Metódy návrhu IIR filtrov

Nepriame metódy návrhu

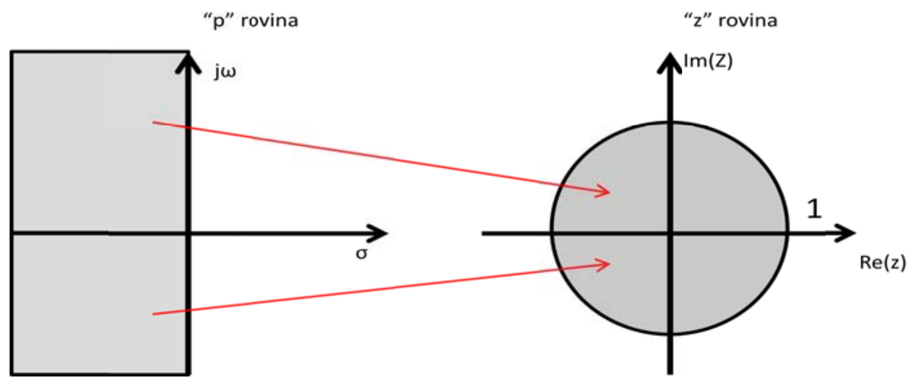
Nepriame metódy návrhu digitálnych filtrov vychádzajú z návrhu analógových filtrov, ktoré sa potom pretransformujú na digitálne filtre.

Všeobecný postup návrhu:

1. formulácia požiadaviek na diskrétny filter
2. pretransformovanie požiadaviek na analógový NDP
3. návrh NDP spojitého filtra → nájdenie prenosovej f. H(p)
4. transformácia funkcie H(p) na diskrétnu H(z)

Metóda bilineárnej transformácie:

Nepriamy návrh filtrov vychádza z metódy bilineárnej Tustinovej transformácie. Bilineárna transformácia slúži na mapovanie z „p" do „z" roviny(týmto krokom dostávame z spojitého filtru diskrétny).



Vychádzame z požadovanej frekvenčnej charakteristiky ktorú pretransformujeme na analógový DP filter. Následne pomocou jednej z metód (Butterwort, Čebišev alebo eliptického filtra) v analógovej oblasti navrhneme filter a pretransformujeme spätne na digitálny. Na to aby sme vedeli previesť filter z spojitej do diskrétnej formy používame vzťahy vychádzajúce z rovnice derivátora.

$$H_D(\Omega) = j \cdot \alpha \cdot tan\frac{\Omega}{2}$$

Pre zadanú frekvenciu v digitálnej oblasti f_p (požadovaná frekvencia prepúšťania digitálneho filtra) vypočítame pomerovú frekvenciu vzhľadom na vzorkovaciu frekvenciu $\Omega_p = \frac{f_p}{f_{vz}} \cdot 2\pi$ a k frekvencii f_z (požadovaná frekvencia zadŕžania digitálneho filtra) vypočítame pomerovú frekvenciu $\Omega_z = \frac{f_z}{f_{vz}} \cdot 2\pi$.

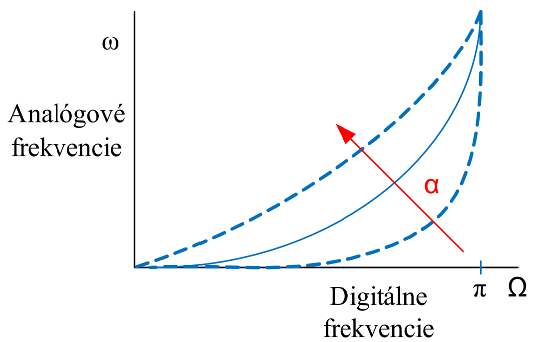
Následne v závislosti o aký filter ide: DP(na obrázku č.1),HP,PP,PZ tieto frekvencie dosadíme do príslušných vzťahov a dostaneme normovaný DP filter v analógovej oblasti a k tomu príslušné hodnoty. Vzorce pre výpočet sú :

a) DP $$\omega = \alpha \cdot tg\frac{\Omega}{2}$$

najprv za Ω vložíme Ω_p a pre ω=1 a tým získame α čo predstavuje stupeň voľnosti a vplýva na charakteristiku tak ako to vidno na obr.č.1 .Následne vložíme do vzorcu Ω_z a pomocou získanej α vypočítame ω_K a získali sme všetko čo sme potrebovali aby sme nakreslili normovaný DP analógový filter z obr.č.2 .Ďalej už postupujeme pomocou Butterworth alebo nejakou inou metódou riešenia návrhu analógových filtrov. Pre DP filter z rovnice derivátora vyplýva že po návrhu filtra v analógovej oblasti prechádzame z „p" roviny do „z" roviny substitúciou

$$p \rightarrow \alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

a získavame prenosovú rovnicu DIGITÁLNEHO filtra.



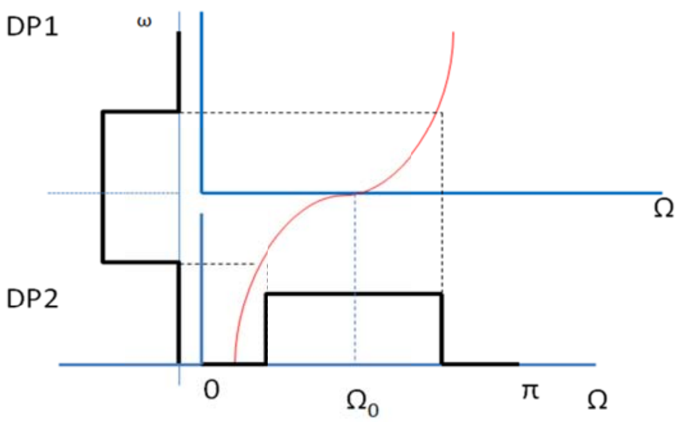
b) HP $$\omega = \alpha \cdot cotg(\frac{\Omega}{2})$$

Postupujeme rovnako ako pri DP, tiež získame parametre potrebne na zostrojenie analógového DP filtra a navrhneme ho nejakou už zo spomínaných metód. Nakoniec na prechod použijem na prechod z „p" do „z" roviny substitúciu

$$p \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

c) PP

Pri pásmovej priepusti je to o niečo zložitejšie. Môžeme vychádzať z transformačných vzorcov ktorým by odpovedala aj charakteristika na obrázku, ale vieme si pomôcť i bez zložitých výpočtov a odvádzaní tak, že tento filter poskladáme z dvoch DP/HP filtrov, ktorých prenosovky sčítame/odčítame.

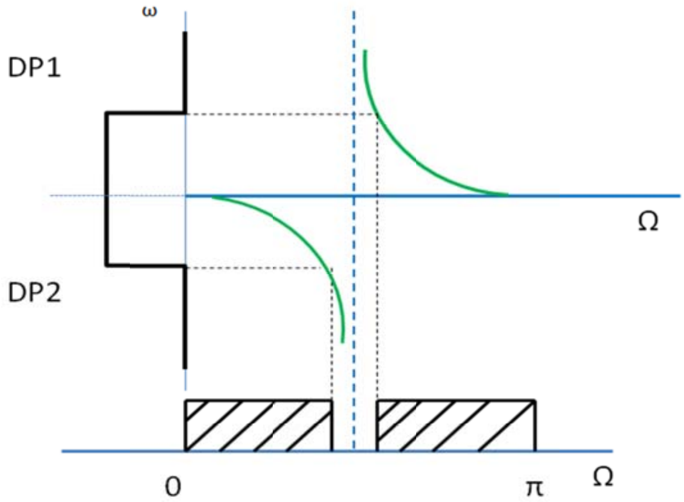


Transformačné vzorce:

$$p \rightarrow \; k \cdot \frac{z^{-2}+2\cdot\alpha\cdot z^{-1}+1}{1-z^{-2}} \qquad k = cotg(\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2}) \qquad \alpha = \frac{\cos(\frac{\Omega_2+\Omega_1}{2})}{\cos(\frac{\Omega_2-\Omega_1}{2})}$$

c) PZ

Pre pásmovú zádrž taktiež môžeme odvodiť transformačné vzorce, ktoré charakterizujú priebeh krivky, ale opäť môžeme využiť jednoduchší princíp sčítania/odčítania dvoch prenosoviek DP/HP filtrov.



Analógový filter typu Butterworth:

Postup návrhu analógovéhofiltra typu Butterworth:

Základná rovnica, z ktorej budeme vychádzať:

$$A(\omega) = 10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2 \omega^{2n})$$

1. V prvom kroku do tejto rovnice dosadime za $A(\Omega)$ veľkosť tlmenia pre **pásmo prepúštania A_{max}** NDF a za ω dosadíme **normované pásmo prepúšťania** ω_p. Vieme, že pre NDF je ω_p rovné 1. Vyrátame ε^2.

$$A(\omega) = A_{max} \qquad \omega = \omega_p = 1$$

$$A_{max} = 10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2 1^{2n}) => \varepsilon^2 = 10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1$$

2. V druhom kroku potrebujeme vyrátať rád filtra n. Hodnotu ε^2 už poznáme, ďalej dosadíme za $A(\Omega)$ veľkosť tlmenia pre **pásmo zádrže A_{min}** NDF a za ω dosadíme **normované pásmo zádrže** ω_z. Vyrátame rád filtra n.

$$A(\Omega) = A_{min} \qquad \omega = \omega_z$$

$$A_{min} = 10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2 {\omega_z}^{2n}) => n = \frac{1}{2} * \frac{ln(\frac{10^{\frac{A_{min}}{10}} - 1}{\varepsilon^2})}{\ln(\omega)}$$

3. Teraz využijeme charakteristickú rovnicu filtra, z ktorej po dosadení ε^2 a n získame korene p.

$$G(p) \cdot G(-p) = 1 + \varepsilon^2 p^n (-p)^n = 1 + \varepsilon^2 (-1)^n p^{2n}$$

Túto rovnicu dáme rovnú nule a vyjadríme čomu sa rovná p.

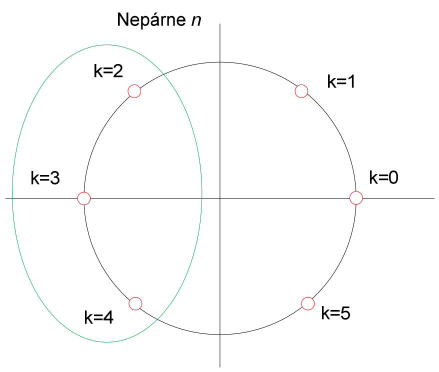
Ak je ***n* nepárne** : $p_k = \frac{1}{\sqrt[2n]{\varepsilon^2}} * e^{j\frac{2\pi k}{2n}}$ $k = 0 \ldots (2n-1)$

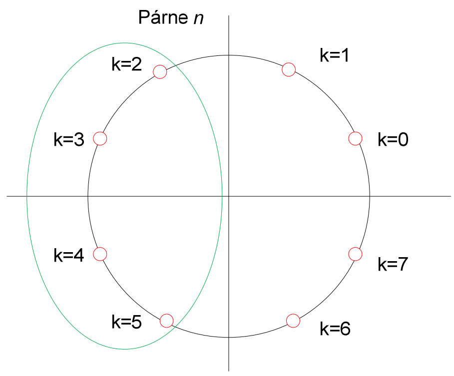
Ak je ***n* párne** : $p_k = \frac{1}{\sqrt[2n]{\varepsilon^2}} * e^{j\frac{\pi + 2\pi k}{2n}}$ $k = 0 \ldots (2n-1)$

Čiže ak bude rád filtra napríklad $n = 2$ a $\varepsilon^2 = 1$ (pre zjednodušenie), potom získame nasledujúce štyri korene:

$$p_0 = e^{\frac{j\pi}{4}}; \quad p_1 = e^{\frac{j3\pi}{4}}; \quad p_2 = e^{\frac{j5\pi}{4}}; \quad p_3 = e^{\frac{j7\pi}{4}}$$

Z predchádzajúcich predmetov vieme, že na to, aby bola sústava stabilná, musia ležať korene v ľavej časti p-roviny (respektíve na hranici). Teda vezmeme iba $G(p)$. Všeobecne zakreslené:





4. Vzťah medzi prenosovou funkciou $H(p)$ a charakteristickou rovnicou filtra $G(p)$ je:

$$H(p) = \frac{1}{G(p)}$$

$$G(p) = (p - p0) * (p - p1) * (p - p2) * \ldots * (p - pk)$$

Toto je všeobecný zápis! Nesmieme zabúdať, že **korene berieme iba z ľavej polovice p-roviny**.

$$H(p) = \frac{1}{(p - p0) * (p - p1) * (p - p2) * \ldots * (p - pk)}$$

To je naša chcená prenosová funkcia analógového filtra.

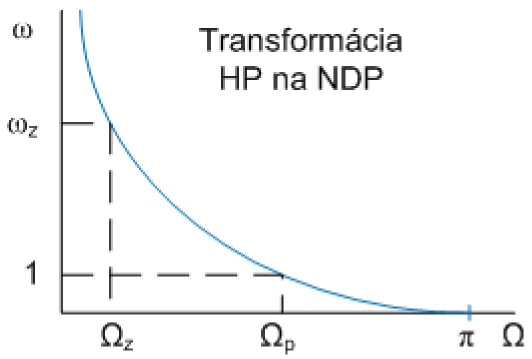
Ukážka riešeného príkladu:

Máme navrhnúť HP filter s nasledujúcimi požiadavkami, ktoré najprv prepíšeme na digitálne:

$f_{vz} = 40\ kHz$ $\quad A_{min} = 20\ dB$ $\quad A_{max} = 3\ dB$

$f_p = 8\ kHz$ $\quad \Omega_p = \frac{f_p}{f_{vz}} \cdot 2\pi = \frac{8k}{40k} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{5}$

$f_z = 4\ kHz$ $\quad \Omega_z = \frac{f_z}{f_{vz}} \cdot 2\pi = \frac{4k}{40k} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{5}$



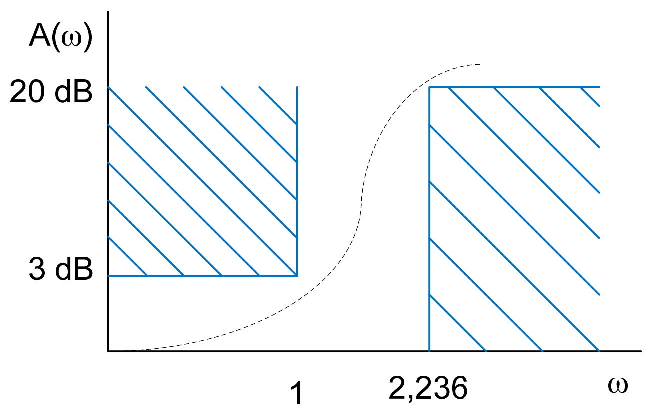
$\omega = \alpha \cdot cotg(\frac{\Omega}{2})$

Z teórie si už vieme napísať transformačné rovnice aj s transformačnou charakteristikou a teda vieme aj pretransformovať digitálne požiadavky na spojitý filter.

$$1 = \alpha \cdot cotg\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) = \alpha \cdot cotg\left(\frac{\frac{2\pi}{5}}{2}\right) = \alpha \cdot cotg\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad \gg \quad \alpha = \frac{1}{cotg\left(\frac{\pi}{5}\right)} = tg\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0{,}7265$$

$$\omega_z = \alpha \cdot cotg\left(\frac{\Omega_z}{2}\right) = 0{,}7265 \cdot cotg\left(\frac{\frac{\pi}{5}}{2}\right) = 0{,}7265 \cdot cotg\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0{,}7265 \cdot \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{10}\right)} = 2{,}236$$

Teraz si už môžeme nakresliť ako bude vyzerať NDP filter.



Teraz už konečne môžeme pristúpiť k samotnému návrhu filtra.

$$A(\Omega) = 10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2 \omega^{2n})$$

$3 = 10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2 1^{2n})$ $\qquad 20 = 10 \cdot \log(1 + 1^2 2{,}236^{2n})$

$0{,}3 = \log(1 + \varepsilon^2 1^{2n})$

$\varepsilon^2 = 10^{0{,}3} - 1 \quad \gg \quad \boldsymbol{\varepsilon^2 = 1}$

$2 = \log(1 + 1^2 2{,}236^{2n})$

$99 = 2{,}236^{2n}$

$\log(99) = 2n \cdot \log 2{,}236$

$n = \frac{\log 99}{\log 2{,}236} \cdot \frac{1}{2} = 2{,}85 \quad \gg \quad \boldsymbol{n = 3}$

Teraz máme koeficienty potrebné na napísanie charakteristickej rovnice filtra (nuly tejto funkcie sú vlastne pólmi prenosovej funkcie):

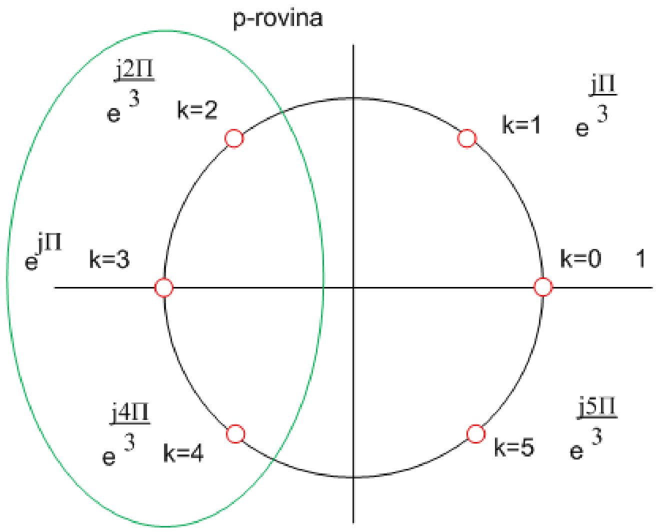
$G(p) \cdot G(-p) = 1 + \varepsilon^2 p^n (-p)^n = 1 - p^6$

$p^6 = 1 \cdot e^{j2\pi k}$

$p = \sqrt[6]{1} \cdot e^{(j\frac{2\pi k}{6})} = 1 \cdot e^{(j\frac{\pi}{3}k)}$

k = 0,1,2...2n-1

Za *k* postupne dosadzujeme čísla od 0 až po rád filtra, čo je v našom prípade 6 a zakresľujeme korene do p-roviny.



Keď chceme napísať prenosovú funkciu, tak berieme do úvahy len korene z ľavej strany, kvôli zachovaniu stability.

$$G(p) = (p - e^{j\frac{2\pi}{3}}) \cdot (p - e^{j\pi}) \cdot (p - e^{j\frac{4\pi}{3}})$$

Z toho prenosová funkcia spojitého filtra:

$$H(p) = \frac{1}{G(p)} = \frac{1}{(p - e^{j\frac{2\pi}{3}}) \cdot (p - e^{j\pi}) \cdot (p - e^{j\frac{4\pi}{3}})}$$

Teraz už môžeme pristúpiť ku konečnej transformácii na diskrétnu prenosovú funkciu. Čiže za *p* do predchádzajúcej funkcie dosadíme transformačný vzťah pre HP filter.

$$p \rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$H(p) = \frac{1}{(\frac{1}{0{,}7265} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} - e^{j\frac{2\pi}{3}}) \cdot (\frac{1}{0{,}7265} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} - e^{j\pi}) \cdot (\frac{1}{0{,}7265} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} - e^{j\frac{4\pi}{3}})}$$

Môžete sa ešte posnažiť s úpravou prenosovej funkcie do krajšieho tvaru.