Stabilizácia sústav pomocou planárnej metódy PLSI

Pomocou PLSI je možné aproximovať vlastnosti magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky nestabilnej sústavy aj keď póly prenosovej funkcie ležia na jednotkovej kružnici roviny „z“.

Podstata metódy spočíva v nájdení takého polynómu A(z), ktorý aproximuje inverzný polynóm k polynómu B(z). A následne nájsť polynóm C(z), ktorý je aproximáciou inverzného polynómu k polynómu A(z). Výsledkom toho je to, že dvojnásobným invertovaním polynómu menovateľa prenosovej funkcie IIR sústavy získame stabilný polynóm, ktorý aproximuje B(z).

Popísaný postup môžeme matematicky zhrnúť nasledovne:

$$H(z) = \frac{1}{B(z)} \qquad A(z) \triangleq \frac{1}{B(z)} \qquad C(z) \triangleq \frac{1}{A(z)} \qquad => \qquad C(z) \triangleq B(z)$$

C(z) je stabilný polynóm to znamená, že $\widehat{H(z)} = \frac{1}{C(z)}$ je stabilná sústava.

Nech prenosová funkcia sústavy je:

$$H(z) = \frac{1}{B(z)} = \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Potom prvky Q matice

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ q_1 & q_0 & q_1 \\ q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

môžeme vypočítať ako

$$q_0 = \sum_k {b_k}^2$$

$$q_1 = b_0 b_1 + b_1 b_2$$

$$q_2 = b_0 b_2$$

následne riešime sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ q_1 & q_0 & q_1 \\ q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a získame polynóm $A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$, ktorý je $A(z) \triangleq \frac{1}{B(z)}$.

Riešenie sústavy rovníc môžeme získať v Matlabe použitím príkazu $A = Q \setminus b$, pričom $(Q).(A) = (b)$

Opakovaním tohto postupu vypočítame polynóm $C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}$, ktorý je aproximáciou polynómu B(z).

Na záver dostávame prenosovú funkciu $\widehat{H(z)} = \frac{1}{C(z)} = \frac{1}{c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}} \triangleq H(z)$ IIR sústavy, ktorá je už ale stabilná.

poznámka:

Čitateľ pôvodnej prenosovej funkcie môže byť ľubovoľný polynóm predstavujúci nuly sústavy. Keďže tento polynóm nevplýva na nestabilitu IIR sústavy, do výpočtu ho nezahrňujeme.

Výhody takéhoto riešenia sú:

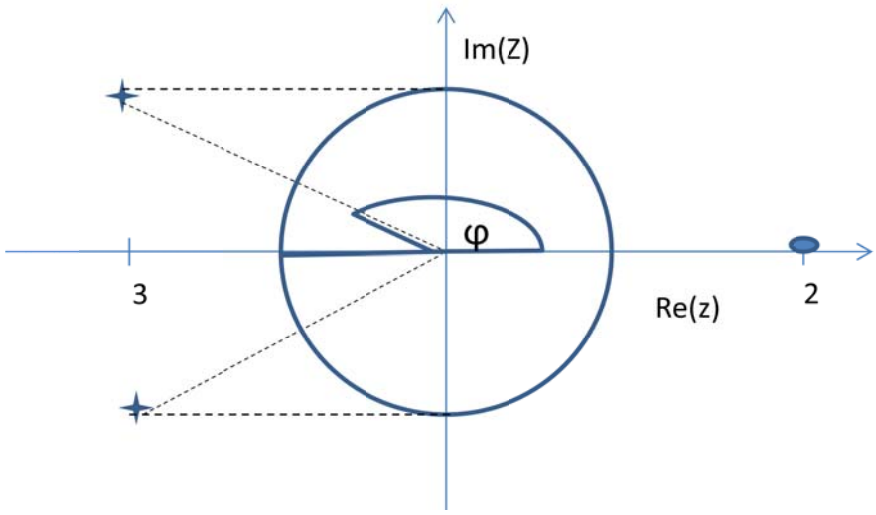
- môžeme stabilizovať akýkoľvek systém aj taký, ktorý je na hrane stability.
- môžeme si zvoliť stupeň polynómov A(z), C(z) a tým aj presnosť aproximácie .

Nevýhody takéhoto riešenia sú:

- je to „len“ aproximácia.
- so zvyšujúcou sa presnosťou aproximácie (stupňa A(z) a C(z)) rastie náročnosť výpočtu.

Príklad:

Podľa obrázku posúďte či daná sústava je stabilná, ak nie je, stabilizujte ju pomocou PLSI algoritmu.



Krok 1)

Z daného obrázku si zapíšeme rovnicu prenosovej funkcie ktorá je nestabilná a budeme sa ju snažiť stabilizovať pomocou PLSI metódy.

Ako vidno máme tu jednu nulu a jeden pár komplexne združených pólov. Rovnicu zapíšeme nasledovne :

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1+(3-j)z^{-1})(1+(3+j)z^{-1})}$$

$$= \frac{1-2z^{-1}}{(1+3z^{-1}-jz^{-1})(1+3z^{-1}+jz^{-1})}$$

$$= \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + jz^{-1} + 3z^{-1} + 9z^{-2} + 3jz^{-1} - jz^{-1} - 3jz^{-1} + z^{-1}}$$

$$= \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 6z^{-1} + 10z^{-2}}$$

Krok 2)

Určíme si prvky Q matice

b_0=1 b_1=6 b_2=10

$q_{0=b_0^2+b_1^2+b_2^2}$=1+36+100=137

$q_{1=b_0b_1+b_1b_2}$=6+60=66

$q_{2=b_0b_2}$=10

Krok 3)

Zápis Q matice a následne riešime túto sústavu rovníc.

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ q_1 & q_0 & q_1 \\ q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dosadíme

$$\begin{pmatrix} 137 & 66 & 10 \\ 66 & 137 & 66 \\ 10 & 66 & 137 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$137a_0 + 66a_1 + 66a_2 = 1$$

$$66a_0 + 137a_1 + 66a_2 = 0$$

$$10a_0 + 66a_1 + 137a_2 = 0$$

Riešením sústavy rovníc dostávame a-čkove hodnoty (najrýchlejšie v Mathcade, alebo múdrejšou kalkulačkou)

a_0=9.931 $\cdot 10^{-3}$

a_1=-5.776 $\cdot 10^{-3}$

a_2=2.056 $\cdot 10^{-3}$

Krok 4)

Ako už je uvedené v teórii nasledujúcim krokom znovu opakovanie algoritmu od kroku 2, presnejšie nájdeme si nové :

$q'_{0=a_0^2+a_1^2+a_2^2}$= $(9.931 \cdot 10^{-3})^2$+ $(-5.776 \cdot 10^{-3})^2$+$(2.056 \cdot 10^{-3})^2$=0.000136=0.136x10^{-3}

$q'_{1=a_0a_1+a_1a_2}$=$(9.931 \cdot 10^{-3})$ $(-5.776 \cdot 10^{-3})$ + $(-5.776 \cdot 10^{-3})$ $(2.056 \cdot 10^{-3})$=-0.0000692=-0.0692x10^{-3}

$q'_{2=a_0a_2}$=$(9.931 \cdot 10^{-3})$ $(2.056 \cdot 10^{-3})$=0.0000204=0.0204x10^{-3}

$$\begin{pmatrix} 0.136x10^{-3} & -0.0692\text{x}10^{-3} & 0.0204\text{x}10^{-3} \\ -0.0692\text{x}10^{-3} & 10.136x10^{-3}37 & -0.0692\text{x}10^{-3} \\ 0.0204\text{x}10^{-3} & -0.0692\text{x}10^{-3} & 10.136x10^{-3}37 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.931 \ \cdot 10-3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Riešením sústavy rovníc sú :

c_0 =100.707

c_1 =58.772

c_2=14.798

A dostávame stabilizovanú prenosovú sústavu :

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{100.707 + 58.772z^{-1} + 14.789z^{-2}}$$