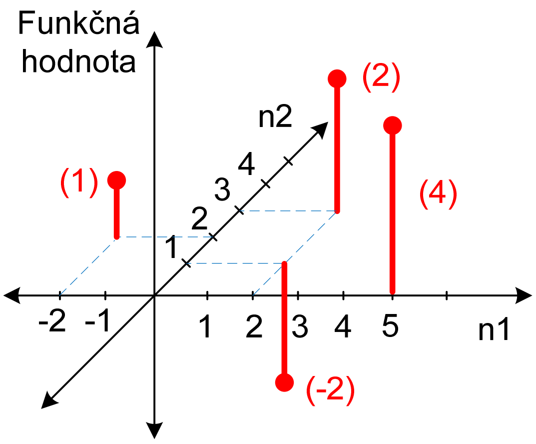
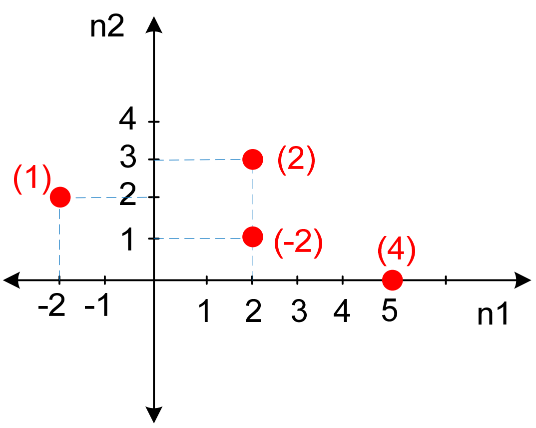
2D signály

Úvod do problematiky:

Keďže sa zaoberáme 2D signálmi, tak to znamená že ich budeme popisovať v priestore, na čo nám poslúžia 2 premenné (indexy) ktoré určujú presnú polohu. Funkčná hodnota je v 3. rozmere. (Pri klasických signáloch sme polohu (napr. časovú) mali určenú jednou premennou a funkčná hodnota bola v 2. rozmere.) Jednoduchšie je si to predstaviť na obrázku.



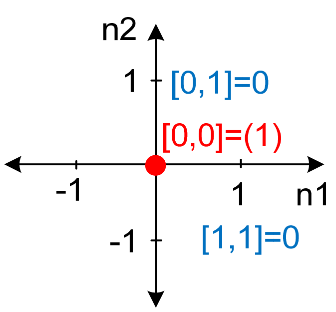
Pre bežné zakreslenie sa však používa len pohľad zhora.



Najzákladnejší signál, ktorý sa s úspechom využíva aj na zápis iných signálov je :

Kroneckerov impulz:

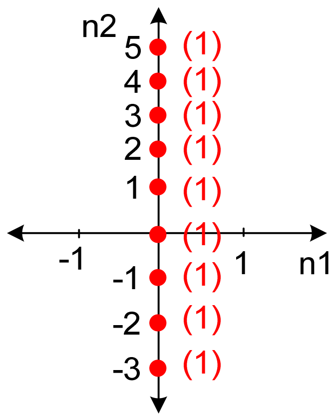
$$\delta(n_1,n_2) = \begin{cases} 1 & n_1,n_2 = 0 \\ 0 & inak \end{cases} \qquad resp. \quad \delta(0,0) = 1$$

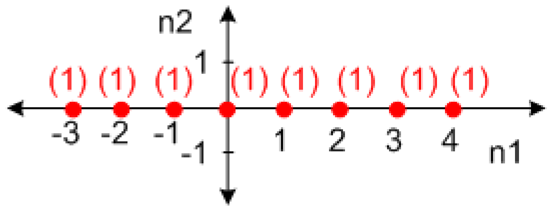


Kroneckerov impulz:

Jendoduchým zápipsom sa pomocou kroneckera dajú vyskladať riadkové a stĺpcové postupnosti, ktoré sa taktiež môžu využiť pri výstavbe iných signálov.

$\delta(0, n_2) = 1$ $\qquad\qquad$ $\delta(n_1, 0) = 1$

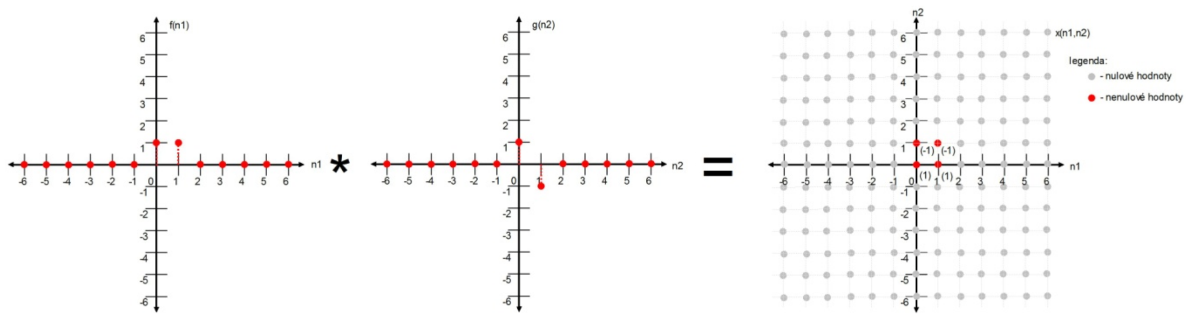




Separovateľné postupnosti:

Postupnosť $x(n1, n2)$ je ***separovateľná***, ak sa dá rozložiť na súčin dvoch funkcií $f(n1), g(n2)$, z ktorých každá je závislá ***len od jednej premennej***.

$$x(n1, n2) = f(n1) * g(n2)$$



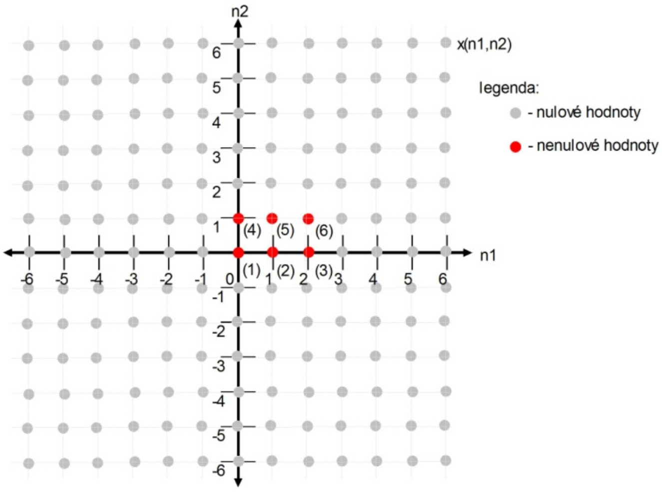
V skutočnosti sa snažíme o presný opak. Čiže nejaký 2D signál separovať na jednoduchšie signály a tie ďalej spracovávať.

Periodické postupnosti

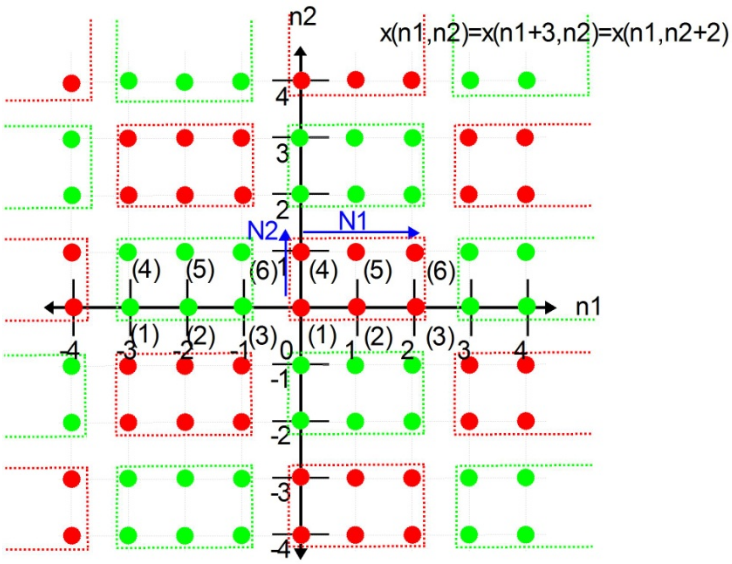
$$x(n1, n2) = x(n1 + N1, n2) = x(n1, n2 + N2)$$

,pričom $N1$ a $N2$ udávajú dĺžky periód v smere osí n1 a n2.

Čiže majme neperiodickú 2D postupnosť x(n1,n2):



Podľa definície $x(n1, n2) = x(n1 + N1, n2) = x(n1, n2 + N2)$ z nej vytvorme postupnosť periodickú, tým, že týchto 6 bodiek sa bude do každej strany opakovať:



2D konvolúcia:

2D konvolúcia je definovaná

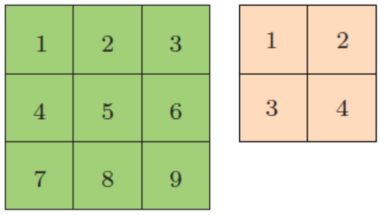
$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2).h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

Konvolúcie s dvojrozmernými signálmi sa robí obdobne ako konvolúcia s jednorozmernými signálmi, len musíme do výpočtu zahrnúť aj druhý rozmer. Zrejme najjednoduchší spôsob výpočtu (bez použitia počítača) je pomocou grafického algoritmu.

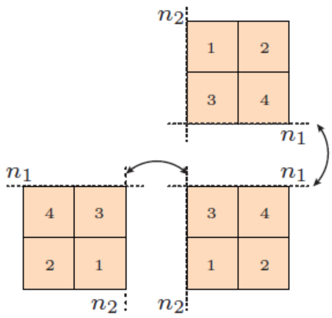
Výpočet si ukážeme na nasledovnom príklade (vypožičanom z iných materiálov):

majme zadané dva signály $x(n_1, n_2)$, $h(n_1, n_2)$ a vypočítajme ich vzájomnú konvolúciu.

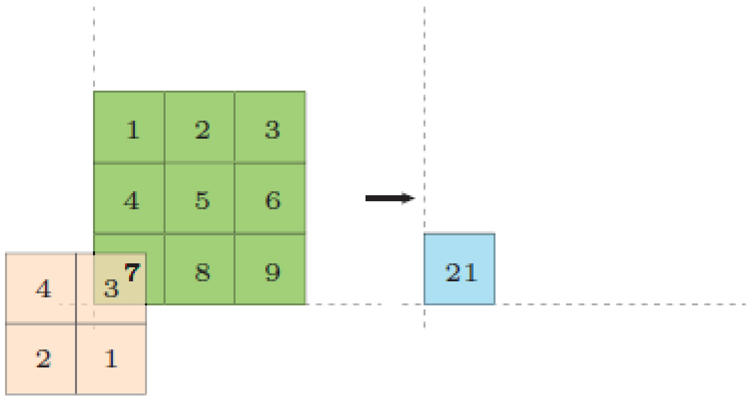
$$x(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad h(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



Signály x(n1,n2) a h(n1,n2)



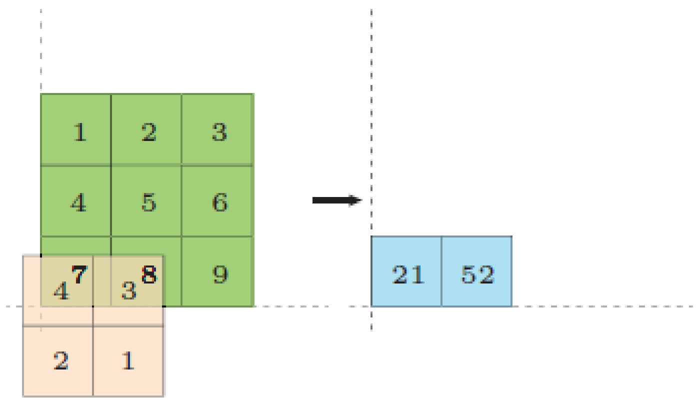
Jeden signál preklopíme okolo osí n1 a n2



V prvom kroku vynásobíme prvky, ktoré sa prekrývajú

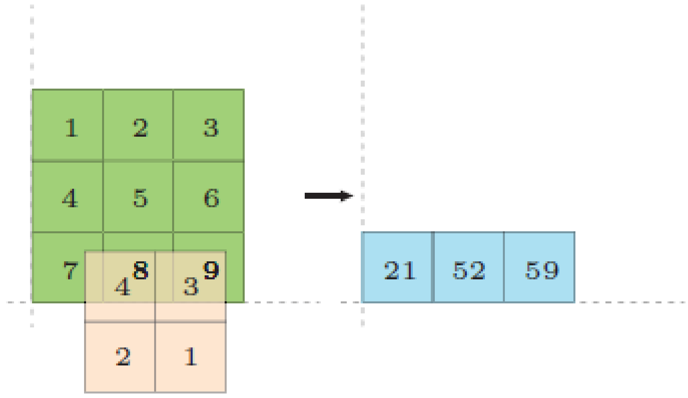
$$y(0,0) = 7.3 = 21$$

.

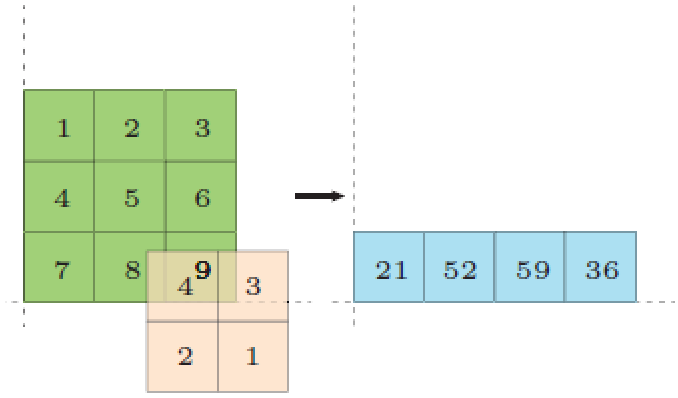


V ďalších krokoch posúvame $h(n_1, n_2)$ voči $x(n_1, n_2)$ a počítame ďalšie prvky $y(n_1, n_2)$.

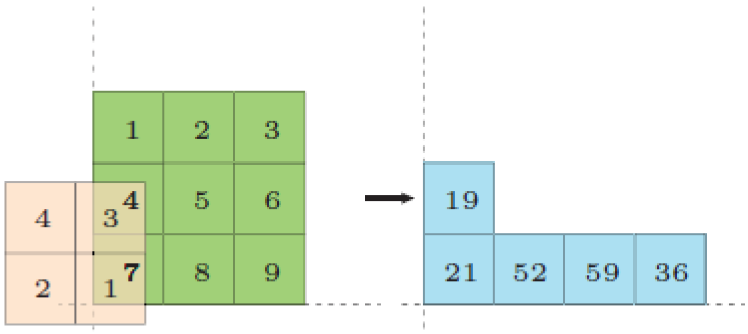
$$y(1,0) = 7.4 + 8.3 = 28 + 24 = 52$$



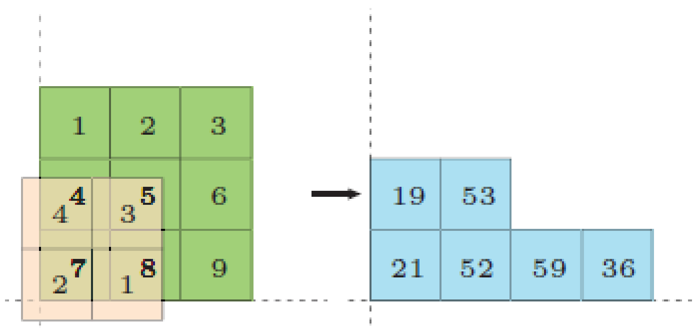
$y(2,0) = 8.4\ + 9.3 = 32 + 27 = 59$



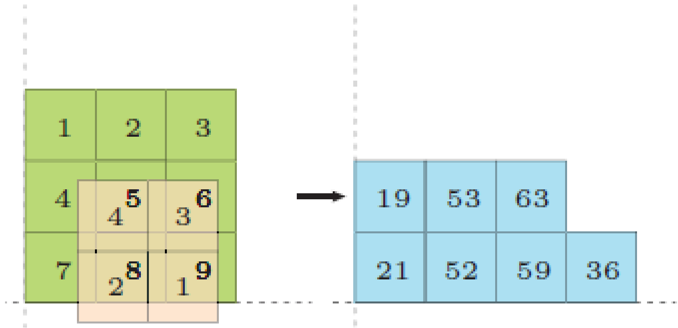
$y(3,0) = 9.4 = 36$



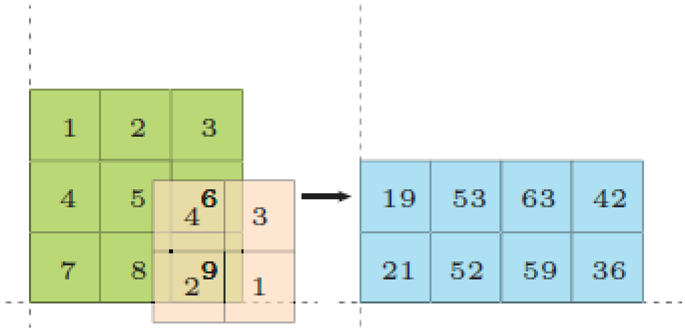
$y(0,1) = 4.3\ + 7.1 = 19$



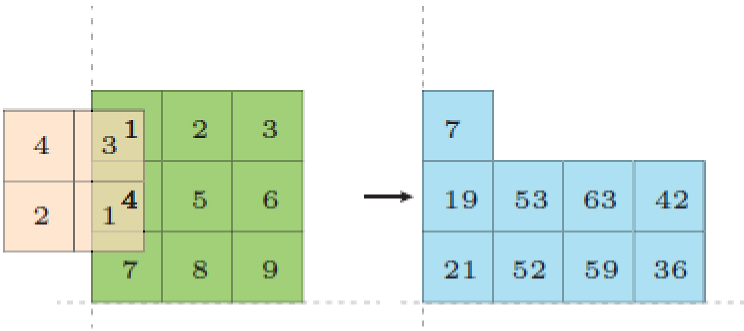
$y(1,1) = 4.4\ + 7.2\ + 5.3\ + 8.1 = 53$



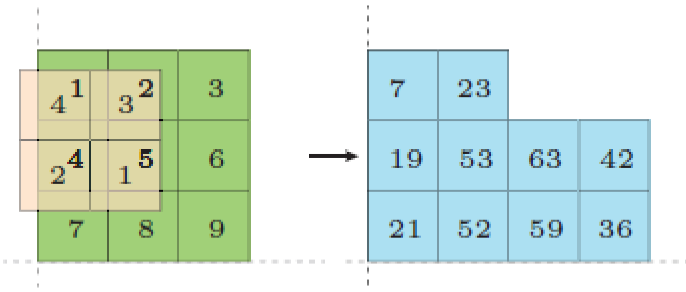
$$y(2,1) = 5.4 + 8.2 + 6.3 + 9.1 = 63$$



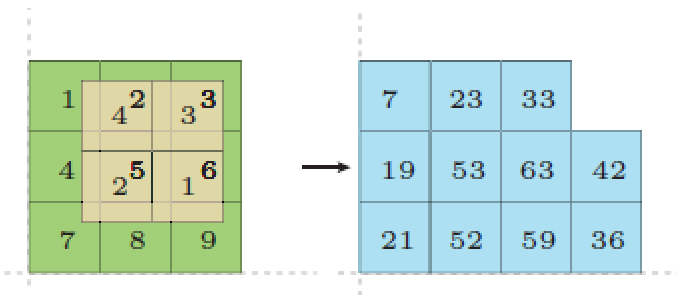
$$y(3,1) = 6.4 + 9.2 = 42$$



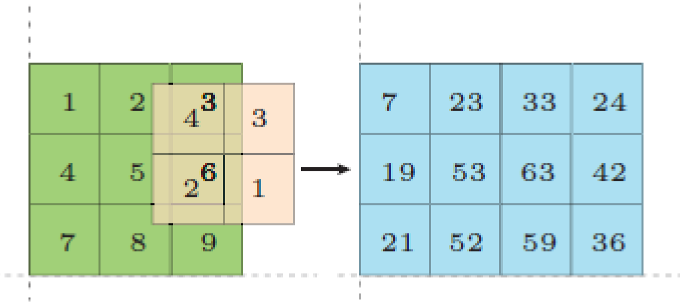
$$y(0,2) = 1.3 + 4.1 = 7$$



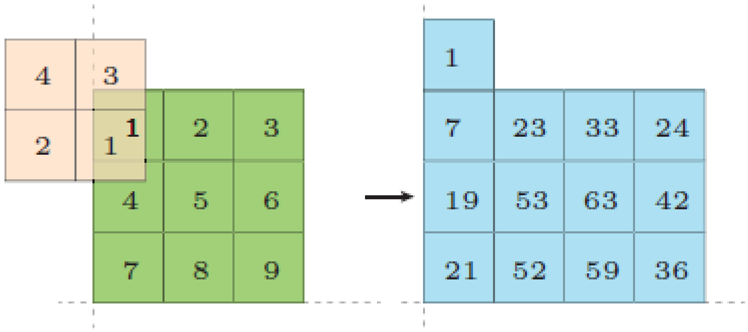
$$y(1,2) = 1.4 + 4.2 + 2.3 + 5.1 = 23$$



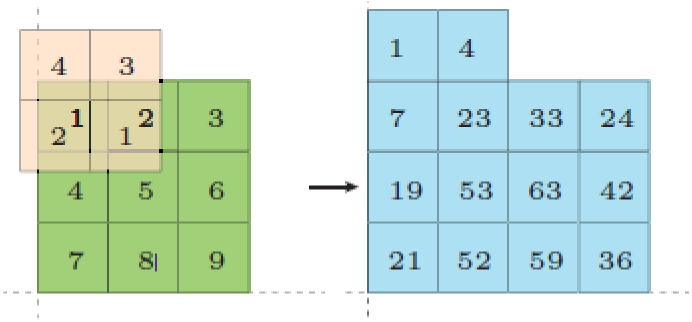
$y(2,2) = 2.4\ + 5.2 + 3.3 + 6.1 = 33$



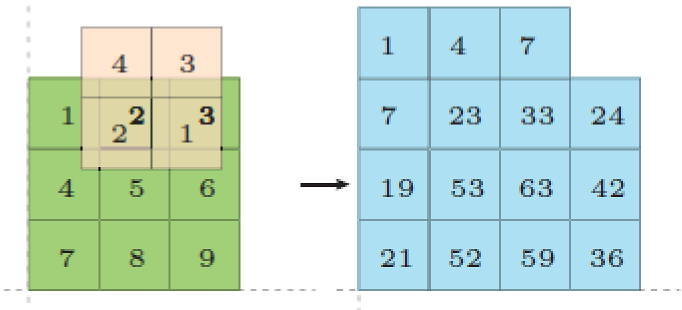
$y(3,2) = 3.4\ + 6.2 = 24$



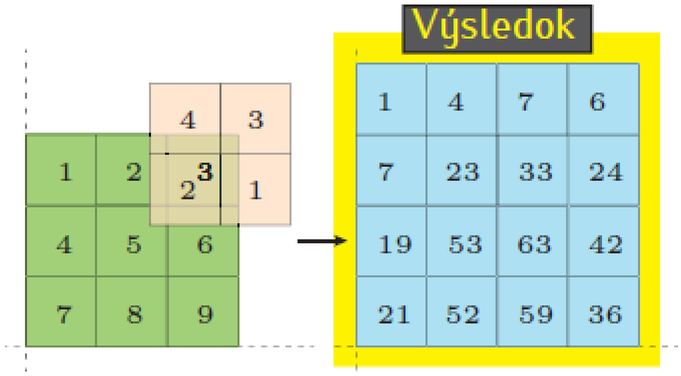
$y(0,3) = 1.1 = 1$



$y(1,3) = 1.2\ +\ 2.1 = 4$



$y(2,3) = 2.2\ +\ 3.1 = 7$



$$y(3,3) = 3.2 \; = 6$$