Stabilizácia pomocou planárneho algoritmu (PLSI)

(Číslicové spracovanie signálu)

Ľuboš Mičian 2010

Stabilizácia pomocou planárneho algoritmu (PLSI)

- Možno aproximovať vlastnosti magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky nestabilnej sústavy, aj keď póly ležia na jednotkovej kružnici roviny Z alebo v jej blízkosti.
- Dvojnásobným invertovaním polynómu menovateľa prenosovej funkcie IIR systému dostaneme stabilný polynóm.

Stabilizácia pomocou planárneho algoritmu (PLSI)

Výhody:

- Môžeme si navrhnúť rád sústavy
- Môžeme riešiť sústavy na hranici stability
- Môžeme aproximovať nestabilné póly, ktoré sa nachádzajú blízko jednotkovej kružnici v Z rovine

Nevýhody:

- Mení sa priebeh magnitúdovej charakteristiky

Vzorový príklad č.1

Máme zadanú prenosovú funkciu: $H(z) = \dfrac{1}{4 + 6z^{-1} + 13z^{-2}}$

Vypočítame diskriminant a následne rozmiestnenie pólov:

$$D = -172$$

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm i\sqrt{172}}{8}$$

Póly: $z_1 = -0{,}75 + 1{,}63936\, i$

$z_2 = -0{,}75 - 1{,}63936\, i$

Póly prenosovej funkcie ležia mimo jednotkovej kružnice Z roviny.

$$B(z^{-1}) = 4 + 6z^{-1} + 13z^{-2}$$

Je polynóm, ktorý ma nestabilné poly a hľadáme planárny polynóm k tomuto polynómu v tvare:

$$A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

Najskôr vypočítame hodnoty q_k z definície:

$$q_{-r+s} = \sum_{k=0}^{m+n} b_{(k-r)} . b_{(k-s)}$$

m – stupeň polynómu A(z)

n – stupeň polynómu B(z)

Sústavu rovníc zapíšeme do Q matice, ktorá má tvaru:

$$\begin{bmatrix} q_0 & q_{-1} & q_{-2} & \cdots & q_{-m} \\ q_1 & q_0 & q_{-1} & \cdots & q_{-m+1} \\ q_2 & q_1 & q_0 & \cdots & q_{-m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_m & q_{m-1} & q_{m-2} & \cdots & q_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_0 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 4^2 + 6^2 + 13^2 = 221$$
$$q_1 = b_0 b_1 + b_1 b_2 = 4.6 + 6.13 = 102$$
$$q_2 = b_0 b_2 = 4.13 = 52$$

Vyriešime sústavu rovníc

$$\begin{bmatrix} 221 & 102 & 52 \\ 102 & 221 & 102 \\ 52 & 102 & 221 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0{,}02302$$
$$a_1 = -0{,}01032$$
$$a_2 = -0{,}00065$$

Riešením tejto sústavy dostávame rovnicu

$$A(z^{-1}) = 0{,}02302 - 0{,}01032\, z^{-1} - 0{,}00065\, z^{-2}$$

$$A(z^{-1}) = 0{,}02302 - 0{,}01032\,z^{-1} - 0{,}00065\,z^{-2}$$

Nakoniec musíme vypočítať $\hat{A}(z^{-1})$, ktorý bude planárne inverzný k polynómu $A(z^{-1})$

Opäť vypočítame jednotlivé hodnoty q_k z rovnice $A(z^{-1})$

$$q_0 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 0{,}00064$$

$$q_1 = b_0 b_1 + b_1 b_2 = -0{,}00023$$

$$q_2 = b_0 b_2 = -0{,}00002$$

Opäť riešime sústavu rovníc

$$\begin{bmatrix} 0{,}00064 & -0{,}00023 & -0{,}00002 \\ -0{,}00023 & 0{,}00064 & -0{,}00023 \\ -0{,}00002 & -0{,}00023 & 0{,}00064 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}02302 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_0 = 42{,}75348$$

$$\hat{a}_1 = 18{,}19450$$

$$\hat{a}_2 = 7{,}87469$$

Riešením tejto sústavy rovníc nám vyjde hľadaný polynóm $\hat{A}(z^{-1})$

$$\hat{A}(z^{-1}) = 42{,}75348 + 18{,}19450\,z^{-1} + 7{,}87469\,z^{-2}$$

Výsledná prenosová funkcia so stabilizovanými pólmi:

$$H(z) = \frac{1}{42{,}75348 + 18{,}19450\,z^{-1} + 7{,}87469\,z^{-2}}$$

Vzorový príklad č.2

Máme zadanú prenosovú funkciu: $H(z) = \dfrac{1}{1 - 6z^{-1} + 16z^{-2} - 16z^{-3}}$

Riešenie: - prenosová funkcia má nestabilné poly: $z_1 = 2$

$z_2 = 2 + 2i$

$z_3 = 2 - 2i$

$$B(z^{-1}) = 1 - 6z^{-1} + 16z^{-2} - 16z^{-3} \qquad A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$q_0 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 549$$
$$q_1 = b_0 b_1 + b_1 b_2 + b_2 b_3 = -358$$
$$q_2 = b_0 b_2 + b_1 b_3 = 112$$

$$\begin{bmatrix} 549 & -358 & 112 \\ -358 & 549 & -358 \\ 112 & -358 & 549 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nasledovné kroky sú rovnaké ako v príklade č.1.

Výsledná prenosová funkcia: $H(z) = \dfrac{1}{85{,}15 + 1{,}3z^{-1} - 85{,}18z^{-2}}$

V tomto príklade je vidno zmenu rádu sústavy medzi pôvodnou a aproximovanou.

Vzorový príklad č.3

Máme zadanú prenosovú funkciu: $H(z) = \dfrac{1}{z^3 - 4z^2 + 8z}$

Riešenie : - zadaná prenosová funkcia má jeden stabilný pól v bode $z_1=0$ a dva nestabilné póly $z_2 = 2 + 2i$

$z_3 = 2 - 2i$

Aproximujeme len tú časť funkcie, ktorá obsahuje nestabilné póly.

$B(z^{-1}) = 1 - 4z^{-1} + 8z^{-2}$ $\quad A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$

Nasledujúce kroky riešenia sú rovnaké ako v príklade č.1

$$\hat{A}(z^{-1}) = 64{,}09 - 31{,}97^{-1} + 8{,}01z^{-2}$$

Výsledné H(z) získame tak, že prenásobíme nami nájdenú aproximovanú funkciu Â(z) so stabilným pólom.

$$H(z) = \frac{1}{\hat{A}(z).z} = \frac{1}{64{,}09z^3 - 31{,}97z^2 + 8{,}01z}$$