Diskrétna Fourierova Transformácia - DFT

Základné vzťahy

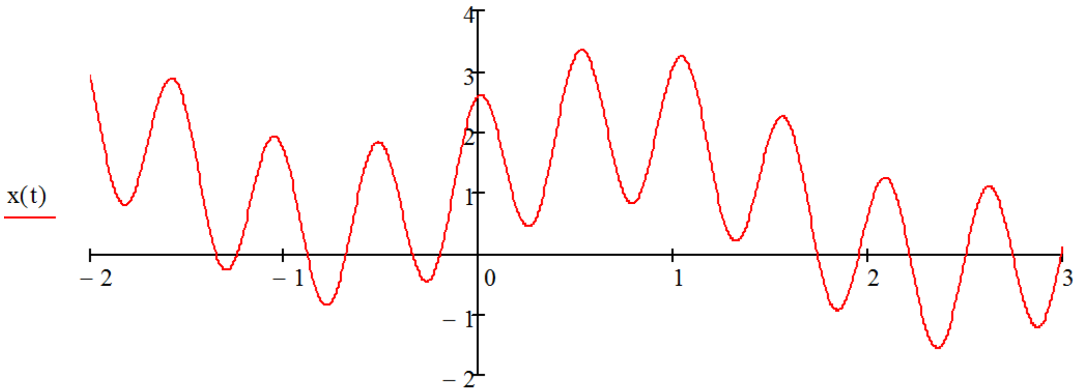
Priama:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Spätná:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{+j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Princíp



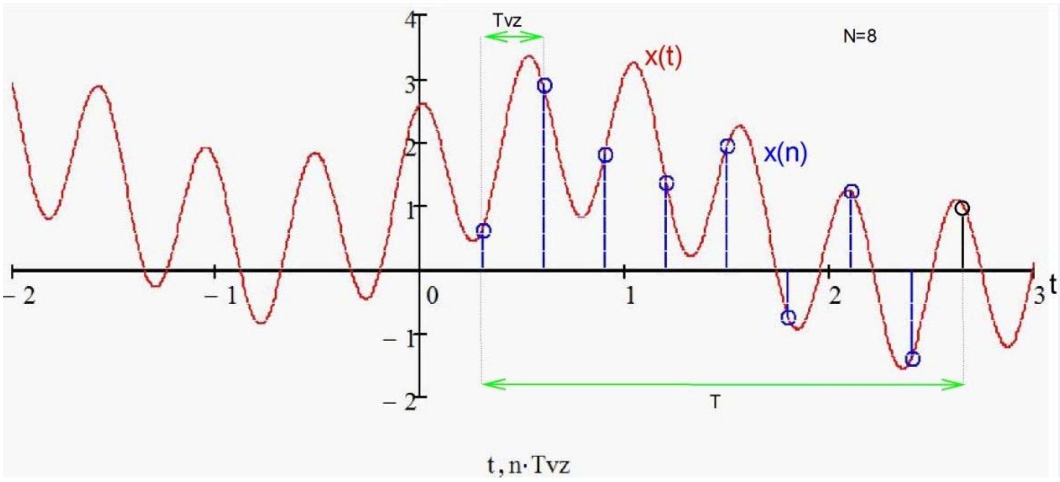
Spojitý signál x(t) môže predstavovať napríklad reč, hudbu, rádio alebo aj riadiaci signál ovládania rakety s plochou dráhou letu typu BrahMos. Keď chceme ako pozorovateľ zistiť, či sa nejaký vojak hrá s vysielačkou, alebo či sa na nás rúti raketa, musíme vedieť zachytený signál spracovať a vyhodnotiť. Otázka dešifrovania a dekódovania signálu bude úlohou neskoršieho spracovania signálu, najprv je nutné signál predspracovať. To znamená napríklad zistiť frekvenčné spektrum signálu, odfiltrovať nepotrebné zložky, rušenie a podobne. Jedným z nástrojov, ktorým môžeme niektoré z týchto charakteristík zistiť, je aj Diskrétna fourierova transformácia. Čiže tá „hnusná" matematika sa aj reálne v praxi všade využíva...

Poďme teraz aspoň zľahka k tej matematike.

DFT priamo nadväzuje na problematiku Fourierových radov. Odvodenie vzorcov priamej a spätnej DFT je veľmi jednoduché a intuitívne, preto si to ukážeme.

Z FR poznáme pre výpočet frekvenčného spektra periodického spojitého signálu :

$$X(k) = \frac{1}{T} * \int_{-T/2}^{T/2} x(t) * e^{-j\omega kt} dt$$



Predstavme si, že navzorkujeme určitý úsek signálu x(t) a budeme sa tváriť, že táto navzorkovaná časť sa bude periodicky opakovať. Potom môžeme nasledujúcimi substitúciami (vyplývajú z obrázka) nahradiť jednotlivé prvky vzorca:

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega kt}dt$$

$T = N * Tvz\,;$ $dt = Tvz\,;$ $x(t) = x(n)\,;$ $\int_0^T = \sum_{n=0}^{N}\,;$ $t = n * Tvz$

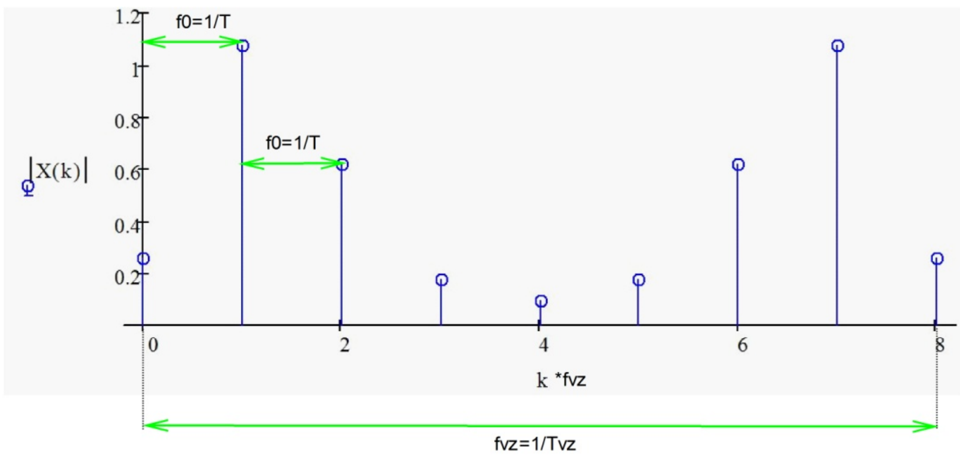
$$X(k) = \frac{1}{N * Tvz}\sum_{n=0}^{N} x(n)e^{-j\omega knTvz} * Tvz$$

Po úprave, keď $\omega = \frac{2*\pi}{T} = \frac{2*\pi}{N*Tvz}$ a vykrátení dostaneme nakoniec vzorec pre priamu DFT:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Spätnú transformáciu získame analogickým spôsobom.

Frekvenčné spektrum pri počte vzoriek 8, teda x(0) až x(7) bude vyzerať napríklad takto:

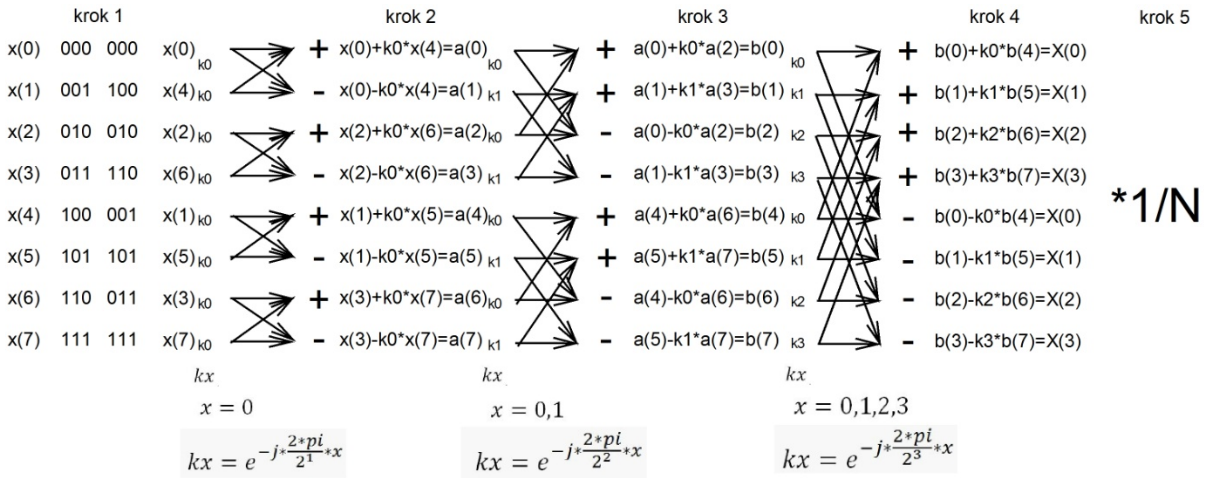


Je dôležité všimnúť si z obrázka vzťah medzi počtom vzoriek v čase a v spektre (vzorka č.8 je zobrazená iba z dôvodu znázornenia celkovej šírky spektra), vzdialenosť vzoriek v spektre, šírku celého spektra a vzťahy medzi samotnými vzorkami spektra.

Je zdĺhavé rátať jednotlivé spektrálne zložky použitím uvedených vzorcov pre priamu transformáciu. Existuje aj zrýchlený algoritmus, ktorý nám umožní tieto vzorky vyrátať elegantnejším a rýchlejším spôsobom. Je to algoritmus rýchlej fourierovej transformácie (FFT- fast fourier transform). Tieto študijné materiály majú slúžiť ako pomocná príprava na cvičenia, preto tu neuvádzame odvodenie tohto algoritmu.

Algoritmus FFT (pre N=8):

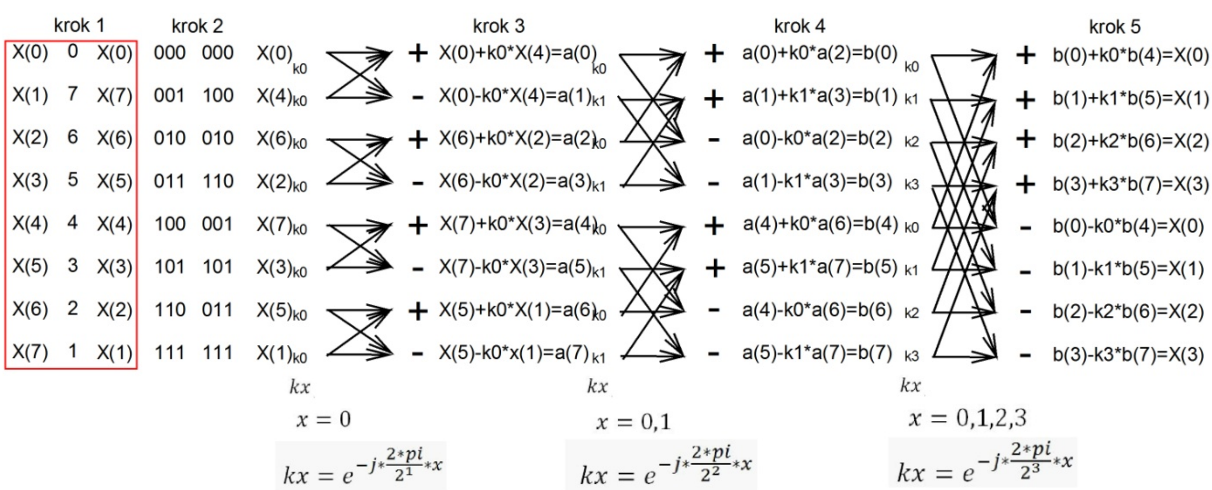
Priama



Popis krokov:

- krok 1- Preusporiadanie vzoriek. Vzorky zoradíme od X(0) po X (7) a binárne ich očíslujeme. Jednotlivé binárne kódy potom otočíme a vzorky preusporiadame podľa nových číslovaní.
- kroky 2, 3 a 4 sú zrejmé z obrázka.
- krok 5- výsledky predelíme počtom vzoriek N (nemusíme, ale potom ich musíme predeliť v spätnej transformácii- otázka dohody).

Spätná



Spätná transformácia je identická s priamou, s dvoma výnimkami. Pribudol tam krok, ktorý je na obrázku zvýraznený, a výsledok nedelíme počtom vzoriek. Na začiatku musíme jednotlivé spektrálne koeficienty $X(k)$ preusporiadať . Zvyšok algoritmu je identický.

Príklad.

Vstupné vzorky $x(n)=\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\}$. Vypočítajte algoritmom FFT spektrum $X(k)$.

Výsledok:

$X(k)=\{4.5;\quad -0.5+0.5i+0.5*\sqrt{2}*I;\quad -0.5+0.5i;\quad -0.5-0.5i+0.5*\sqrt{2}*I;\quad -0.5;\quad -0.5+0.5i-0.5*\sqrt{2}*I;\quad -0.5-0.5i;\quad -0.5-0.5i-0.5*\sqrt{2}*i\ \}$