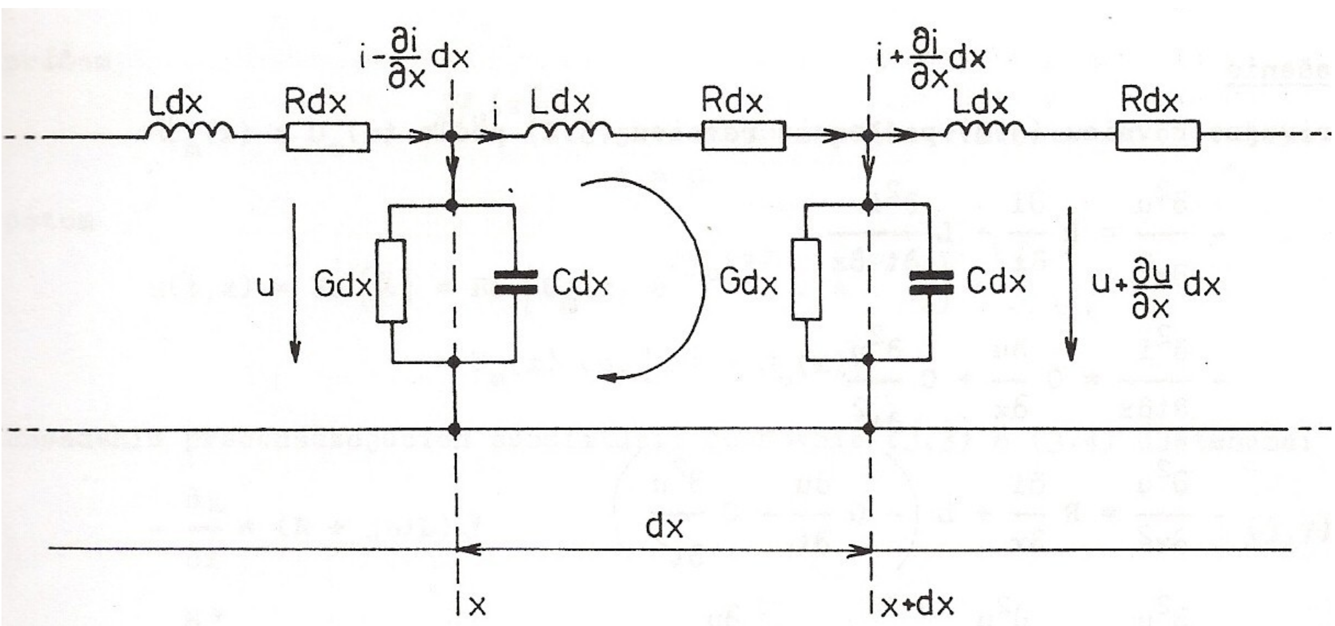
4. Vypočítajte impedanciu nakrátko $\mathcal{Z}_k$ a impedanciu naprázdno $\mathcal{Z}_0$ pre dĺžku y = 5km a zostrojte grafy závislostí: $Z_k = f(\omega)$, $\varphi_k = f(\omega)$, $Z_0 = f(\omega)$, $\varphi_0 = f(\omega)$, $Z_{VL} = f(\omega)$, $\varphi_{VL} = f(\omega)$.

Teoretický úvod

Homogénnym vedením nazývame také vedenie, ktoré má v každom svojom ľubovolne krátkom elemente rovnaké vlastnosti, ako na celej svojej dĺžke. Vyjadrujeme ich pomocou tzv. *primárnych konštánt:*

R – odpor vedenia na jednotku dĺžky
G – izolačná vodivosť na jednotku dĺžky
L – indukčnosť vedenia na jednotku dĺžky
C – kapacita vedenia na jednotku dĺžky

pričom jednotku dĺžky treba voliť vždy tak, aby v porovnaní s najkratšou vlnovou dĺžkou, ktorá sa pri použití vedenia v praxi ešte vyskytuje, bola zanedbateľne malá.
Celé vedenie možno rozdeliť na elementárne úseky dĺžky dx. Náhradná schéma homogénneho vedenia v nesymetrickom tvare dĺžky dx potom bude :



Označíme si v mieste x + dx napätie $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ a prúd $i+\frac{\partial i}{\partial x}dx$. Treba si uvedomiť, že napätie **u** a prúd **i** sú funkciou vzdialenosti **x** od začiatku vedenia a času **t**.

$$u=f(x,t)$$
$$i=f(x,t)$$

Preto je potrebné skúmať závislosť napätia a prúdu od vzdialenosti **x** od začiatku vedenia v danom časovom okamihu **t**. Vychádzajúc z aplikácie I. a II. Kirchhoffovho zákona možno pre vyššie uvedenú schému homogénneho vedenia napísať sústavu rovníc :

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u+R.i.dx+L.\frac{\partial i}{\partial t}dx=0$$
$$i-\frac{\partial i}{\partial x}dx-i-G.u.dx-C.\frac{\partial u}{\partial t}dx=0$$

Úpravou týchto rovníc dostaneme parciálne diferenciálne rovnice:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=R.i+L.\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (1)$$
$$-\frac{\partial i}{\partial x}=G.u+C.\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2)$$

ktorých riešením dostaneme rovnice označované ako *telegrafné rovnice*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=L.C.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(L.G+R.C).\frac{\partial u}{\partial t}+R.G.u$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=L.C.\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(L.G+R.C).\frac{\partial i}{\partial t}+R.G.i$$

Pri riešení rovníc (1) a (2) budeme predpokladať vedenie pri harmonickom napájaní a ustálenom stave. S výhodou použijeme pravidlá symbolického komplexného počtu a zavedeného označenia:

$$u\equiv u(t,x) \;\rightarrow\; \mathcal{U}_m(x).e^{j.\omega.t}=\mathcal{U}$$
$$i\equiv i(t,x) \;\rightarrow\; I_m(x).e^{j.\omega.t}=I$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial x}\rightarrow\frac{\partial I}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\rightarrow j.\omega.\mathcal{U} \qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial t}\rightarrow j.\omega.I$$

Dosadením predchádzajúcich substitúcií do rovníc (1) a (2) dostávame:

$$-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}=(R+j.\omega.L).I$$
$$-\frac{\partial I}{\partial x}=(G+j.\omega.C).\mathcal{U}$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}=(R+j.\omega.L).(G+j.\omega.C).\mathcal{U}$$

Výraz $(R+j.\omega.L).(G+j.\omega.C)=\gamma^2$, kde γ je špecifická komplexná miera prenosu,

$$\gamma=\alpha+j.\beta$$

ktorej reálna časť α vyjadruje špecifickú vlnovú mieru tlmenia a jej imaginárna imaginárna časť β vyjadruje špecifickú vlnovú mieru fázového posunu.

Po zvolení zvolení miery prenosu γ rovnice pre napätie a prúd dostaneme v tvare:

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d^2} - \gamma^2.\mathcal{U} = 0$$
$$\frac{d^2 I}{d^2} - \gamma^2.I = 0$$

Toto sú lineárne diferenciálne rovnice rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami. Ich riešením sú rovnice homogénneho vedenia v komplexnom tvare pre určnie napätia a prúdu v ľubovoľnom mieste vedenia x a v ľubovoľnom časovom okamihu t.

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2}.(\mathcal{U}_1+\mathcal{Z}.I_1).e^{-\gamma.x}+\frac{1}{2}.(\mathcal{U}_1-\mathcal{Z}.I_1).e^{\gamma.x} \qquad (3)$$
$$I=\frac{1}{2}.\left(\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{Z}}+I_1\right).e^{-\gamma.x}-\frac{1}{2}.\left(\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{Z}}-I_1\right).e^{\gamma.x} \qquad (4)$$

- rovnice (3) a (4) v hyperbolickom tvare:

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_1.\cosh(\gamma.x)-\mathcal{Z}.I_1.\sinh(\gamma.x)$$
$$I=I_1.\cosh(\gamma.x)-\frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{Z}}.\sinh(\gamma.x)$$

Veličina Z sa nazýva vlnová impedancia vedenia, pre ktorú platí:

$$\mathcal{Z}=\sqrt{\frac{R+j.\omega.L}{G+j.\omega.C}}$$

- odkiaľ vieme vyrátať veľkosť modulu a argumentu vlnovej impedancie:

$$Z=\sqrt[4]{\frac{R+j.\omega.L}{G+j.\omega.C}} \qquad \varphi_z=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega.L}{R} + \operatorname{arctg}\frac{\omega.C}{R}\right)$$

- rovnice (3) a (4) môžeme tiež prepísať takto:

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_m(x).e^{j.\omega.t}=A_1.e^{-\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\varphi_1-\beta.x)}+A_2.e^{\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\varphi_2+\beta.x)}$$
$$I=I_m(x).e^{j.\omega.t}=B_1.e^{-\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\psi_1-\beta.x)}+B_2.e^{\alpha.x}.e^{j.(\omega.t+\psi_2+\beta.x)}$$

Okamžité hodnoty $u=(t,x)$ a $i=(t,x)$ dostaneme z predchádzajúcich rovníc:

$$u(t,x)=\Re\,\mathcal{U}=A_1.e^{-\alpha.x}.\cos(\omega.t+\varphi_1-\beta.x)+A_2.e^{\alpha.x}.\cos(\omega.t+\varphi_2+\beta.x)$$
$$i(t,x)=\Re\,I=B_1.e^{-\alpha.x}.\cos(\omega.t+\psi_1-\beta.x)+B_2.e^{\alpha.x}.\cos(\omega.t+\psi_2+\beta.x)$$

?????

kde

$$\alpha=\sqrt{\frac{R.G}{\cos(\varphi_1).\cos(\varphi_2)}}.\cos\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

$$\beta=\sqrt{\frac{R.G}{\cos(\varphi_1).\cos(\varphi_2)}}.\sin\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

$$\varphi_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega.L}{R}\right) \qquad \varphi_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega.C}{G}\right)$$

Veličina v_f sa nazýva fázová rýchlosť šírenia a udáva rýchlosť šírenia určitého stavu fázy po homogénnom vedení, ktoré je bezodrazovo zakončené pri napájaní jedniným harmonickým signálom a v ustálenom stave. Je definovaná ako podiel uhlovej frekvencie ω a vlnovej miery fázového posunu β .

$$v_f=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2.\pi.f}{\frac{2.\pi}{\lambda}}=\lambda.f$$

Špeciálne prípady vedení

- ideálne (bezstratové) vedenie
- vedenie s malým tlmením
- vedenie s normálnym tlmením
- nekonečne dlhé homogénne vedenie
- vedenie zakončené charakteristickou impedanciou
- homogénne vedenie zakončené naprázdno a nakrátko

<u>Homogénne vedenie zakončené naprázdno</u>

- zakončovacia impedancia $\mathcal{Z}_{20}= \rightarrow \infty$

schema str. 44

- vstupná impedancia $\mathcal{Z}_{VST}=\mathcal{Z}.\operatorname{cotgh}(\gamma.1)$

$$\mathcal{Z}_0=Z_0.e^{j.\varphi_0}=\mathcal{Z}.\operatorname{cotgh}(\gamma.1)=\mathcal{Z}.\frac{\cosh(\alpha 1).\sinh(\alpha 1)-j\ \sin(\beta 1).\cos(\beta 1)}{\sinh^2(\alpha 1).\cos^2(\beta 1)+\cosh^2(\alpha 1).\sin^2(\beta 1)}$$

$$Z_0=Z.\frac{\sqrt{\cosh^2(\alpha 1).\sinh^2(\alpha 1)+\sin^2(\beta 1).\cos^2(\beta 1)}}{\sinh^2(\alpha 1).\cos^2(\beta 1)+\cosh^2(\alpha 1).\sin^2(\beta 1)}$$

$$\varphi_0=\varphi_Z-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\beta 1).\cos(\beta 1)}{\sinh(\alpha 1).\cosh(\alpha 1)}\right)$$

$$\mathcal{U}_y=\mathcal{U}_{20}.\cosh(\gamma.y)$$
$$I_y=\frac{\mathcal{U}_{20}}{\mathcal{Z}}.\sinh(\gamma.y)$$

kde $\mathcal{U}_{20}$ je napätie na konci vedenia. Pre priebehy vektorov napätí a prúdov pri zakončení naprázdno v ľubovolnom mieste vo vzdialenosti y od konca vedenia platí:

$$\mathcal{U}_{y0}=\frac{\mathcal{U}_{20}}{2}.e^{\gamma.y}+\frac{\mathcal{U}_{20}}{2}.e^{-\gamma.y}$$
$$I_{y0}=\frac{\mathcal{U}_{20}}{2.\mathcal{Z}}.e^{\gamma.y}-\frac{\mathcal{U}_{20}}{2.\mathcal{Z}}.e^{-\gamma.y}$$

<u>Homogénne vedenie zakončené nakrátko</u>

- zakončovacia impedancia $\mathcal{Z}_{2K}=0\,\Omega$

schema str 45

- vstupná impedancia $\mathcal{Z}_{\mathcal{VST}} = \mathcal{Z} . \mathrm{tgh}(\gamma . 1)$

$$Z_0 = Z . \frac{\sqrt{\sinh^2(\alpha 1) . \cosh^2(\alpha 1) + \sin^2(\beta 1) . \cos^2(\beta 1)}}{\cosh^2(\alpha 1) . \cos^2(\beta 1) + \sinh^2(\alpha 1) . \sin^2(\beta 1)}$$

$$\varphi_0 = \varphi_Z + \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\beta 1) . \cos(\beta 1)}{\sinh(\alpha 1) . \cosh(\alpha 1)}\right)$$

$$\mathcal{U}_y = \mathcal{Z} . I_{2\mathcal{K}} . \sinh(\gamma . \mathrm{y})$$
$$I_y = I_{2\mathcal{K}} . \cosh(\gamma . \mathrm{y})$$

<u>Vyšetrenie priebehov</u> Z_0, Z_K, φ_0 a φ_K <u>v závislosti od dĺžky vedenia l</u>

- extrémy zistíme z podmienky:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dl}}(Z_0, Z_K, \varphi_0, \varphi_K) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta 1) . \cos(\beta 1) = 0$$

$$\sin(\beta 1) . \cos(\beta 1) = 0 \;\Rightarrow\; \sin(\beta 1) = 0 \;\vee\; \cos(\beta 1) = 0$$

1. Nech $\sin(\beta 1) = 0$

$\beta 1 = 0, \pi, 2\pi, \ldots \;\Rightarrow\; \beta 1 = \mathrm{n}\,\pi$ kde $\mathrm{n} = 0, 1, 2, \ldots$

vtedy

$$|\mathrm{cotgh}(\alpha 1) = 1|$$

a

$$Z_0 = Z.\mathrm{cotgh}(\alpha 1) \qquad Z_K = Z.\mathrm{tgh}(\alpha 1)$$
$$\varphi_0 = \varphi_Z \qquad \varphi_K = \varphi_Z$$

tento pripad zodpovedá dĺžke vedenia

$$1 = \frac{\mathrm{n}\,\pi}{\beta} = \frac{\mathrm{n}\,\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \mathrm{n}\frac{\lambda}{2}$$ pri týchto dĺžkach Z_K nadobúda minimum a Z_0 maximum

2. Keď $\cos(\beta 1) = 0$

$$\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \quad \Rightarrow \quad \beta l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

vtedy

$$|\mathrm{cotgh}(\alpha l) = 1|$$

$$l = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{2n+1}{4}\lambda$$

- pri týchto dĺžkach Z_K nadobúda minimum a Z_0 maximum

Tam kde Z_K nadobúda minimum, Z_0 nadobúda minimum a naopak.

Riešenie

ergerg

Záver