Diskrétne ortogonálne transformácie

Úvod do problematiky:

V reálnej praxi sa nevyužíva zápis transformácii pomocou rovníc, pretože by to bolo zdĺhavé. V počítačoch sa tým pádom využíva skôr maticový zápis, ktorý je prehľadnejší na interpretáciu a hlavne výpočtovú jednoduchosť.

Pozrime sa napríklad na naše staré známe DFT. Klasická rovnica ktorú by ste už mali poznať :

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Po rozpísaní pre 8 vzoriek, každý riadok ešte treba podeliť N aby to súhlasilo so vzorcom, to isté platí aj dole pri matici:

$$X(0) = x(0)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 0} + x(1)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 0} + x(2)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 0} + x(3)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 0} + x(4)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 0} + x(5)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 0} + x(6)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 0} + x(7)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 0}$$

$$X(1) = x(0)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 1} + x(1)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 1} + x(2)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 1} + x(3)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 1} + x(4)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 1} + x(5)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 1} + x(6)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 1} + x(7)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 1}$$

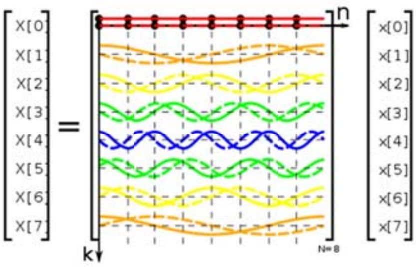
$$\vdots$$

$$X(7) = x(0)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 7} + x(1)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 7} + x(2)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 7} + x(3)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 7} + x(4)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 7} + x(5)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 7} + x(6)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 7} + x(7)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 7}$$

Takýto zápis by vás nemal príliš prekvapiť , keďže prepísanie predchádzajúcich rovníc do maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} X(0)\\ X(1)\\ X(2)\\ X(3)\\ X(4)\\ X(5)\\ X(6)\\ X(7)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 0}\\
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 1} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 1}\\
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 2} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 2}\\
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 3} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 3} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 3} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 3} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 3} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 3} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 3} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 3}\\
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 4} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 4} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 4} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 4} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 4} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 4} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 4} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 4}\\
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 5} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 5} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 5} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 5} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 5} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 5} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 5} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 5}\\
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 6} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 6} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 6} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 6} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 6} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 6} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 6} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 6}\\
e^{-j\frac{2\pi}{8}0\cdot 7} & e^{-j\frac{2\pi}{8}1\cdot 7} & e^{-j\frac{2\pi}{8}2\cdot 7} & e^{-j\frac{2\pi}{8}3\cdot 7} & e^{-j\frac{2\pi}{8}4\cdot 7} & e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot 7} & e^{-j\frac{2\pi}{8}6\cdot 7} & e^{-j\frac{2\pi}{8}7\cdot 7}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ x(3)\\ x(4)\\ x(5)\\ x(6)\\ x(7)\end{bmatrix}$$

Vektor napravo predstavuje vstupné **vzorky** signálu. **Vektor naľavo** predtsavuje **vzorky v spektre**. Veľká matica vstrede sa nazýva **transformačná matica**. Matica k nej inverzná sa nazýva **matica bázových funkcii**. Pomocou bázových funkcii dokážeme rekonštruovať akýkoľvek signál. Ak by múdre hlavy zaujímalo ako to vlastne vyzerá, pozrite sa na nasledujúci obrázok. (plná čiara je cosínusová zložka, čiarkovaná sínusová zložka)



Množina bázových funkcii je **úplná**, ak neexistuje žiadna ďalšia funkcia, ktorá by bola s nimi ortogonálna. (Alebo v prípade maticových zápisov - ďalší vektor)

Týmto sme sa pomocou DFT pekne krásne dostali k maticovému zápisu transformácii, ktorý vo všeobecnom tvare môžeme zapísať nasledovne:

Priama transformácia $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}$

Spätná transformácia $\overline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{X}}$

Pruh nad písmenom predstavuje vektor, pruh pod písmenom predstavuje maticu.

Riadky transformačnej matice predstavujú vektory, ktoré musia byť medzi sebou ortogonálne. Ich ortogonalitu vieme overiť skalárnym súčinom, ako uvidíte v príkladoch. Inak by sa tieto rovnice nedali použiť.

N = normalizačná konštanta, získame ju : $\underline{\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{N} \cdot \underline{\mathbf{1}}$

kde $\underline{1}$ je jednotková diagonálna matica, názorne to uvidíte v príkladoch.

Spomínali sme, že signál vieme rekonštrovať pomocou matice bázových funkcii. Prečo teda v našej spätnej transformácii využívame transponovanú transformačnú maticu ? Pretože je to len formálny prepis nasledujúcej rovnice:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N} \cdot \underline{\boldsymbol{inv}(\boldsymbol{U})} \cdot \overline{\boldsymbol{X}}$$

S využitím rovnosti a po dosadení:

$$\underline{\boldsymbol{inv}(\boldsymbol{U})} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{X}} = \underline{\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}} \cdot \overline{\boldsymbol{X}}$$

Dostávame náš vzorec, ktorý je výhodnejší z hľadiska zložitosti výpočtu, kedy sa nemusíme zaoberať inverznými maticami.

Príklady:

Príklad 1)

Máme danú transformačnú maticu **U**, zistime či je to transformačná matica ortogonálnej transformácie.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

Skalárny súčin riadkov transformačnej matice má byť rovný nule, tak poďme počítať:

$$(1 \quad 2 \quad 3).(4 \quad 5 \quad 6) = 1.4 + 2.5 + 3.6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Ako môžeme vidieť skalárny súčin sa nerovná 0, čiže daná matica nie je ortogonálna.

Nevadí! Poďme vyskúšať inú maticu! Napríklad takúto:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Skalárny súčin riadkov je:

$$(1 \quad -2 \quad 4).(2 \quad 5 \quad 2) = 1.2 - 2.5 + 4.2 = 2 - 10 + 8 = 0$$

Skalárny súčin riadkov tejto matice je rovný 0, čiže daná matica je ortogonálna.

Príklad 2)

Doplňte definíciu transformácie tak, aby bola ortogonálna. Nájdite správne hodnoty premenných a, b, c.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -2 & b & c \end{pmatrix}$$

Tento príklad je tak trošku hlavolam. Preto najskôr porozmýšľajte nad riešením sami. Až potom si prečítajte náš postup riešenia, ktorý je jeden z mnohých možných.

Riešenie:

Napíšeme rovnice skalárneho súčinu pre všetky riadky matice:

$$(2 \quad 3 \quad 1).(a \quad -1 \quad 1) = 2.a - 3.1 + 1.1 = 2a - 3 + 1 = 0$$

$$(2 \quad 3 \quad 1).(-2 \quad b \quad c) = -2.2 + 3.b + 1.c = 3b + c - 4 = 0$$

$$(a \quad -1 \quad 1).(-2 \quad b \quad c) = -2.a - 1.b + 1.c = -2a - b + c = 0$$

Získavame sústavu troch rovníc o troch neznámych. Riešenie tejto sústavy je aj riešením zadaného príkladu. Môžeme si zaspomínať na Matematiku 1 a riešiť sústavu rovníc maticovo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3b & c & 4 \\ -2a & -b & c & 0 \end{array}\right)$$

Pomocou elementárnych riadkových operácií sa dopracujeme k riešeniu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & c & 5/2 \end{array}\right)$$

Ortogonálna transformačná matica vyzerá nasledovne:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Riešenie overíme výpočtom skalárnych súčinov:

$$(2 \quad 3 \quad 1).(1 \quad -1 \quad 1) = 2.1 - 3.1 + 1.1 = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$(2 \quad 3 \quad 1).(-2 \quad 1/2 \quad 5/2) = -2.2 + 3.\frac{1}{2} + 1.\frac{5}{2} = -4 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = -4 + 4 = 0$$

$$(1 \quad -1 \quad 1).(-2 \quad 1/2 \quad 5/2) = -1.2 - 1.\frac{1}{2} + 1.\frac{5}{2} = -2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = -2 + 2 = 0$$

Riešenie je správne.

Príklad 3)

Vypočítajte zo vstupných vzoriek vektoru $\overline{x}$ a transformačnej matice U priamou transformáciou vektor $\overline{X}$, a spätnou transformáciou overte či dostanete pôvodný vektor $\overline{x}$.

Zadané sú: $x = [5{,}1]$

$$U = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to U^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Podľa predpisu z teórie $\overline{X} = \frac{1}{N} \cdot \underline{U} \cdot \overline{x}$,čiže musíme si určiť najprv N-normalizačnú konštantu a získame ju nasledovne $\underline{U^T} \cdot \underline{U} = N \cdot \underline{1}$ respektíve keď si to rozpíšeme

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení danej matice dostávame

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A aby daná rovnosť bola platná N=25. Teraz môžeme ľahko dopočítať $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{25} \\ \frac{19}{25} \end{pmatrix}$$

Výsledok overíme tak že sa pokúsime o spätnú transformáciu $\overline{x} = \underline{U^T} \cdot \overline{X}$ čiže :

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{17}{25} \\ \frac{19}{25} \end{pmatrix} = (5{,}1)$$

Čím sme potvrdili teóriu.