Lineárny diskrétny kauzýlny časovo – invariantný systém (LDKI)

Opis LDKI v časovej oblasti:

Lineárna diferenčná rovnica s konštantnými koeficientmi:

LDKI systém môžeme opísať **lineárnou diferenčnou rovnicou s konštantnými koeficientami:**

$$\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x(n-k) \qquad ; n = 0,1,2 \cdots$$

$$y(n) + \sum_{k=1}^{M} b_k \cdot y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x(n-k) \qquad ; n = 0,1,2 \cdots$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k \cdot y(n-k) \qquad ; n = 0,1,2 \cdots$$

Pomocou diferenčnej rovnice vieme určiť, či ide o systém bez spätnej väzby (nerekurzívny), alebo so spätnou väzbou (rekurzívny). Diferenčná rovnica systému bez spätnej väzby vyzerá nasledovne:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x(n-k) \qquad ; n = 0,1,2 \cdots$$

V takomto prípade vieme povedať, že systém má **konečnú impulzovú odozvu – KIO (FIR).** K takejto rovnici vždy vieme povedať že je to sústava stabilná lebo nemá rekurzívnu časť.

V opačnom prípade, ak má systém spätnú väzbu, diferenčná rovnica vyzerá nasledovne:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k \cdot y(n-k) \qquad ; n = 0,1,2 \cdots$$

Diferenčná rovnica obsahuje aj spätno-väzobnú (rekurzívnu) časť (členy b_k.y(n-k)). Takýto systém môže mať **nekonečnú impulzovú odozvu – NIO (IIR)**, ale aj **konečnú impulzovú odozvu.**

Čo je impulzová odozva resp. impulzová charakteristika systému h(n)?

Je to odpoveď LDKI systému na Kroneckerov impulz. Pričom Kroneckerov impulz je definovaný nasledovne: $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$. Čiže to je signál na výstupe systému, keď na jeho vstup privedieme Kroneckerov impulz.

$$h(n) = y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \delta(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k \cdot y(n-k) \qquad ; n = 0,1,2 \cdots$$

Pre lepšie pochopenie si vypočítajme nasledovné príklady: Máme zadané diferenčné rovnice opisujúce LDKI systémy

a) $y(n) = x(n) + 4x(n-1) + 13x(n-4)$
b) $y(n) = x(n) + x(n-1) - y(n-2)$
c) $y(n) = 2x(n) + 4x(n-1) + 13x(n-4) - 2y(n-1) + 4y(n-2)$

Určme, či sú to systémy so spätnou väzbou. Ďalej vypočítajme ich impulzové charakteristiky a určme, či sú to systémy s KIO alebo NIO.

Riešenie:

a) Po privedení Kroneckerovho impulzu na vstup sústavy ktorý si vieme napísať ako x=[1,0,0,0...] pre $\boldsymbol{y(n) = x(n) + 4x(n-1) + 13x(n-4)}$

$y(0) = x(0) + 4x(0-1) + 13x(0-4) = 1*1 + 4*0 + 13*0 = 1$
$y(1) = x(1) + 4x(1-1) + 13x(1-4) = 0 + 4*1 + 0 = 4$
$y(2) = x(2) + 4x(2-1) + 13x(2-4) = 0 + 0 + 0 = 0$
$y(3) = x(3) + 4x(3-1) + 13x(3-4) = 0$
$y(4) = x(4) + 4x(4-1) + 13x(4-4) = 0 + 0 + 13 = 13$
$y(5) = x(5) + 4x(5-1) + 13x(5-4) = 0$

$h(n) = [1,4,0,0,13]$- je impulzovou odpoveďou sústavy na Kroneckerov impulz a z tohto konečného počtu odpovedí vieme posúdiť že sústava je z Konečnou Impulzovou Odpoveďou -KIO alebo FIR (Finit Impulse Response).

b) Obdobne ako v príklade podľa a) privedieme na vstup x=[1,0,0,0...] a potom pre

$$\boldsymbol{y(n) = x(n) + x(n-1)} - y(n-2)$$

$y(0) = x(0) + x(0-1) - y(0-2) = 1 + 0 + 0 = 1$
$y(1) = x(1) + x(1-1) - y(1-2) = 0 + 1 - 0 = 1$
$y(2) = x(2) + x(2-1) - y(2-2) = 0 + 0 - 1 = -1$
$y(3) = x(3) + x(3-1) - y(3-2) = 0 + 0 - 1 = -1$
$y(4) = x(4) + x(4-1) - y(4-2) = 0 + 0 - (-1) = 1$
$y(5) = x(5) + x(5-1) - y(5-2) = 0 + 0 - (-1) = 1$
$y(6) = x(6) + x(6-1) - y(6-1) = 0 + 0 - 1 = -1$

Toto je príklad rekurzívnej rovnice (obsahuje rekurzívnu časť na pravej strane oznacenú zelenou farbou).Jej impulzovou odpoveďou je $h(n) = [1,1,-1,-1,1,1,-1,-1 \ldots]$- to je NIO resp. IIR sústava

c) Pre rovnicu $\boldsymbol{y(n) = 2x(n) + 4x(n-1) + 13x(n-4) - 2y(n-1) + 4y(n-2)}$

$y(0) = 2x(0) + 4x(0-1) + 13x(0-4) - 2y(0-1) + 4y(0-2)$ =2+0+0+0+0=2
$y(1) = 2x(1) + 4x(1-1) + 13x(1-4) - 2y(1-1) + 4y(1-2) = 0 + 4 +$ 0-2+0=2
$y(2) = 2x(2) + 4x(2-1) + 13x(2-4) - 2y(2-1) + 4y(2-2)$ =0+0+0-4+8=4
$y(3) = 2x(3) + 4x(3-1) + 13x(3-4) - 2y(3-1) + 4y(3-2) = -8 + 8 = 0$
$y(4) = 2x(4) + 4x(4-1) + 13x(4-4) - 2y(4-1) + 4y(4-2) = 0 + 0 + 13 - 0 + 4*4 = 29$
$y(5) = 2x(5) + 4x(5-1) + 13x(5-4) - 2y(5-1) + 4y(5-2) = 0 + 0 + 0 - 2*29 + 4*0 = -58$
$y(6) = 2x(6) + 4x(6-1) + 13x(6-4) - 2y(6-1) + 4y(6-2) = 0 + 0 + 0 - 2*(-58) + 4*29 = 232$

atď.

Impulzová odpoveď v tomto prípade je h(n)=[2,2,4,0,29,-58,232....] čo je už sústava z nekonečnou impulzovou odpoveďou čiže NIO.

Impulzová charakteristika je dôležitá z hľadiska popisu vlastností systému, pretože obsahuje presne informácie o tom, ako sa sústava správa = po transformácii na prenosovú funkciu z nej môžeme získať frekvenčné charakteristiky (amplitúdovú, fázovú) a tam je vidieť, ako sa sústava správa pri konkrétnych frekvenciách vstupného signálu. Preto sa na jej zistenie používa kroneckerov impulz, pretože spektrum tohto signálu obsahuje všetky frekvencie.

Stabilita systému:

Platí podmienka, že systém je stabilný ak pre impulzovú charakteristiku *h(n)* platí:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Vo všeobecnosti sa nesnažíme skonštruovať zariadenia nestabilné – je to nevýhodné. Preto sa aj nestabilné systémy snažíme stabilizovať určitými metódami, no o tom sa budeme baviť na neskorších cvičeniach. Maximálne sa využívajú ešte systémy na hranici stability (konštantná impulzová odpoveď v abs. miere) – generátor harm. sig.

Súvis medzi FIR, IIR a stabilitou systému:

Pre FIR systém platí, že impulzová odozva má konečný počet prvkov N, ktoré v reálnom systéme majú konečnú hodnotu. V takomto prípade platí podmienka stability: $\sum_{n=0}^{N} |h(n)| < \infty$. Môžeme povedať, že ak má systém FIR, tak je aj stabilný.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \cdots = \cdots < \infty$$ -ako je to v našom príklade pod a)

Pre IIR systém platí, že impulzová odozva má nekonečný počet prvkov. Tieto prvky buď v absolútnej hodnote rastú až do ∞, alebo sa ustália na ľubovoľnej maximálnej hodnote a ďalej nerastú. Podľa toho môžeme povedať, či je systém **nestabilný**, alebo je **na hrane stability.**

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \cdots = \cdots \to \infty$ **nestabilný** - prípad c)

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \cdots = \cdots \to B < \infty$ **na hrane stability** - prípad b)

Využitie impulzovej charakteristiky h(n):

Odpoveď sústavy na vstupný signál môžeme zistiť **konvolučným súčinom.** Predpokladajme známu impulzovú charakteristiku systému *h(n).* Ak na vstup tohto systému privedieme ľubovoľný signál *x(n)*, potom výstupný signál môžeme vyjadriť vzťahom:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{D_y-1} x(k) \cdot h(n-k) = x(n) * h(n)$$

Pričom dĺžka výstupného signálu D_y je určená vzťahom:

$$D_y = D_x + D_h - 1$$

kde D_x je dĺžka vstupného signálu *x(n)* a D_h je dĺžka impulzovej charakteristiky.

Príklad: Vypočítaj y(n), ak je dané x(n) a h(n).

x(n)=[1,3,-2,5,7]

h(n)= [1,5,8,-5,13]

$D_y = D_x + D_h - 1$=5+5-1=9

Výstup môžeme počítať dvomi spôsobmi:

I) $y(0) = \sum_{k=0}^{D_y-1} x(n) \cdot h(n-k) = x(n) * h(n) = x(0) \cdot h(4) = 1 \cdot 1 = 1$

$y(1) = x(0) \cdot h(4-1) + x(1) \cdot h(4-0) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 8$

$y(2) = x(0) \cdot h(4-2) + x(1) \cdot h(4-1) + x(2) \cdot h(4-0) = 1 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 = 21$

.
.
.

II) Jednoduchším spôsobom je keď otočíme h(n) a posuvom dostaneme výstupy systému

ĥ(n)=[13,-5,8,5,1] pootočené h(n)

```
            1 3 -2 5 7        y(0)=1
*13 -5 8 5 1
____________

1*1=1

          1 3 -2 5 7          y(1)=1
*13 -5 8 5 1
____________

1*5+3*1=8

        1 3 -2 5 7            y(2)=21
*13 -5 8 5 1
____________

1*8+3*5+(-2)*1=21
      .                       y(3)=14
      .                       y(4)=14
      .                       y(5)=124
      .                       y(6)=5
                              y(7)=30
            1 3 -2 5 7        y(8)=91
                    *13 -5 8 5 1
____________

7*13=91
```

Potom y(n)=[1,8,21,14,14,124,5,30,91] je výstupom systému

*Na overenie môžete do Matlabu vniesť vstupné matice pre x a h a následne príkazom conv(x,h) overiť výstup. Prípadne príkazom deconv(y,h) dostanete zase vstup.

Opis LDKI vo frekvenčnej oblasti:

Z – transformácia a jej súvis z Laplase-ovou transformáciou :

ZT najjednoduchšie odvodíme z Laplasovej transformácie, a keďže sa pohybujeme v diskrétnych oblastiach, tak miesto spojitej funkcie dosadíme navzorkovanú funkciu:

$$\mathrm{L(f(t))=F(p)}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_n X(nT_{vz})\,\delta(t-nT_{vz})\,e^{-pt}dt =$$

$$\sum_n X(nT_{vz})\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_{vz})\,e^{-pt}dt=\sum_n X(nT_{vz})\,e^{-pnT_{vz}}$$

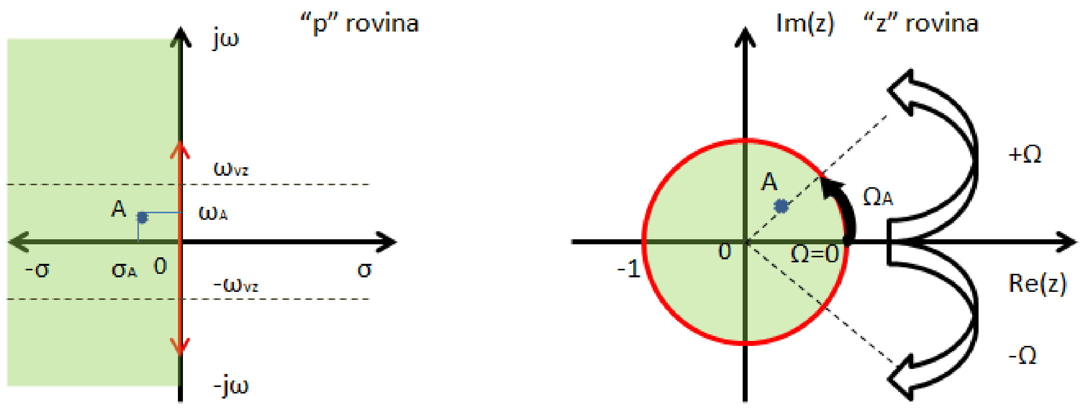
$$\mathrm{F(p)}=\sum_n X(nT_{vz})\,e^{-pnT_{vz}}$$

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot z^{-n}$$

Výraz nazývame **Z-transformáciou**, pričom všeobecne $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e^{pT_{vz}}}$, čo je aj vzťahom ktorý charakterizuje súvis medzi „p“ a „z“ rovinou

$$\mathrm{p} = \sigma + j\omega \rightarrow \mathrm{z} = e^{(\sigma+j\omega)\,T_{vz}} = e^{\sigma T_{vz}}\cdot e^{j\omega\,T_{vz}} = e^{\Sigma}\cdot e^{j\Omega}$$

Z danej rovnice vidíme že hodnoty z imaginárnej osi „p“ roviny (čiže keď σ = 0) sa premietajú na kružnicu „z“ roviny. Body vľavo od imaginárnej osi sa premietajú do kružnice „z“ roviny (podmienka stability).



Z obrázkov a vzorcov vyplýva, že otočenie v Z-rovine o $\boldsymbol{2\pi}$ je to iste ako posunutie v P-rovine o vzdialenosť $\boldsymbol{\omega_{vz}}$, čo znamená, že 1 bod v Z-rovine sa v P-rovine periodicky opakuje pozdĺž osi jω.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{vz}}\cdot 2\pi$$

Dôležitou vlastnosťou Z – transformácie je **konvolúcia.** Ak Z{x(n)} = X(z) a Z{h(n)} = H(z), potom pre signál y(n), ktorý dostaneme konvolúciou v čase:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

platí:

$$Z\{y(n)\} = Y(z) = X(z)\cdot H(z)$$

Prenosová funkcia LDKI systému H(z):

LDKI systém vo frekvenčnej oblasti môžeme opísať **prenosovou funkciou H(z)**, ktorá je definovaná ako:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M} b_k \cdot z^{-k}}$$

alebo tiež ako:

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - a_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - b_k \cdot z^{-1})}$$

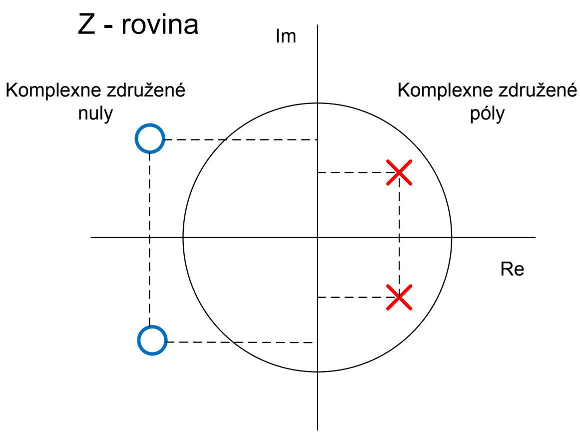
Alebo tiež ako:

$$H(z) = Z\{h(n)\}$$

Z prenosovej funkcie taktiež určujeme korene sústavy. Ich rozmiestnenie je obzvlášť dôležité pri stabilizovaní. Korene čitateľa polynómu sú tzv. **nulové body**, ciže body v ktorých hodnota sústavy nadobúda hodnotu 0. Korene v menovateli sú tzv. **póly**, a sú to body v ktorých sústava vykazuje ∞.

Z hladiska stability nás zaujímajú predovšetkým póly. Stabilné sústavy majú póly v nútri jednotkovej kružnici v Z-rovine. Ak má sústava póly na jednotkovej kružnici = sús. na hranici stability.

Pričom, ak má byť sústava realizovateľná a nejaký koreň je komplexný, tak by k nemu mala sústava obsahovať aj komplexne združený koreň.



Príklad: a) zo zadanej diferenčnej rovnice vypočítajte prenosovú funkciu H(z)

$$y(n) = x(n) + x(n-1) - y(n-2)$$

b) vypočítaj h(n) z vypočítanej z prenosovej funkcie z bodu a) a)

$y(n) = x(n) + x(n-1) - y(n-2)$ Z-transformaciou pretransformujeme rovnicu pomocou

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

Dostaneme rovnicu

$Y(z)=X(z)+X(z)z^{-1}-Y(z)z^{-2}$ poznáme že prenosová funkcia je výstup/vstup a preto rovnicu upravíme do tvaru:

$Y(z)(1+z^{-2})=X(z)(1+z^{-1})$ » $\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+z^{-2}}$ dostali sme prenosovú funkciu tejto sústavy

b)impulzovú odozvu h(n) z frekvenčnej prenosovej funkcie vypočítame tak že daný výraz podelíme

$(1+z^{-1}):(1+z^{-2})=1+z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}$...... koeficienty pred z sú impulzovou odozvou tejto sústavy h(z)=(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1....) čo vieme povedať o tejto sústave je, že je to sústava z nekonečnou odozvou na hranici stability

$-(1+z^{-2})$

$z^{-1}-z^{-2}$

$-(z^{-1}+z^{-3})$

$-z^{-2}-z^{-3}$

$-(-z^{-2}-z^{-4})$

$-z^{-3}+z^{-4}$

$-(z^{-3}+z^{-5})$

$z^{-4}-z^{-5}$

.

.

Frekvenčné charakteristiky LDKI systému

Frekvenčné charakteristiky robíme z prenosovej funkcie a to tým spôsobom, že za „z" v H(z) dosadíme výraz z = $e^{j\Omega}$. Ukážeme si to na jednoduchom príklade.

Majme zadanú diferenčnú rovnicu, pre jednoduchosť bez sp. väzby:

$$y(n) = x(n) + x(n-2)$$

$$Y(Z) = X(Z) + X(Z).z^{-2}$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = 1 + z^{-2}$$

$$H(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega 2} = e^{-j\frac{2\Omega}{2}}.(e^{j\frac{2\Omega}{2}} + e^{-j\frac{2\Omega}{2}})$$

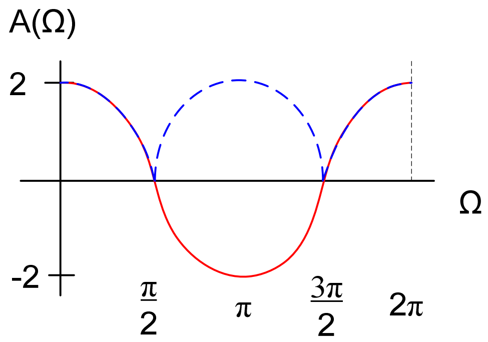
Kvôli jednoduchšiemu zakresleniu do grafu sme v tomto kroku vybrali polovicu najvyššej mocniny zo zátvorky pred ňu. Dalo by sa samozrejme postupovať aj rozložením exponentu na zložky cos/sin, ale ďalej, pokiaľ by sme chceli samotnú amplitúdovú ch. tak by sa musela z toho spraviť absolútna hodnota a to by bolo náročnejšie na vyhodnotenie.

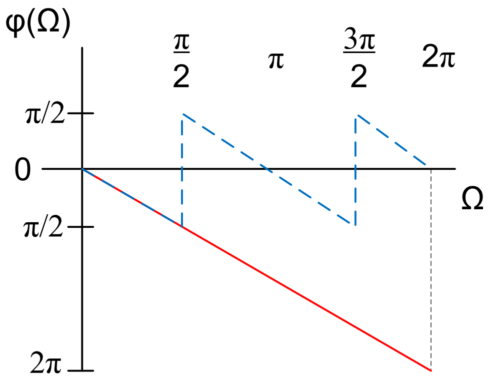
S využitím vzorcov: $cos = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ $sin = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

Dostaneme:

$$H(\Omega) = 2.e^{-j\Omega}.\frac{(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega})}{2} = 2.\cos(\Omega).e^{-j\Omega}$$

Z toho vidíme, že amplitúda: $A(\Omega) = 2.\cos(\Omega)$ a fáza : $\varphi(\Omega) = -\Omega$





Modrou je znázornená <u>magnitúdová</u> ch. $M(\Omega) = |A(\Omega)| = |H(\Omega)|$. Pri fázových charakteristikách platí, že pokiaľ ju kreslíte k amplitúdovej, tak je spojitá, pokiaľ ju kreslíte k magnitúdovej, má skokový charakter (veľkosť skoku o π) a nazývame ju <u>argumentová</u>.

Môžete si všimnúť, že znamienko + v prenosovej funkcii vykazuje po úprave *kosínusový* priebeh amplitúdovej ch. V prípade že by tam bolo znamienko – priebeh by bol *sínusový* a fázová ch. by sa posunula o uhol π/2.

Je zvykom kresliť prenosové a frekvenčné charakteristiky pri týchto systémoch po 2π, pretože ďalej sa to periodicky opakuje. Takisto si všimnite že magnitúdové ch. sa zrkadlia okolo π.

Pre úplnosť zhrnieme vzťahy pre výpočet frekvenčných charakteristík z prenosovej funkcie H(Ω):

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| \cdot e^{j\theta(\Omega)}$$

$$M(\Omega) = |H(\Omega)| = \sqrt{Re\{H(\Omega)\}^2 + Im\{H(\Omega)\}^2}$$

$$\theta(\Omega) = arctan\frac{Im\{H(\Omega)\}}{Re\{H(\Omega)\}} = \tan^{-1}\frac{Im\{H(\Omega)\}}{Re\{H(\Omega)\}}$$

$$H(\Omega) = M(\Omega) \cdot e^{j\theta(\Omega)}$$

Fázová frekvenčná charakteristika $\theta(\Omega)$ nie je spojitou funkciou Ω, ale vykazuje 180° skoky. Ak odstránime tieto skoky dostaneme fázovú frekvenčnú charakteristiku $\varphi(\Omega)$, ktorá bude spojitá. Odstránenie skokov umožní zmena znamienka pri magnitúdovej ($M(\Omega)$) frekvenčnej charakteristike vždy pri každom skoku fázovej frekvenčnej charakteristiky o 180°. Potom môžeme napísať:

$$A(\Omega) = \pm M(\Omega) \quad \text{resp.} \quad M(\Omega) = |A(\Omega)|$$

a nazývame ju amplitúdovou frekvenčnou charakteristikou. A následne môžeme označiť:

$$H(\Omega) = A(\Omega) \cdot e^{j\varphi(\Omega)}$$

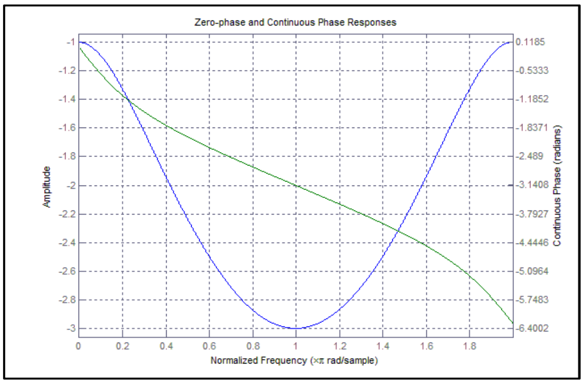
Pre ukážku tu môžete vidieť frekvenčné charakteristiky pre rôzne typy prenosových funkcii vytvorené v MATLABE pomocou príkazu FVTOOL.

Pozn. k obrázkom:

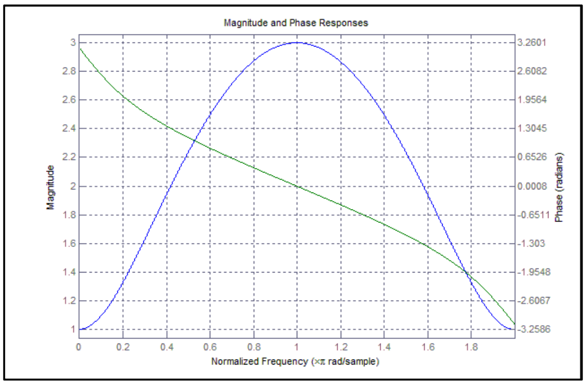
Matlab kreslí fázové charakteristiky pre $A(\Omega)$ aj $M(\Omega)$ rovnako, pretože sa ich snaží zobraziť od $-\pi$ po π.

Príklady:

1) $H(z) = 1 - 2z^{-1}$

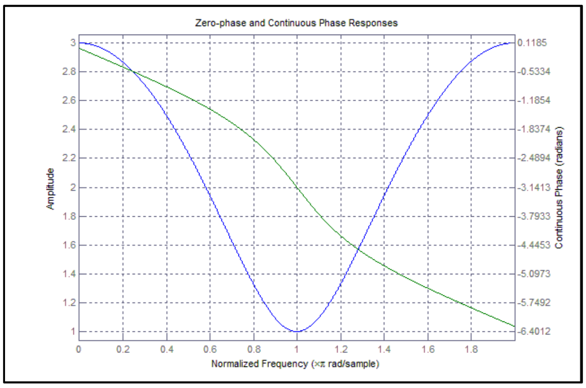


Obr. 1: Amplitúdová a fázová frekvenčná charakteristika

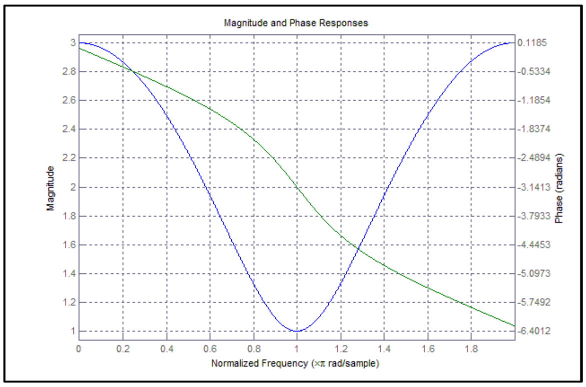


Obr. 2: Magnitúdová a argumentová frekvenčná charakteristika

2) $H(z) = 1 + 2z^{-1}$



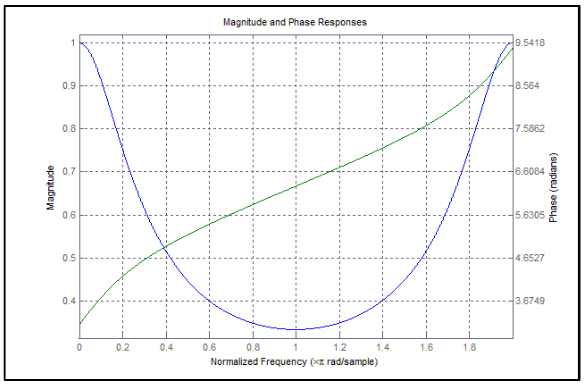
Obr. 3: Amplitúdová a fázová frekvenčná charakteristika



Obr. 4: Magnitúdová a argumentová frekvenčná charakteristika

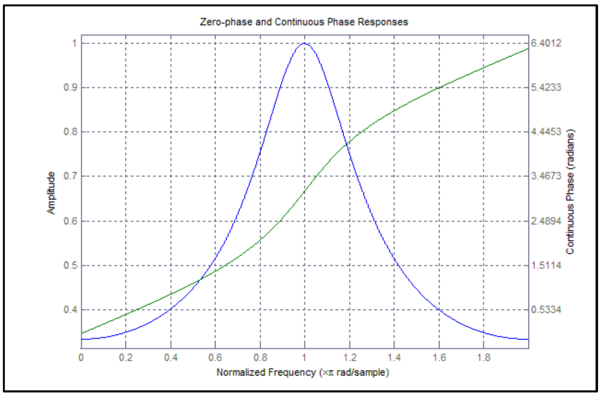
3) $H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$

Obr. 5: Amplitúdová a fázová frekvenčná charakteristika

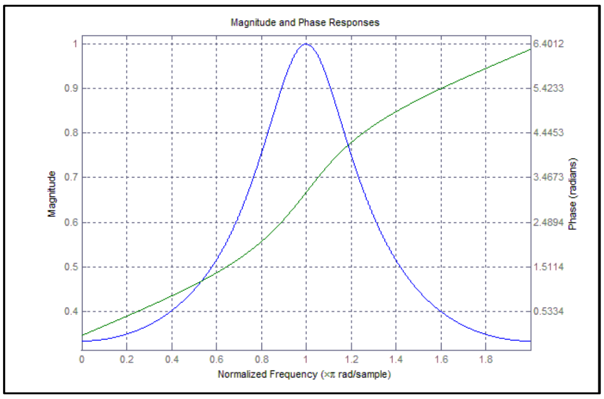


Obr. 6: Magnitúdová a argumentová frekvenčná charakteristika

4) $H(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}}$

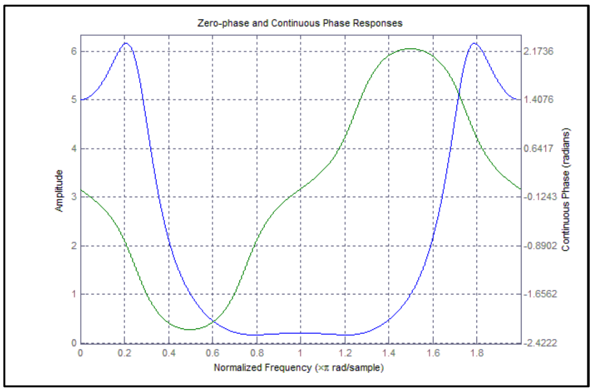


Obr. 7: Amplitúdová a fázová frekvenčná charakteristika

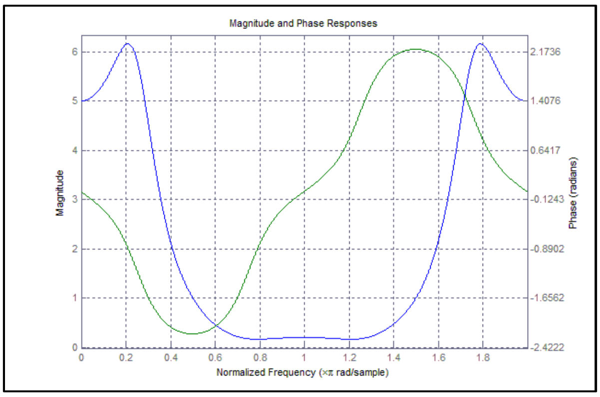


Obr. 8: Magnitúdová a argumentová frekvenčná charakteristika

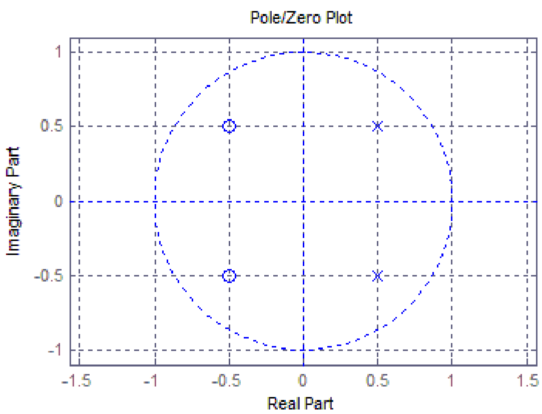
5) $H(z) = \frac{1+z^{-1}+0{,}5z^{-2}}{1-z^{-1}+0{,}5z^{-2}}$



Obr. 9: Amplitúdová a fázová frekvenčná charakteristika



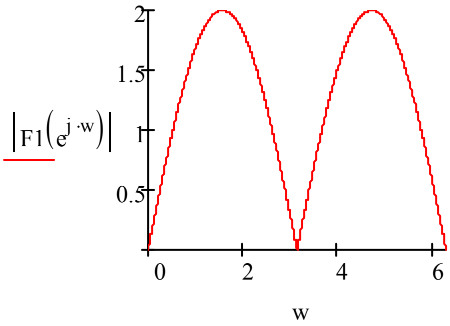
Obr. 10: Magnitúdová a argumentová frekvenčná charakteristika

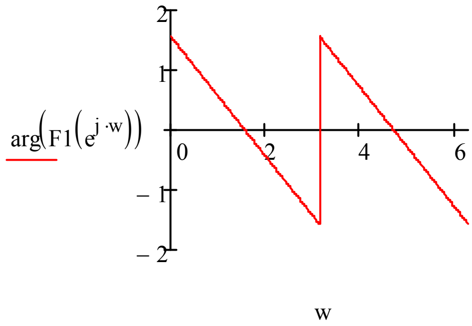


Obr. 11: Rozloženie koreňov prenosovej funkcie v Z rovine

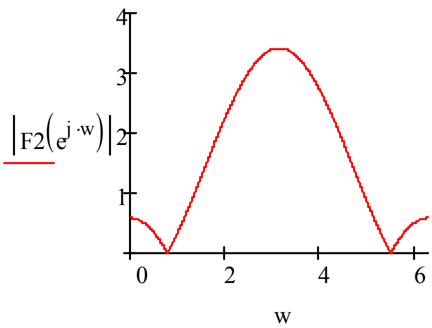
Ďalšie ukážky jednoduchých a názorných prenosových funkcii pomocou MathCAD-u.

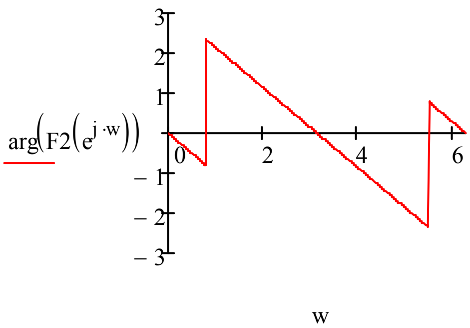
$$F1(z) = 1 - z^{-2}$$



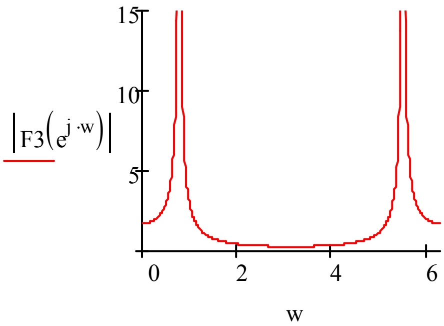


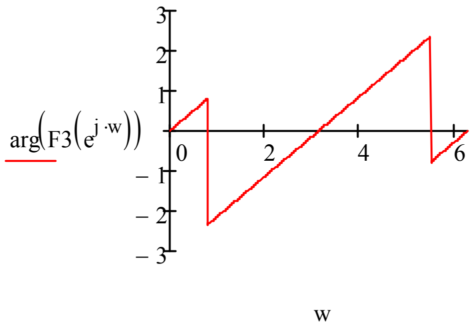
$$F2(z) = (1 - e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot z^{-1})$$





$$F3(z) = \frac{1}{(1 - e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot z^{-1})}$$





$$F4(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-2}}$$