

Prostriedky charakteristiky LDKI systémov a vzťahy medzi nimi

Attila Fekete

Prostriedky charakteristiky LDKI systémov

- Diferenčná rovnica

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$

- Impulzová charakteristika

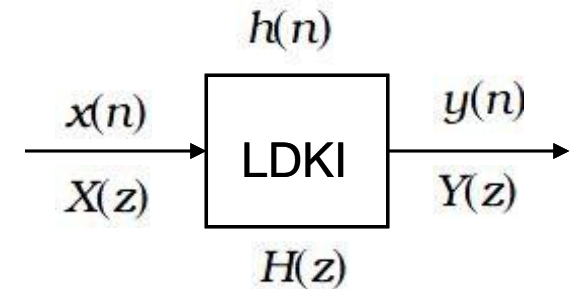
$$h(n)$$

- Prenosová funkcia

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}$$

konvolúcia

$$y(n) = x(n) * h(n)$$



$$Y(z) = X(z) H(z)$$

násobenie

Diferenčná rovnica → Impulzová charakteristika

- Dostaneme pomocou dosadenia kroneckerovho impulzu (jednotkový impulz v čase nula) do diferenčnej rovnice
- Príklad: $y(n) = 2x(n) + x(n-1) + y(n-1) - 2y(n-2)$

• Riešenie:

$$y(0) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y(1) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 = 3$$

$$y(2) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

$$y(3) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7$$

$$y(4) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-7) - 2 \cdot (-1) = -5$$

$$y(5) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) - 2 \cdot (-7) = 9$$

...

- Teda $h(n) = \{2, 3, -1, -7, -5, 9, \dots\}$

Odpoveď sústavy na vstupný signál

- Dostaneme pomocou konvolúcie vstupného signálu $x(n)$ a impulzovej charakteristiky $h(n)$
- Dĺžka výstupného signálu je určená vzťahom $D_y = D_x + D_h - 1$, kde D_x je dĺžka vstupného signálu $x(n)$ a D_h je dĺžka impulzovej charakteristiky $h(n)$
- Príklad: $h(n) = \{1,2,4\}$; $x(n) = \{1,2,3\}$
- $h(n)$ otočíme, postupne posunieme $x(n)$ pod $h(n)$
- hodnoty v jednom stĺpci vynásobíme a súčiny sčítame

$\begin{array}{r} 4\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3 \end{array}$ $1 \cdot 1 = 1$ $y(0) = 1$	$\begin{array}{r} 4\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3 \end{array}$ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$ $y(1) = 4$	$\begin{array}{r} 4\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3 \end{array}$ $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$ $y(2) = 11$	$\begin{array}{r} 4\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3 \end{array}$ $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$ $y(3) = 14$	$\begin{array}{r} 4\ 2\ 1 \\ 1\ 2\ 3 \end{array}$ $4 \cdot 3 = 12$ $y(4) = 12$
--	--	--	--	--

$$y(n) = \{1,4,11,14,12\}$$

Diferenčná rovnica → Prenosová funkcia

- Dostaneme pomocou Z-transformácie
- Príklad: $y(n) = 2x(n) + x(n-1) + y(n-1) - 2y(n-2)$
- Riešenie: $Y(z) = 2X(z) + X(z)z^{-1} + Y(z)z^{-1} - 2Y(z)z^{-2}$
 $Y(z) - Y(z)z^{-1} + 2Y(z)z^{-2} = 2X(z) + X(z)z^{-1}$
 $Y(z) \cdot [1 - z^{-1} + 2z^{-2}] = X(z) \cdot [2 + z^{-1}]$

$$H(z) = Y(z)/X(z) = [2 + z^{-1}]/[1 - z^{-1} + 2z^{-2}]$$

Prenosová funkcia → Impulzová charakteristika

- Dostaneme delením polynómu prenosovej funkcie
- Ďalšia možnosť je spätná Z-transformácia, pomocou ktorého dostaneme diferenčnú rovnicu, do ktorého môžeme dosadiť kroneckerov impulz a dostaneme impulzovú charakteristiku

- Príklad: $H(z) = [2 + z^{-1}]/[1 - z^{-1} + 2z^{-2}]$

- Riešenie: $[2 + z^{-1}]/[1 - z^{-1} + 2z^{-2}] = 2 + 3z^{-1} - 1z^{-2} \dots$

$$\underline{-2 + 2z^{-1} - 4z^{-2}}$$

$$3z^{-1} - 4z^{-2}$$

$$\underline{-3z^{-1} + 3z^{-2} - 6z^{-3}}$$

$$-1z^{-2} - 6z^{-3}$$

$$\underline{+1z^{-2} - z^{-3} + 2z^{-4}}$$

$$-7z^{-3} + 2z^{-4}$$

.....

$$h(n) = \{2, 3, -1, \dots\}$$