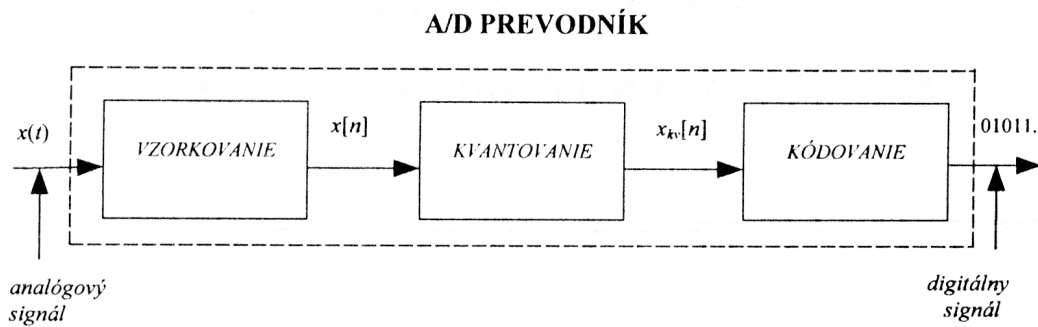


# Číslicové spracovanie signálov

## Otázky na skúšku

### 1. Základná bloková schéma A/Č prevodu a jej opis.



**Vzorkovanie** - Vzorkovanie signálu je konverzia signálu spojitého v čase na signál diskretný v čase vytvorením vzoriek z analógového signálu diskretnou časovou konštantou  $T$  - periódou vzorkovania. Signál  $x(t)$  je vstupným signálom do vzorkovača a výstupný signál je  $x[nT] \equiv x[n]$ , kde  $T$  je perióda vzorkovania.

**Kvantovanie** - Kvantovanie signálu je konverzia signálu diskretného v čase so spojitými hodnotami na signál diskretný v čase s diskretnými hodnotami. Hodnota každej vzorky signálu je reprezentovaná hodnotou vybranou z konečnej množiny hodnôt. Rozdiel medzi nekvantovanou vzorkou  $x[n]$  a kvantovanou výstupnou vzorkou  $x_{kv}[n]$  sa nazýva chyba kvantovania.

**Kódovanie** - V procese kódovania signálu je každá diskretná hodnota  $x_{kv}[n]$  reprezentovaná kódovou skupinou.

## 2. Vzorkovacia teoréma, ideálne vzorkovanie (časové a frekvenčné priebehy).

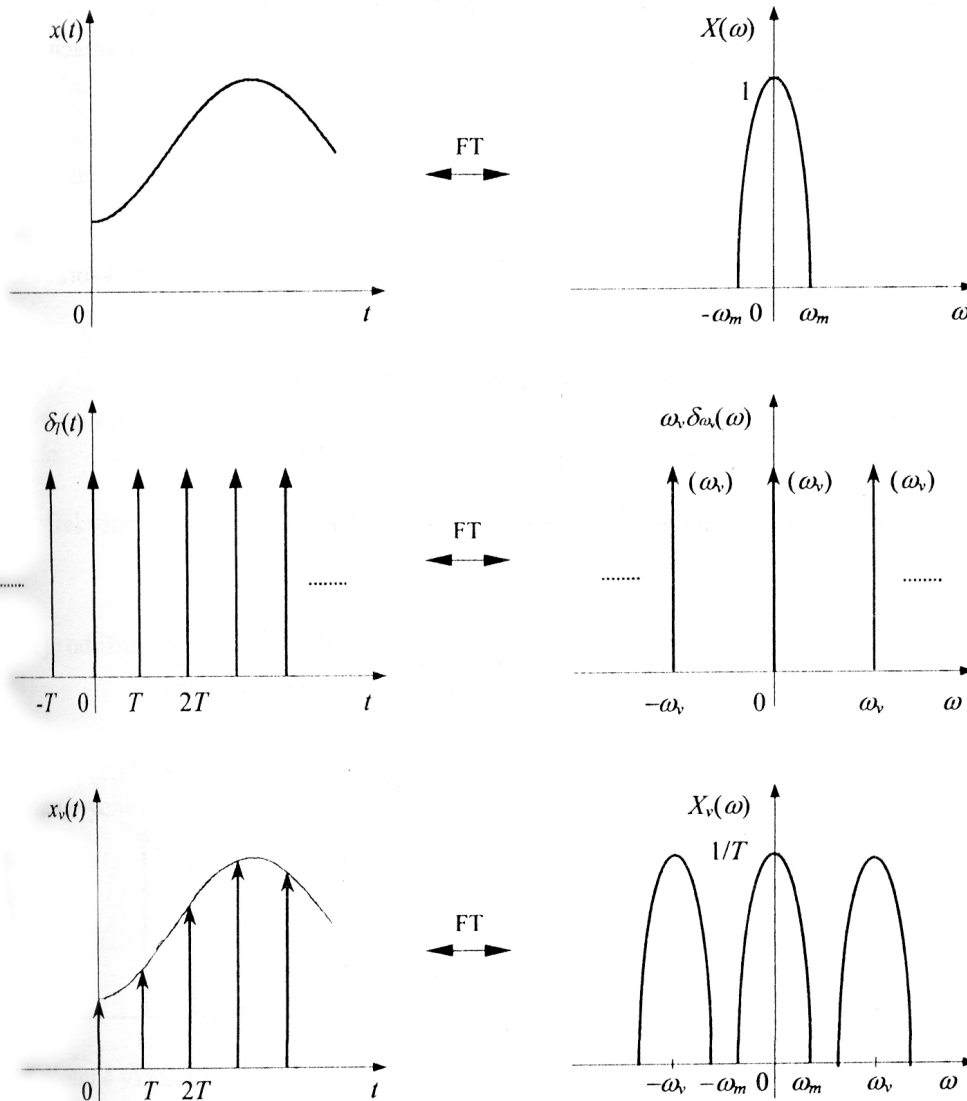
Každý časový priebeh  $x(t)$ , ktorého modulové frekvenčné spektrum je frekvenčne zhora obmedzené kruhovou frekvenciou  $\omega_m = 2\pi f_m$  (nad touto frekvenciou je modulové frekvenčné spektrum spojitého signálu nulové)

$$X(\omega) = \begin{cases} \text{definované} & \text{pre } |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{pre } |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

je jednoznačne určený svojimi hodnotami odoberanými v rovnomerných časových intervaloch

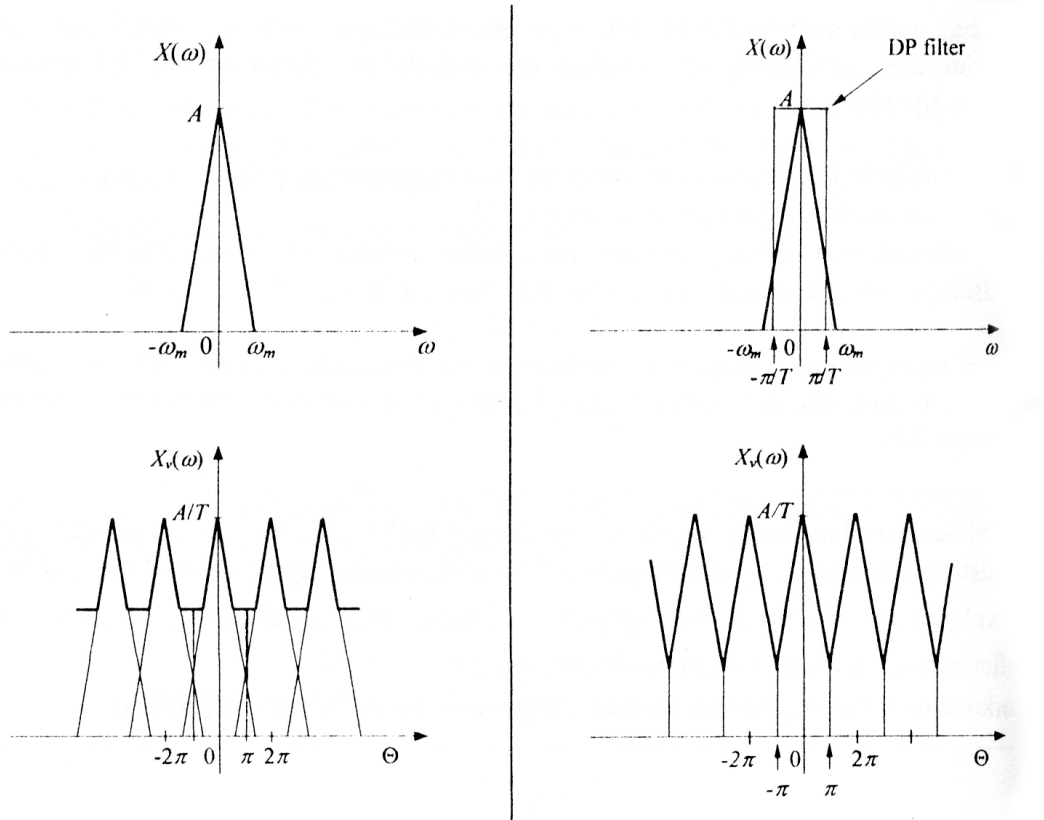
$$T \leq \frac{1}{2f_m},$$

kde  $T$  je perióda vzorkovania.



### 3. Vzorkovanie frekvenčne obmedzeného signálu pod Niquistovou rýchlosťou, priebehy.

$f_v < 2f_m$  - Ak frekvenčne obmedzený signál je vzorkovaný rýchlosťou menšou než je Nyquistova rýchlosť, potom je tvar FT vzorkovaného signálu v rozsahu  $\Theta \in (-\pi; \pi)$  skreslený vzhľadom na FT pôvodného signálu. Toto skreslenie sa nazýva aliasing, ktoré je spôsobené prekrytím jednotlivých spektier. Pomocou DP filtra s pásmom prepúšťania  $\omega \in \langle 0; \omega_v/2 \rangle$  potlačíme časť modulového frekvenčného spektra  $X(\omega)$  analógového signálu.



2.9 Spektrum vzorkovaného signálu pri  $f_v < 2f_m$  Obr. 2.10 Použitie DP filtra pri vzorkovaní  $f_v < 2f_n$

#### 4. Vzorkovanie úzkopásmového signálu, perióda vzorkovania, frekvenčné charakteristiky.

Uvažujme úzkopásmový signál, ktorého spektrum je nenulové len v intervale  $\omega \in \langle \omega_d, \omega_h \rangle$ .

Pre spektrálnu hustotu tohto signálu platí:

$$\bar{X}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{pre } |\omega| > |\omega_h| \cap |\omega| < |\omega_d| \\ \text{def} & \text{pre } \omega_d < |\omega| < \omega_h \end{cases}$$

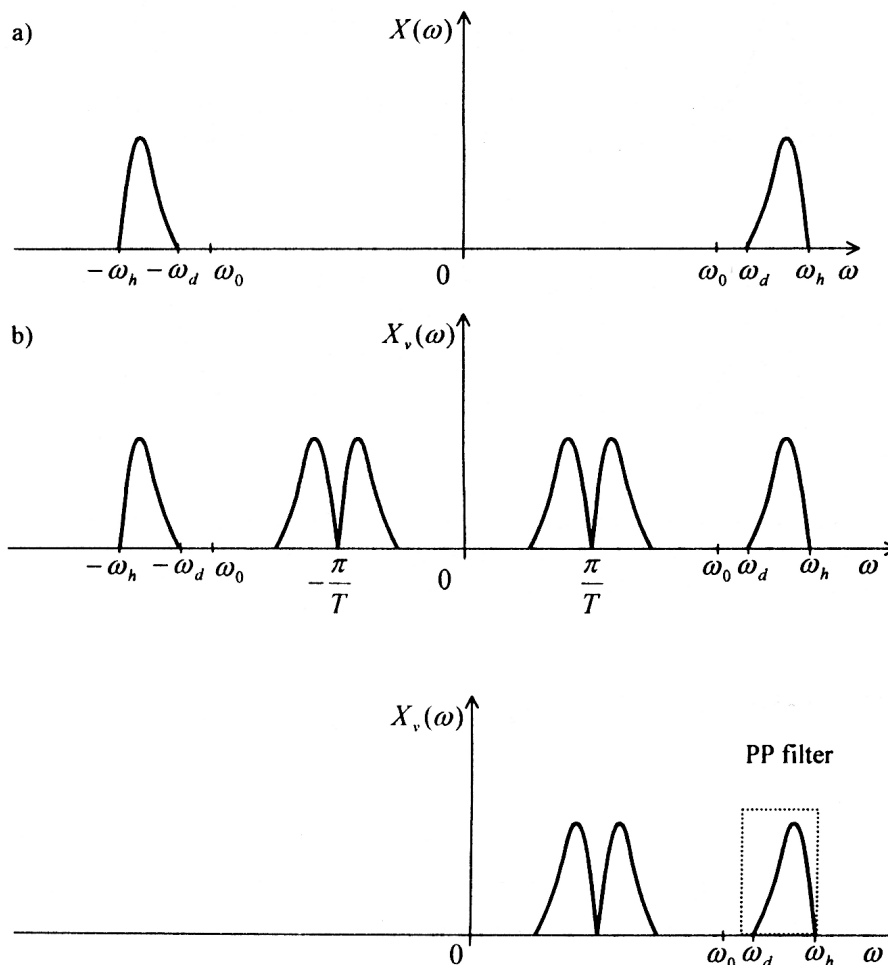
V tomto prípade možno pri použití pásmového priepustu voliť vzorkovaciu frekvenciu nižšiu ako  $2\omega_h$ , ktorá zodpovedá podmienke vzorkovacej teóremy, ak platí pre šírku spektra:

$$B = \omega_h - \omega_d < \omega_d$$

$L$  si volíme ako celočíselný násobok šírky pásma  $L \leq \frac{\omega_h}{\omega_h - \omega_d}$

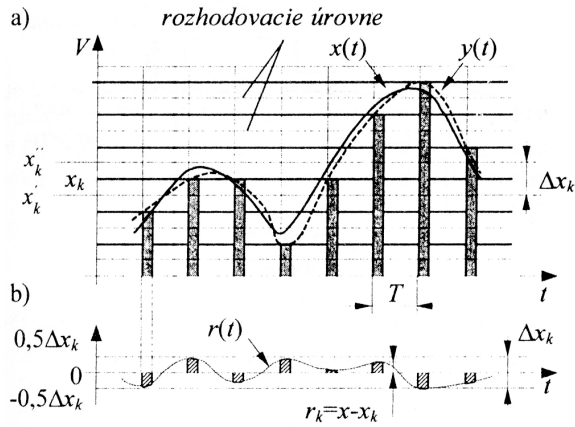
Signál možno vzorkovať intervalom:  $T = \frac{\pi[\omega_h/(\omega_h - \omega_d)]}{\omega_h}$ ,

ktorý sa málo líši od  $\pi/(\omega_h - \omega_d)$  ak platí, že  $\omega_h \gg (\omega_h - \omega_d)$ . Pre oddelenie pôvodného spektra úzkopásmového signálu treba použiť pásmový priepust.

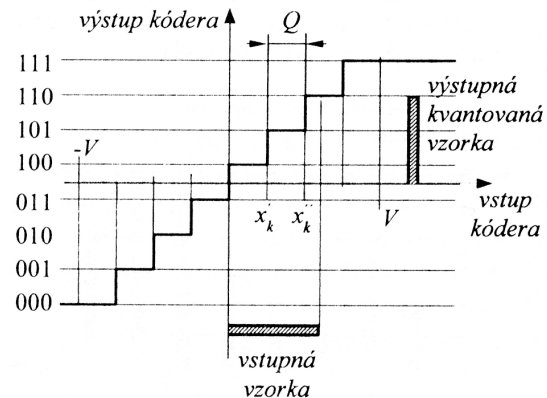


## 5. Kvantovanie a kódovanie vzoriek.

Kvantovanie signálu je operácia, pomocou ktorej transformujeme spojité signál na signál diskretný v okamžitých hodnotách. Operácie kvantovania a kódovania sa bežne realizujú kóderom.



Obr. 2.29 a) Kvantovanie vzorkovaného signálu, b) kvantizačný šum



Obr. 2.30 Prevodová charakteristika lineárneho kóderu

Celkový rozsah možných veľkostí vzoriek 0 až  $V$  je rozdelený na konečný počet kvantizačných stupňov šírky  $\Delta x_k$ . Každý kvantizačný stupeň je vymedzený rozhodovacími úrovňami  $x'_k$ ,  $x''_k$  a je reprezentovaný kvantizačnou hodnotou  $x_k$ . Všetky vzorky, ktorých veľkosti sú napr. v  $k$ -tom kvantizačnom stupni, sú pri kvantovaní vyjadrené jedinou kvantovanou hodnotou  $x_k$ . Ak všetky kvantizačné stupne majú rovnakú veľkosť  $Q$ , potom hovoríme o lineárnom kvantovaní. Získaný signál je odolný voči šumu, ale skresľuje pôvodný signál.

**Kvantizačný šum**  $r(t) = x_{kv}(t) - x(t)$

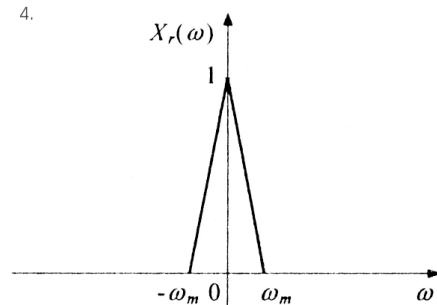
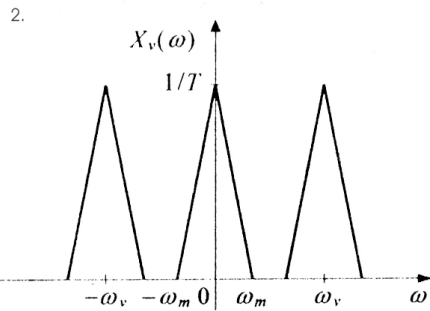
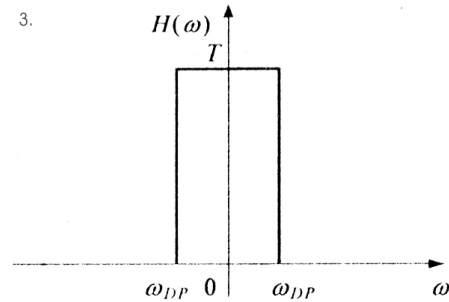
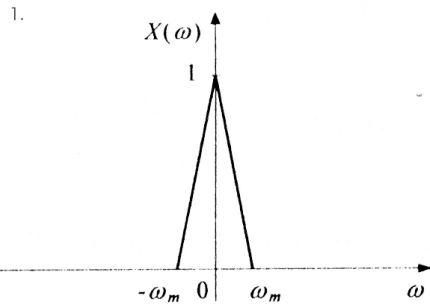
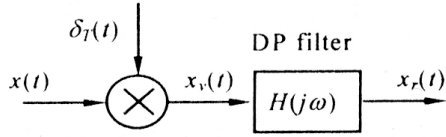
**Činiteľ kvantizačného skreslenia**  $k_{kv} = \frac{R_{ef}}{X_{ef}}$

**Stredná kvadratická chyba**  $R_{ef} = \sigma_r = \frac{Q}{\sqrt{12}}$

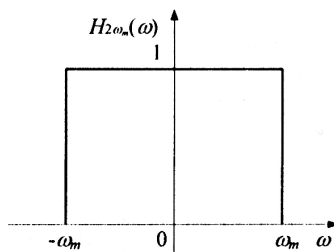
**Odstup signálu od šumu**  $H_{kv} = p_s - p_v + 4,77 + 6n$

## 6. Rekonštrukcia analógového signálu.

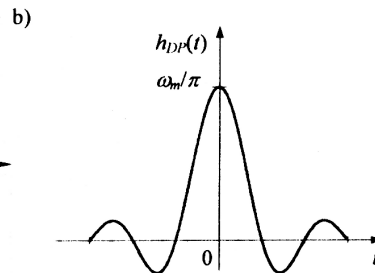
Pôvodný analógový signál  $x(t)$  možno rekonštruovať spracovaním vzorkovaného signálu  $x_v(t)$  cez DP filter s medznou frekvenciou  $\omega_m \leq \omega_{DP} \leq \omega_v - \omega_m$ . Uvažujme, že spojitý signál  $x(t)$  je vzorkovaný minimálnou požadovanou periódou vzorkovania.



$$H_{2\omega_m}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pre } |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{pre } |\omega| > \omega_m \end{cases}$$



FT



Frekvenčne obmedzený signál  $x(t)$ , ktorého šírka pásma je menšia než  $\pm\pi/T$ , môže byť presne rekonštruovaný z jeho vzoriek  $x[nT]$  pre  $n \in (-\infty; \infty)$  použitím vzťahu

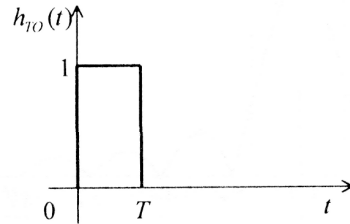
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] \text{si}[\omega_m(t - nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT] \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

## 7. Tvarovací obvod nultého rádu, impulzová charakteristika, frekvenčné charakteristiky.

Tvarovací obvod nultého rádu je systém, ktorý pre danú vstupnú vzorku  $x[n]$  udržuje konštantný výstup s hodnotou  $x[n]$  v časovom intervale  $\{nT; (n+1)T\}$ , potom sa nuluje a nastaví sa do východiskovej polohy výstupu. Pre výstupný signál TO platí:

$$\tilde{x}(t) = x[n] \text{ pre } nT \leq t \leq (n+1)T$$

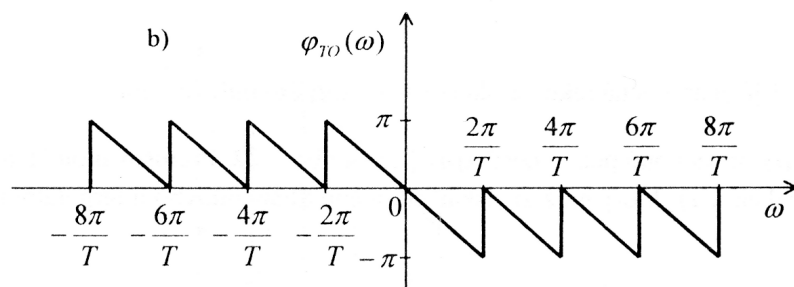
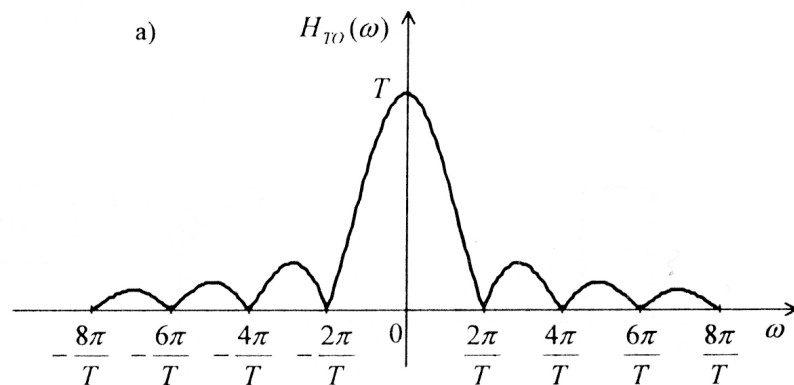
### Impulzová charakteristika TO nultého rádu



$$h_{TO}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t \in (0, T) \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

### Frekvenčná charakteristika TO nultého rádu

$$\bar{H}_{TO}(\omega) = \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \operatorname{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j0,5\omega T}$$



Frekvenčné charakteristiky TO nultého rádu: a) modulová, b) fázová

## 8. Základné vlastnosti a typy signálov diskretných v čase.

### a) Energetické a výkonové signály

Normovaná energia:  $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

Normovaný stredný výkon:  $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$

### b) Periodické a neperiodické signály

Signál  $x[n]$  je periodický s periódou  $N$  ( $N > 0$ ), ak platí

$$x[n] = x[n + kN] \quad \text{pre všetky } n$$

Normovaný stredný výkon periodického signálu:  $P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$

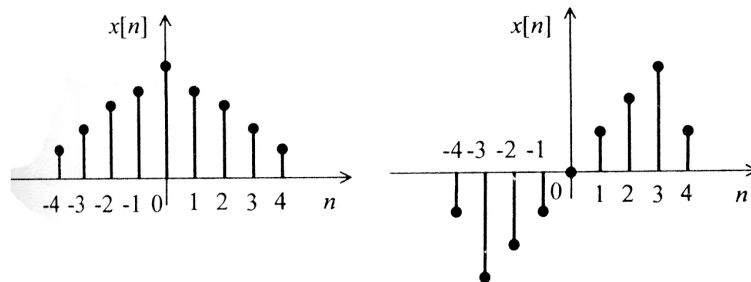
### c) Symetrické (párne) a nesymetrické (nepárne) signály

Reálny signál diskretný v čase sa nazýva symetrický (párny), ak platí

$$x[n] = x[-n] \quad \text{pre všetky } n$$

Reálny signál diskretný v čase sa nazýva antisymetrický (nepárny), ak platí

$$x[n] = -x[-n] \quad \text{pre všetky } n$$



#### 1. Jednotkový impulz $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = 0 \\ 0 & \text{pre } n \neq 0 \end{cases}$$

#### 2. Jednotkový diskretný skok $\sigma[n]$

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1 & \text{pre } n \geq 0 \\ 0 & \text{pre } n < 0 \end{cases}$$

#### 3. Diskretná lineárna postupnosť $r[n]$

$$r[n] = n\sigma[n] \quad \text{pre } n \geq 0$$

#### 4. Reálna exponenciálna postupnosť

$$x[n] = a^n$$



### 5. Sínusová postupnosť

$$x[n] = A_0 \sin(\omega_0 n + \varphi_0) \quad \text{pre všetky } n$$

### 6. Komplexná exponenciálna postupnosť

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

### 7. Pravouhlá postupnosť

$$p_{2N+1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pre } |n| \leq N \\ 0 & \text{pre } |n| > N \end{cases}$$

### 9. Diskrétna konvolúcia a korelácia, vlastnosti, princíp výpočtu.

**Diskrétna konvolúcia** dvoch konečných a kauzálnych postupností  $x[n]$  a  $y[n]$  je definovaná sumáciou

$$r[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k] \quad \text{alebo} \quad r[n] = \sum_k x[k]y[n-k],$$

pričom dolná a horná hranica sumácie závisí od konkrétnej dĺžky jednotlivých postupností  $x[n]$  a  $y[n]$ . Pre zjednodušenie zápisu sa vyjadruje v tvare  $r[n] = x[n] * y[n]$

Konvolučný súčin predstavuje štyri matematické operácie:

1. zrkadlové otočenie (rotáciu) postupnosti  $y[k]$  okolo zvislej osi  $\Rightarrow y[-k]$
2. posunutie (transláciu) otočenej postupnosti  $y[k]$  o argument  $n \Rightarrow y[n-k]$
3. vynásobenie posunutej postupnosti  $y[n-k]$  postupnosťou  $x[k] \Rightarrow x[k]y[n-k]$
4. sumáciu pre dané  $n \Rightarrow \sum_k x[k]y[n-k]$ .

Pre diskrétnu konvolúciu platí komutatívny, distributívny a asociatívny zákon. Dĺžka výsledku konvolúcie je závislá od dĺžok jednotlivých postupností:  $D_r = D_x + D_y - 1$ .

**Diskrétna vzájomná korelácia** postupnosti  $x[n]$  a  $y[n]$  je definovaná vzťahom

$$z_{xy}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n-k] \quad \text{alebo} \quad z_{xy}[k] = \sum_k x[n]y[n-k]$$

**Diskrétna autokorelácia postupnosti**  $x[n]$  má tvar

$$z_x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n-k] \quad \text{alebo} \quad z_x[k] = \sum_n x[n]x[n-k]$$

Korelácia predstavuje tri matematické operácie:

1. posunutie (transláciu) otočenej postupnosti  $y[n]$  o argument  $k \Rightarrow y[n-k]$
2. vynásobenie posunutej postupnosti  $y[n-k]$  postupnosťou  $x[n] \Rightarrow x[n]y[n-k]$
3. sumáciu pre dané  $n \Rightarrow \sum_n x[n]y[n-k]$ .

## 10. Transformácia Z, Fourierova transformácia signálov diskretných v čase, základné vlastnosti.

Ak je daná kauzálna postupnosť  $x[n]$ , potom jej transformácia Z, označená ako  $X(z)$ , je definovaná

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

kde  $z$  je komplexná premenná.

Vyjadrením komplexnej premennej  $z$  v polárnom tvare dostaneme

$$z = re^{j\Theta}$$

Postupnosť nazývame postupnosťou schopnou transformácie Z, ak rad konverguje aspoň pre jedno  $z$ .

**Spätná transformácia Z pomocou integrácie:**

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz & \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{pre } n < 0 \end{cases}$$

Riešenie: metóda rezíduí, rozvoj na parciálne zlomky, rozvoj do mocninového radu.

**FTD**

$$X(e^{j\Theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Theta}$$

**IFTD**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Theta})e^{jn\Theta}d\Theta$$

**Existencia FTD**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = M < \infty$$

**Základné vlastnosti FTD:**

1. linearita  $ax[n] + by[n] \mapsto aX(e^{j\Theta}) + bY(e^{j\Theta})$
2. časové posunutie  $x[n - n_0] \mapsto e^{-jn_0\Theta} X(e^{j\Theta})$
3. frekvenčné posunutie  $e^{jn_0\Theta} x[n] \mapsto X(e^{j(\Theta - \Theta_0)})$
4. časové otočenie  $x[(-n)] \mapsto X(e^{-j\Theta})$
5. časová konvolúcia  $x[n] * y[n] \mapsto X(e^{j\Theta})Y(e^{j\Theta})$
6. frekvenčná konvolúcia  $x[n]y[n] \mapsto \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Theta})Y(e^{j\Theta})$

**11. Priama a inverzná transformácia DFT, základné vlastnosti, vkladanie nulových bodov a pólov v časovej a vo frekvenčnej oblasti.**

**DFT**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, N-1$$

**IDFT**

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{pre } n = 0, 1, \dots, N-1$$

**Činiteľ natočenia**

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi/N) - j \sin(2\pi/N)$$

**Základné vlastnosti DFT:**

1. linearita  $ax[n] + by[n] \mapsto aX[k] + bY[k]$
2. časové posunutie  $x[n - n_0] \mapsto W_N^{kn_0} X[k]$
3. frekvenčné posunutie  $W_N^{-nl} x[n] \mapsto X[(k - l)]$
4. časová konvolúcia  $x[n] * y[n] \mapsto X[k]Y[k]$
5. frekvenčná konvolúcia  $x[n]y[n] \mapsto \frac{1}{N} X[k] * Y[k]$

**Vkladanie nulových bodov v časovej oblasti:**

Pridáme M-N nulových bodov na koniec danej postupnosti a týmto spôsobom vytvoríme postupnosť dĺžky M. DFT novej postupnosti má potom M frekvenčných bodov.

Označme novú postupnosť s M bodmi v tvare:

$$x_a[n] = \begin{cases} x[n] & \text{pre } n \in \langle 0; N-1 \rangle \\ 0 & \text{pre } n \in \langle N; M-1 \rangle \end{cases}$$

Vypočítame DFT postupnosti  $x_a[n]$

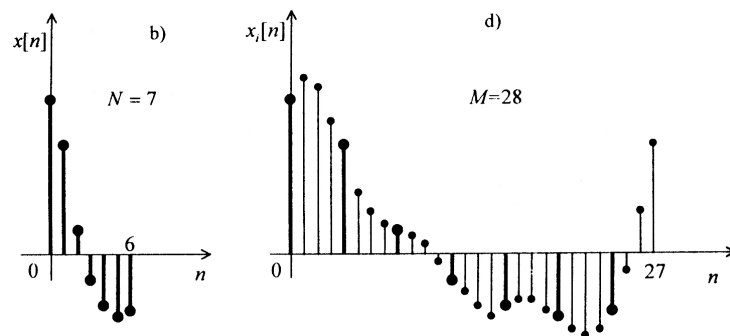
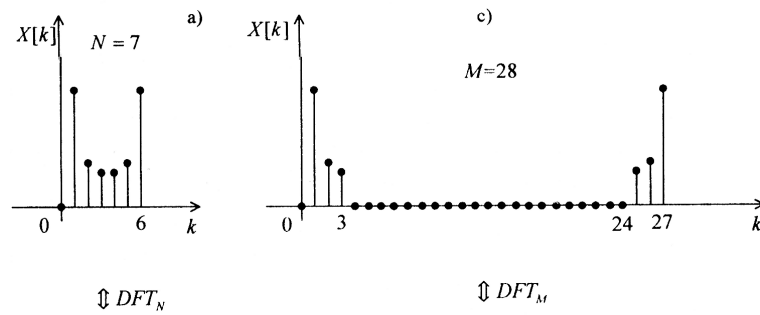
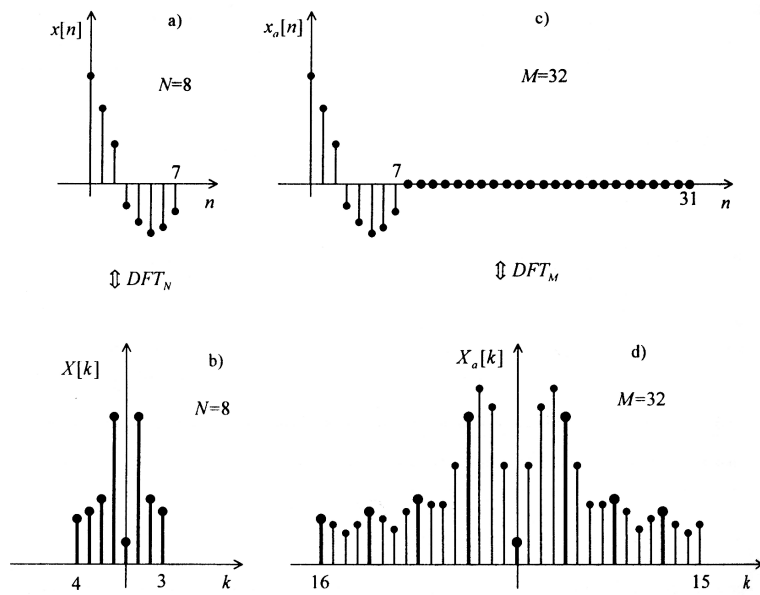
$$X_a[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x_a[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{M-1} x_a[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{M}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{M}} = X(e^{j\Theta[k]})$$

kde  $\Theta[k] = \frac{2\pi k}{M}$  pre  $k \in \langle 0; M-1 \rangle$ .

Metóda vkladania nulových bodov sa používa na zlepšenie kontinuity zobrazenia frekvenčnej charakteristiky.

**Vkladanie nulových bodov vo frekvenčnej oblasti:**

Nulové body pridávame tak, aby frekvenčná oblasť bola symetrická. Interpolovaný signál je mierne zvlhnený, čo je spôsobené interpolačnou funkciou.



## 12. FFT algoritmus - decimácia v čase pre $N = 4$ , postup výpočtu, orientovaný graf.

Vo FFT sa využívajú základné vlastnosti činiteľa natočenia  $W_N$ :

a) *periodicita v  $k$ ,  $n$* :  $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$

b) *komplexná symetria*:  $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$

c):  $W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn} \Rightarrow W_N^{kn} = 1$

Algoritmus, v ktorom je rozklad založený na rozložení postupnosti  $x[n]$  do postupne menších postupností, sa nazýva algoritmus decimácie v čase. Princíp je v tom, že postupnosť  $x[n]$  rozdelíme na dve časti: na párnú a nepárnu časť. Majme postupnosť vzoriek  $x[n]$  pre  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Zodpovedajúce spektrum je dané:

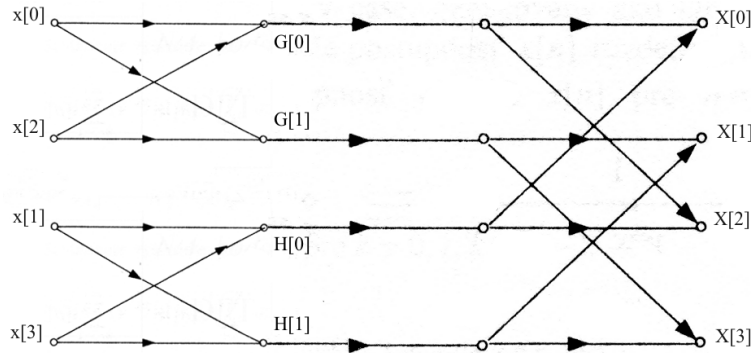
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Rozdelíme na párne a nepárne:

$$X[k] = \sum_{n-\text{párne}} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n-\text{nepárne}} x[n]W_N^{kn}$$

Substitúciou premennej  $n = 2r$  pre  $n$ -párne a  $n = 2r + 1$  pre  $n$ -nepárne dostaneme:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k} = \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r](W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1](W_N^2)^{rk} = \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk} = G[k] + W_N^k H[k] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} X[0] &= G[0] + W_N^0 H[0] & G[0] &= x[0] + W_{N/2}^0 x[2] \\ X[1] &= G[1] + W_N^1 H[1] & G[1] &= x[0] + W_{N/2}^1 x[2] \\ X[2] &= G[0] + W_N^2 H[0] & H[0] &= x[1] + W_{N/2}^0 x[3] \\ X[3] &= G[1] + W_N^3 H[1] & H[1] &= x[1] + W_{N/2}^1 x[3] \end{aligned}$$

### 13. Základné vlastnosti lineárnej diskkrétnej sústavy, opis diferenčnou rovnicou a jej riešenie.

1. **Linearita:** Diskrétna sústava je lineárna, ak platí princíp superpozície a proportionality. Ak

$$x_1[n] \mapsto y_1[n] \quad \text{a} \quad x_2[n] \mapsto y_2[n],$$

potom

$$ax_1[n] + bx_2[n] \mapsto ay_1[n] + by_2[n]$$

2. **Časová invariancia:** Diskrétna sústava je časovo invariantná, ak vstupný signál  $x[n - i]$  vyvolá odozvu  $y[n - i]$ :

$$x[n - i] \mapsto y[n - i], \quad \text{kde } i \text{ je celé číslo}$$

3. **Stabilita:** Diskrétna sústava je stabilná, ak ľubovoľný obmedzený vstupný signál  $x[n]$  s konečnou amplitúdou vyvolá obmedzený výstupný signál  $y[n]$  s konečnou amplitúdou.

4. **Kauzalita:** Diskrétna sústava je kauzálna, ak vstupný signál  $y[n]$  v čase  $n = n_0$  je závislý iba od hodnôt vstupného signálu  $x[n]$  pre všetky  $n \leq n_0$ .

#### Diferenčná rovnica a jej riešenie:

$$\sum_{k=0}^M a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n - k],$$

kde  $a_k, b_k$  sú konštantné koeficienty a  $n, k$  sú celé čísla. Riešenie rovnice sa skladá z dvoch častí:

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n],$$

kde  $y_1[n]$  je riešenie lineárnej diferenčnej rovnice bez pravej strany a  $y_2[n]$  je riešenie lineárnej diferenčnej rovnice s pravou stranou. Najskôr nájdeme riešenie  $y_1[n]$  lineárnej homogénnej diferenčnej rovnice, t. j. rovnice bez pravej strany, čo fyzikálne znamená hľadanie odozvy LDI sústavy bez budiaceho signálu ( $x[n] = 0$ )

$$y_1[n] = \sum_{k=1}^M c_k z_k^n,$$

kde  $c_k$  je konštanta určená z počiatočných podmienok konkrétnej LDI sústavy.

Druhé riešenie  $y_2[n]$  dostaneme, ak je známy tvar postupnosti  $x[n]$ , t. j. tvar budiaceho signálu. Potom úplne riešenie diferenčnej rovnice je

$$y[n] = \sum_{k=1}^M c_k z_k^n + y_2[n]$$

kde zložka  $y_2[n]$  predstavuje vnútenú odozvu systému.

**14. Prenosová funkcia a základné časové a frekvenčné charakteristiky LDI sústav, vzájomný vzťah.**

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y[n]\}}{\mathcal{Z}\{x[n]\}}$$

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}$$

$$H(e^{j\Theta}) = \frac{Y(e^{j\Theta})}{X(e^{j\Theta})} = \frac{\mathcal{F}\{y[n]\}}{\mathcal{F}\{x[n]\}} = H(\Theta)e^{j\varphi(\Theta)},$$

kde  $H(\Theta)$  je modulová frekvenčná charakteristika a  $\varphi(\Theta)$  je fázová frekvenčná charakteristika LDI sústavy,  $c_k$  sú nulové body a  $d_k$  sú póly.

***Frekvenčné charakteristiky prenosovej funkcie majú tieto základné vlastnosti:***

1. Modulová frekvenčná charakteristika  $H(\Theta)$  a fázová frekvenčná charakteristika  $\varphi(\Theta)$  sú spojité periodické funkcie s periódou  $\Theta = 2\pi$ .

2. Modulová frekvenčná charakteristika  $H(\Theta)$  je párna funkcia, ktorá má pri  $\Theta = 0$  a  $\Theta = \pi$  extrémny.

3. Fázová frekvenčná charakteristika  $\varphi(\Theta)$  je nepárna funkcia, ktorá nemá v bodoch  $\Theta = 0$  a  $\Theta = \pi$  extrémny, ale má plynulé alebo skokové prechody s prípadnou zmenou znamienka.

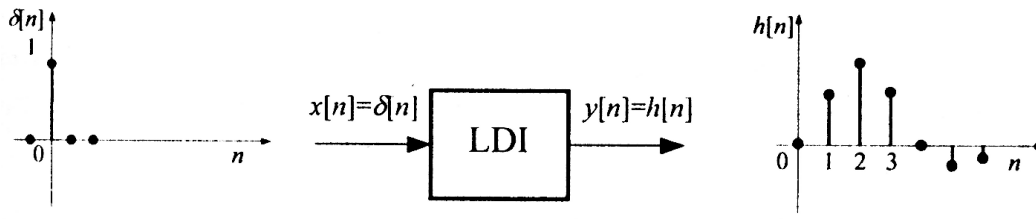
***Časové charakteristiky LDI sústavy:***

Pre opísanie vlastností sú vhodné odozvy sústavy buď na jednotkový impulz  $\delta[n]$ , alebo na jednotkovú skokovú postupnosť  $\sigma[n]$ .

## 15. Impulzová charakteristika LDI sústav a jej využitie, rozdelenie LDI sústav.

Impulzová charakteristika opisuje vlastnosti LDI sústavy v časovej oblasti. U LDI sústav sa preferuje odozva  $h[n]$  na jednotkový impulz  $\delta[n]$ . LDI sústava je kauzálna vtedy a len vtedy, keď jej impulzová charakteristika je nulová pre všetky hodnoty  $n < 0$ :

$$h[n] = 0 \quad \text{pre } n < 0$$



a) LDI sústavy s konečnou impulzovou charakteristikou - FIR sústavy (bez SV)

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \quad \text{pre } a_0 = 1$$

Impulzová charakteristika má konečný počet členov:

$$h[n] = \begin{cases} b_n & \text{pre } n \in \langle 0; N \rangle \\ 0 & \text{pre } n > N \end{cases}$$

Výstupný signál závisí iba od  $N + 1$  vzoriek vstupného signálu  $x[n]$ , pričom  $N$  je rád LDI sústavy a  $(N + 1)$  je dĺžka LDI sústavy.

b) LDI sústavy s nekonečnou impulzovou charakteristikou - IIR sústavy (so SV)

Výstupný signál závisí aj od predchádzajúcich vzoriek výstupného signálu  $y[n-k]$ . Diferenčná rovnica IIR sústav má tvar:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k] \quad \text{pre } a_0 = 1$$

kde  $x[n-k]$  predstavuje oneskorenú vzorku vstupného signálu,  $y[n-k]$  predstavuje oneskorenú zložku výstupného signálu,  $a_k$ ,  $b_k$  sú váhové koeficienty vstupného a výstupného signálu.

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$$



## 16. Opis LDI sústavy pomocou nulových bodov a pólov, výpočet frekvenčných charakteristík pre danú číslicovú frekvenciu.

Z diferenčnej rovnice dostaneme zodpovedajúcu prenosovú funkciu pre  $a_0 = 1$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^N (z - c_k)}{\prod_{k=1}^M (z - d_k)} z^{M-N},$$

kde  $c_k$  sú nulové body prenosovej funkcie,  $d_k$  sú póly prenosovej funkcie.

Ak koeficienty  $a_k, b_k$  sú reálne, potom nulové body a póly môžu byť len reálne alebo komplexne združené. Stabilná LDI sústava má všetky póly prenosovej funkcie  $H(z)$  vnútri jednotkovej kružnice  $|z| = 1$ . Nulové body môžu ležať vnútri, mimo alebo na jednotkovej kružnici. Vzťah medzi opisom nulových bodov a pólov a frekvenčnou charakteristikou prenosovej funkcie  $H(z)$  pre normovanú kruhovú frekvenciu  $\Theta = \Theta_0$ :

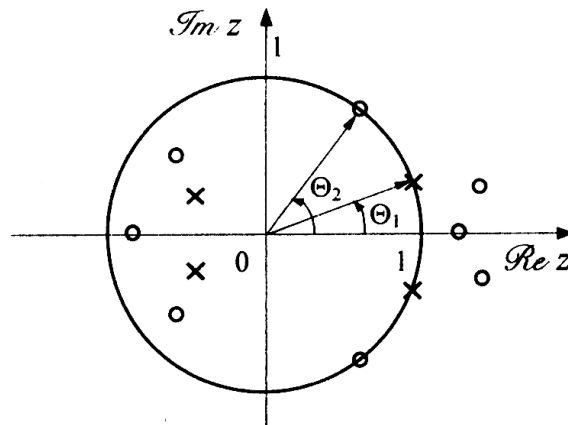
Hodnota modulovej frekvenčnej charakteristiky  $H(\Theta_0)$  je určená ako súčin všetkých vzdialeností medzi bodom  $z = e^{j\Theta_0}$  a nulovými bodmi, ktorý je delený súčinom všetkých vzdialeností medzi  $z = e^{j\Theta_0}$  a pólmi.

Hodnotu fázovej frekvenčnej charakteristiky  $\varphi(\Theta_0)$  určíme súčtom všetkých fázových príspevkov nulových bodov a odčítaním všetkých fázových príspevkov pólov.

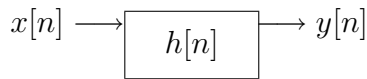
Za predpokladu  $b_0 = 1$  platí:

$$H(\Theta_0) = \frac{R_1 R_2}{R_3 R_4}, \quad \varphi(\Theta_0) = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4.$$

Ak všetky nulové body stabilnej LDI sústavy ležia vnútri jednotkovej kružnice, hovoríme o sústave s minimálnou fázovou frekvenčnou charakteristikou. Zrkadlovým otočením nulových bodov okolo jednotkovej kružnice získame sústavu s neminimálnou FFCH, ktorá má rovnakú modulovú FCH. Ak prenosová funkcia obsahuje len póly, nazývame túto sústavu pólovou sústavou. Ak sústava obsahuje len nenulové nulové body a tieto sú zrkadlovo rozmiestnené v dvojiciach alebo štvoriciach, potom získame sústavu s lineárnou FFCH.



### 17. Korelácia medzi vstupom a výstupom LDI sústavy.



$$y[n] = h[n] * x[-k]$$

$$z_x[k] = \sum x[n].x[n - k] = x[k] * x[-k] \quad z_y[k] = y[k] * y[-k]$$

#### Vzájomná korelačná funkcia $z_{xy}[k]$

$$z_{xy}[k] = \sum y[n].x[n - k] = y[k] * x[n - k] = h[k] * x[k] * x[-k] \implies z_{xy}[k] = h[k] * z_x[k]$$

$$z_{yx}[k] = z_{xy}[-k] \implies z_{xy}[k] = h[-k] * z_x[k]$$

$$z_y[k] = y[k] * y[-k] = x[k] * h[k] * x[-k] * h[-k] = z_x[k] * z_h[k]$$

### 18. Ideálna a inverzná LDI sústava, frekvenčné charakteristiky prenosovej funkcie, LDI sústavy s minimálnou a neminimálnou fázovou frekvenčnou charakteristikou.

V ideálnom prípade požadujeme, aby signál bol zosilnený alebo zoslabený s určitým oneskorením. Diferenčná rovnica má tvar:  $y[n] = K.x[n - n_0]$

kde  $K$  je reálne číslo,  $n_0$  je celé číslo. Použitím transformácie Z dostaneme:

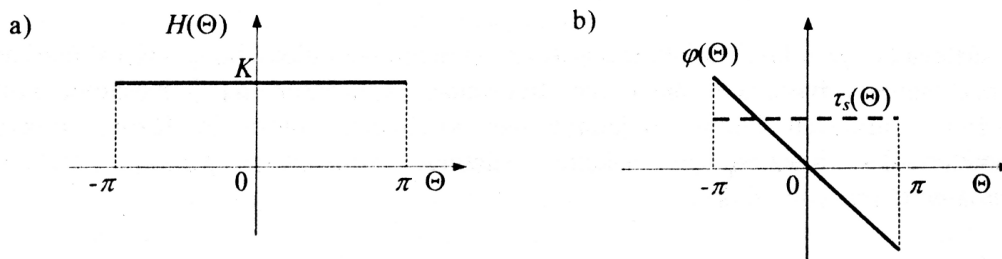
$$Y(z) = K.X(z).z^{-n_0} \implies H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = K.z^{-n_0}$$

Frekvenčný prenos:  $H(e^{j\Theta}) = K e^{-j\Theta n_0}$

Modulová a fázová frekvenčná charakteristika ideálnej LDI sústavy má tvar:

$$H(\Theta) = K \quad \varphi(\Theta) = -\Theta n_0 \quad \text{pre } \Theta \in (-\pi; \pi)$$

Pre charakteristiku skupinového oneskorenia platí:  $\tau_s(\Theta) = -\frac{d\varphi(\Theta)}{d\Theta} = n_0$



Frekvenčné charakteristiky ideálnej LDI sústavy: a) modulová, b) fázová a charakteristika skupinového oneskorenia

**Inverzná LDI sústava:**  $H(z) \longrightarrow H_i(z)$

$$H_v(z) = H(z).H_i(z) = 1 \longleftrightarrow h_v[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

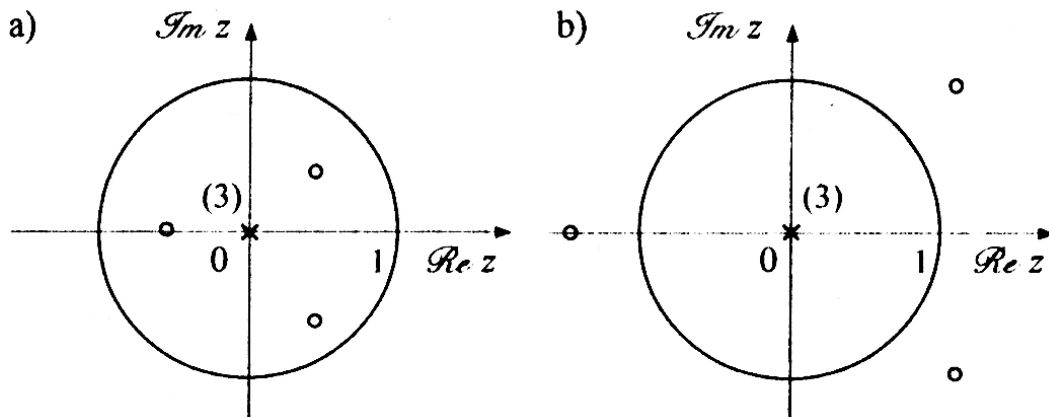
$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \Rightarrow H_i(e^{j\Theta}) = \frac{1}{H(e^{j\Theta})}$$

$$a_0 = 1 \Rightarrow H(e^{j\Theta}) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}$$

$$H_i(e^{j\Theta}) = b_0^{-1} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}$$

Stabilita:  $|d_k| < 1$  nuly  $\longleftrightarrow$  póly  $|c_k| < 1$

Ak všetky nulové body stabilnej LDI sústavy ležia vnútri jednotkovej kružnice, hovoríme o sústave s minimálnou fázovou frekvenčnou charakteristikou. Zrkadlovým otočením nulových bodov okolo kružnice získame sústavu s neminimálnou fázovou frekvenčnou charakteristikou (ktorá má rovnakú modulovú FCH).



## 19. Stabilita LDI sústav v časovej a vo frekvenčnej oblasti, stabilita LDI sústavy 2. rádu (trojuholník stability).

a) LDI sústava je stabilná, ak jej kauzálna impulzová charakteristika  $h[n]$  je absolútne konvergentný rad a jeho súčet je konečné číslo, t. j.

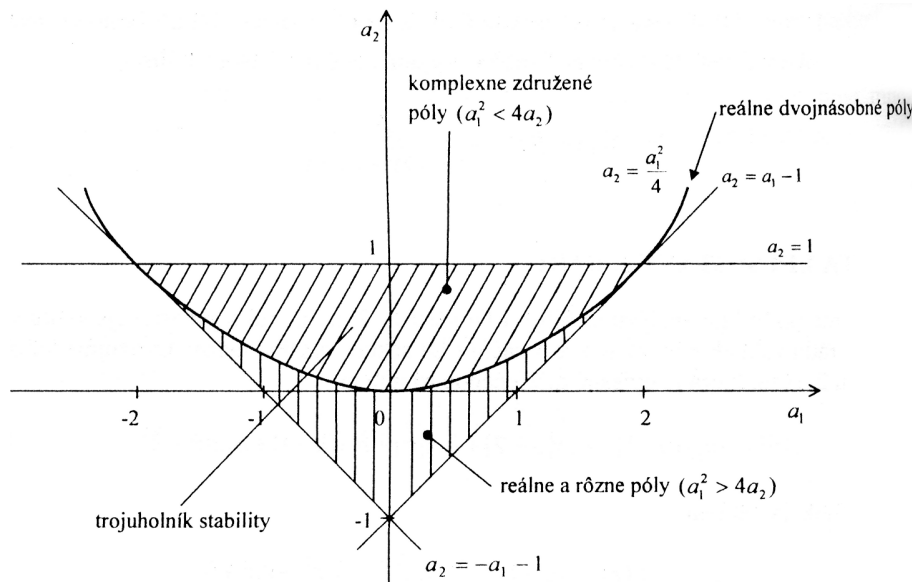
$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = M < \infty$$

Pri nesplnení tejto podmienky je LDI sústava nestabilná, alebo je na hranici stability.

b) LDI sústava je stabilná, aké všetky póly prenosovej funkcie  $H(z)$  (korene charakteristickej rovnice) ležia vnútri kruhu s polomerom  $r = 1$  v  $z$ -rovine.

LDI sústava je na hranici stability, ak póly prenosovej funkcie  $H(z)$  ležia na kružnici s polomerom  $r = 1$  v  $z$ -rovine a sú jednoduché.

LDI sústava je nestabilná, ak póly prenosovej funkcie  $H(z)$  ležia v  $z$ -rovine mimo kruhu s polomerom  $r = 1$ .



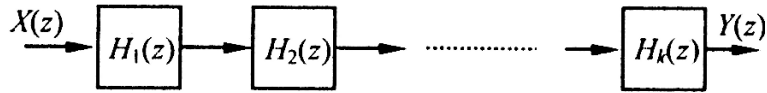
20. Kaskádna a paralelná štruktúra LDI sústavy, prenosová funkcia a impulzová charakteristika.

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \dots H_k(z) = \prod_{i=1}^k H_i(z)$$

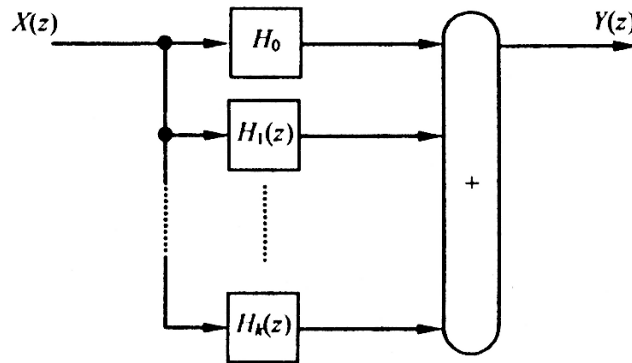
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \dots * h_k[n]$$

$$H(z) = H_0 + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_k(z) = H_0 + \sum_{i=1}^k H_i(z)$$

$$h[n] = H_0\delta[n] + h_1[n] + h_2[n] + \dots + h_k[n] = H_0\delta[n] + \sum_{i=1}^k h_i[n]$$



Obr. 5.1 Kaskádna štruktúra



Obr. 5.4 Paralelná štruktúra

**21. Kaskádna štruktúra FIR sústavy pomocou sústav 1. a 2. rádu, prenosová funkcia, orientovaný graf.**

Kauzálna FIR sústava N-tého rádu má prenosovú funkciu v tvare:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n}$$

Prenosová funkcia obsahuje len nulové body, okrem N-násobného pólu v  $z = 0$ . V časovej oblasti možno FIR sústavu opísať diferenčnou rovnicou

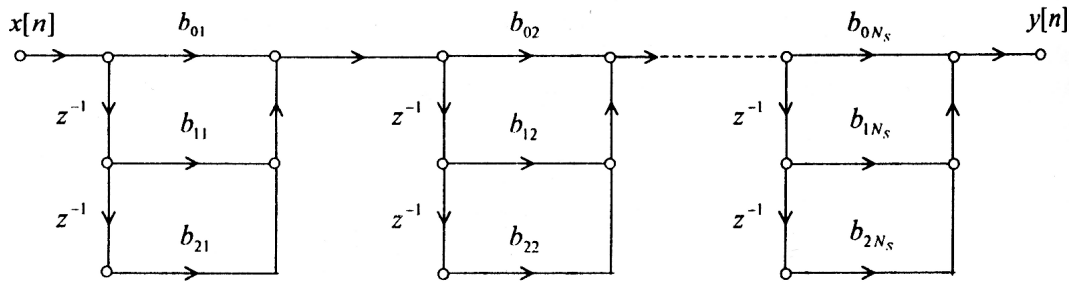
$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n - k]$$

Impulzová charakteristika má konečný počet členov:

$$h[n] = \begin{cases} b_n & \text{pre } n \in \{0, \dots, N\} \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

Kaskádna štruktúra FIR sústavy sa získa rozkladom prenosovej funkcie  $H(z)$  na súčin jednotlivých sekcií 2. rádu

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} = \prod_{k=1}^{N_s} (b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}) \quad N_s = \lceil (N + 1)/2 \rceil$$



**22. Kaskádna štruktúra IIR sústavy pomocou sústav 1. a 2. rádu, prenosová funkcia, orientovaný graf.**

IIR sústavy možno opísať diferenčnou rovnicou

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n - k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n - k]$$

Zodpovedajúca prenosová funkcia má tvar

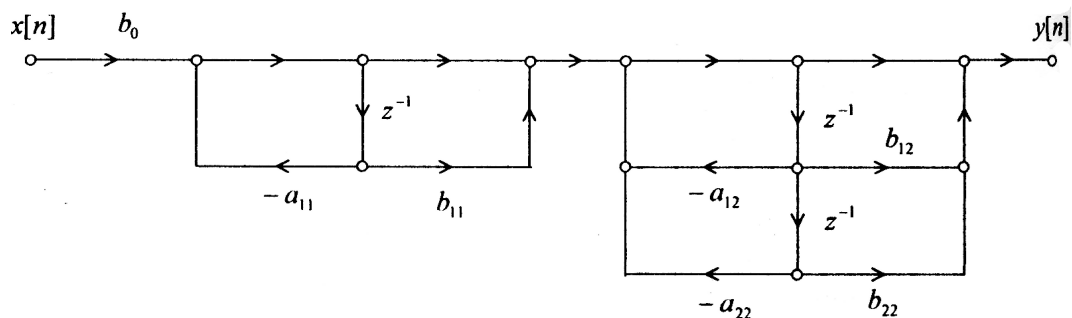
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Prenosovú funkciu možno vyjadriť v tvare súčinu prenosových funkcií 2. rádu

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{N_s} \frac{(1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2})}{(1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2})}$$

Kaskádna realizácia prenosovej funkcie 3. rádu

$$H(z) = b_0 \left( \frac{1 + b_{11} z^{-1}}{1 + a_{11} z^{-1}} \right) \left( \frac{1 + b_{12} z^{-1} + b_{22} z^{-2}}{1 + a_{12} z^{-1} + a_{22} z^{-2}} \right)$$

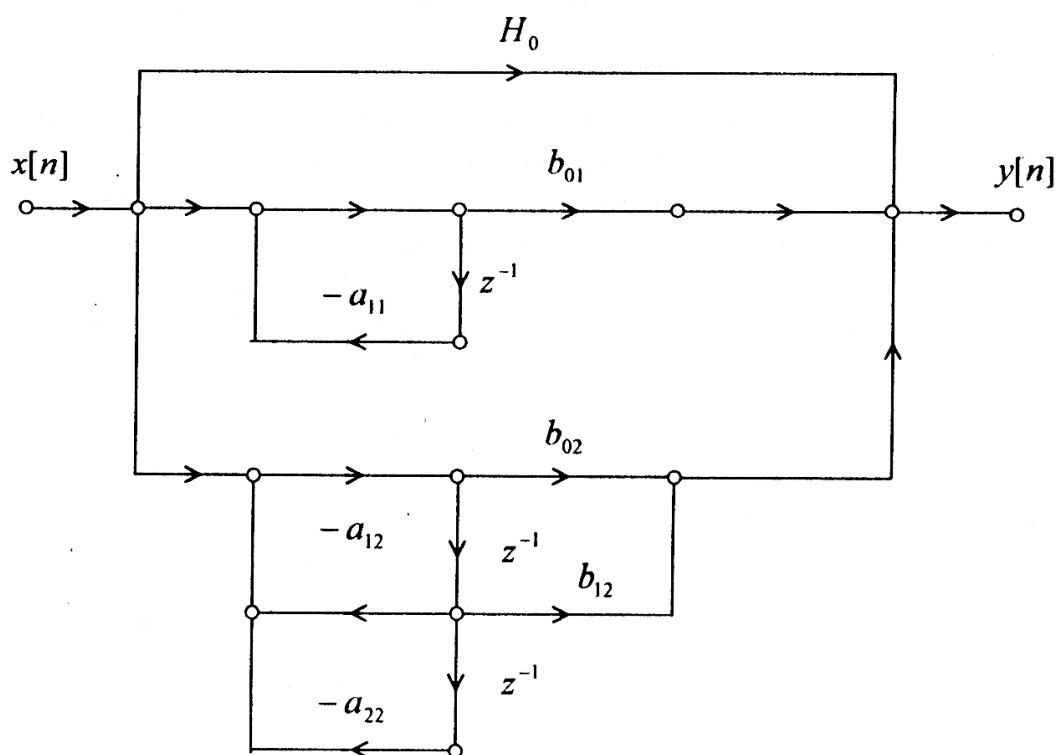


**23. Paralelná štruktúra IIR sústav pomocou sústav 1. a 2. rádu, prenosová funkcia, orientovaný graf.**

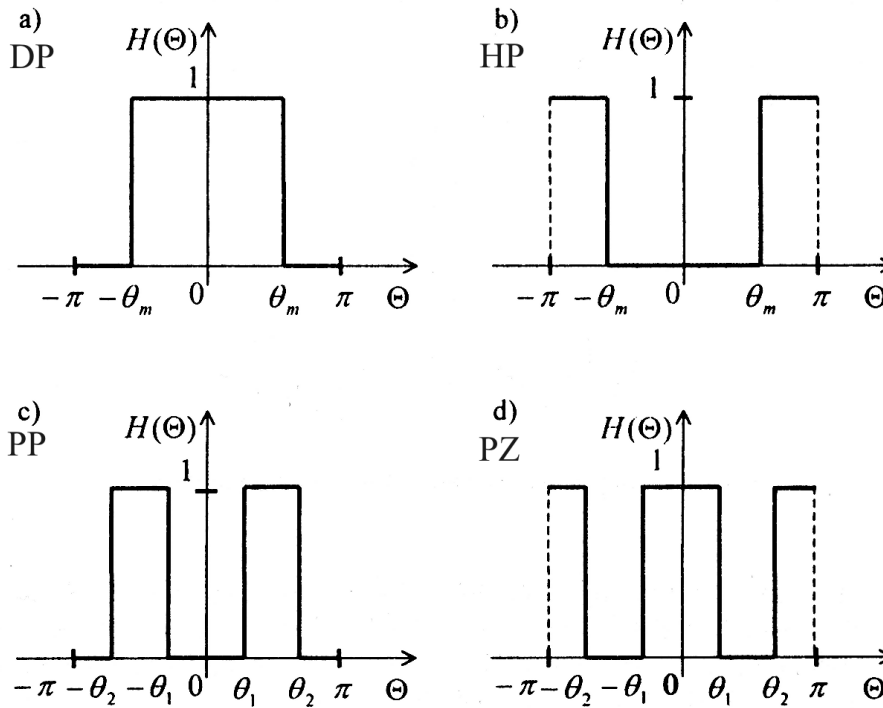
Prenosovú funkciu IIR filtra možno realizovať pomocou paralelnej štruktúry použitím rozkladu prenosovej funkcie na parciálne zlomky. Uvažujme jednoduché póly, prenosovú funkciu vyjadríme v tvare

$$H(z) = H_0 + \sum_k \left( \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right)$$

pre reálne póly  $a_{2k} = b_{1k} = 0$ . Možná realizácia je znázornená na obrázku.



24. Frekvenčné a časové charakteristiky ideálnych číslicových filtrov.



Pásmo prepúšťania:  $H(\Theta) = 1$

Pásmo tlnenia:  $H(\Theta) = 0$

Prechodné pásmo = 0

Filter	$h[n], n \neq 0$
DP	$\frac{\Theta_p}{\pi} \text{si}(\Theta_p n)$
HP	$-\frac{\Theta_p}{\pi} \text{si}(\Theta_p n)$
PP	$\frac{\Theta_2}{\pi} \text{si}(\Theta_2 n) - \frac{\Theta_1}{\pi} \text{si}(\Theta_1 n)$
PZ	$\frac{\Theta_1}{\pi} \text{si}(\Theta_1 n) - \frac{\Theta_2}{\pi} \text{si}(\Theta_2 n)$

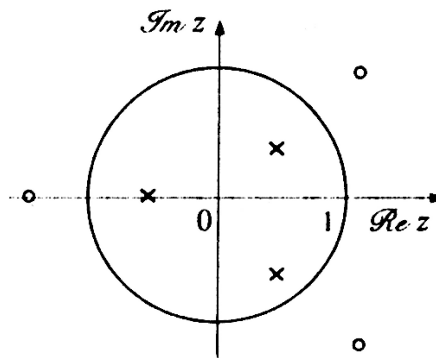
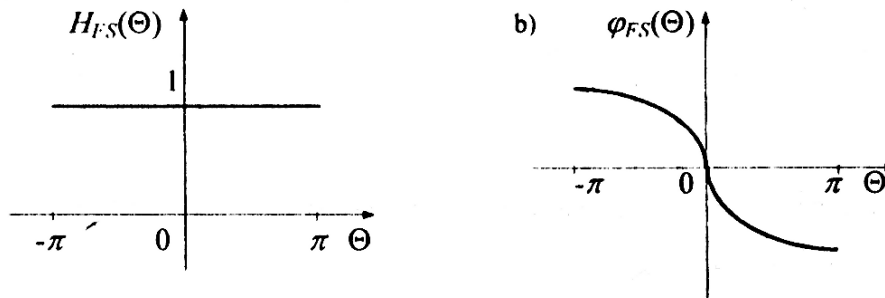


**25. Číslicové fázovacie systavy - základné vlastnosti, rozloženie nulových bodov a pólov, použitie.**

Základné vlastnosti fázovacích sústav:

1.  $H(\Theta) = konst \quad \Theta \in \langle -\pi; \pi \rangle$
2.  $\varphi(\Theta)$  odpovedá rádu fázovacej sústavy

Použitie: fázový korektor, reverberátor.



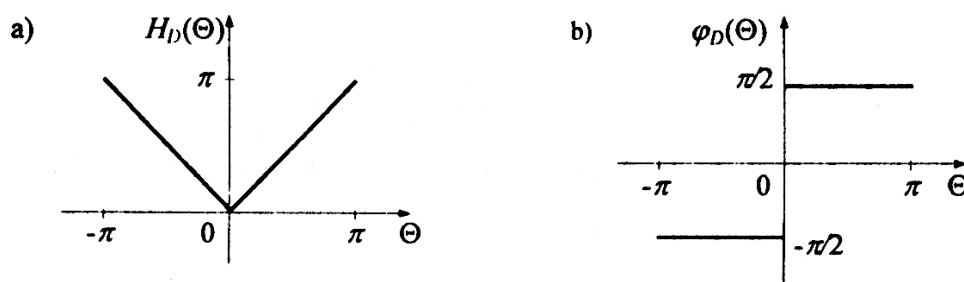
**26. Ideálny číslicový derivátor, frekvenčné charakteristiky.**

Frekvenčný prenos ideálneho diskrétného derivátora má tvar:

$$H_D(e^{j\Theta}) = j\Theta \quad \text{pre } |\Theta| \leq \pi$$

Modulová a fázová frekvenčná charakteristika má potom tvar

$$H_D(\Theta) = |\Theta| \quad \text{pre } |\Theta| \leq \pi \quad \varphi_D(\Theta) = \begin{cases} \pi/2 & \text{pre } \Theta \in (0; \pi) \\ -\pi/2 & \text{pre } \Theta \in (-\pi; 0) \end{cases}$$



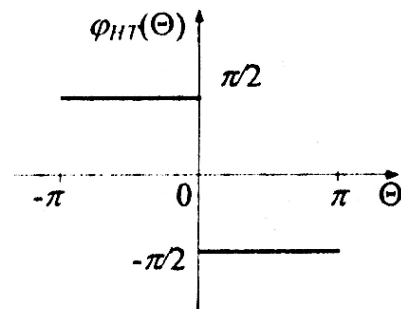
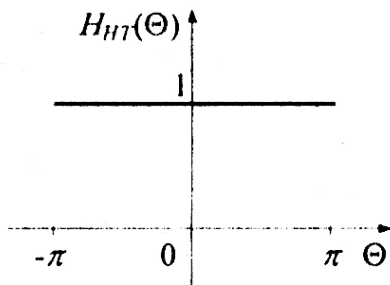
## 27. Ideálny číslicový Hilbertov transformátor, frekvenčné charakteristiky.

Frekvenčná charakteristika Hilbertovho transformátora:

$$H_{HT}(e^{j\Theta}) = \begin{cases} -j & \text{pre } \Theta \in (0; \pi) \\ j & \text{pre } \Theta \in (-\pi; 0) \end{cases}$$

Modulová a fázová frekvenčná charakteristika má tvar:

$$H_{HT}(\Theta) = 1 \quad \text{pre } |\Theta| \leq \pi \quad \varphi_{HT}(\Theta) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{pre } \Theta \in (0; \pi) \\ \pi/2 & \text{pre } \Theta \in (-\pi; 0) \end{cases}$$



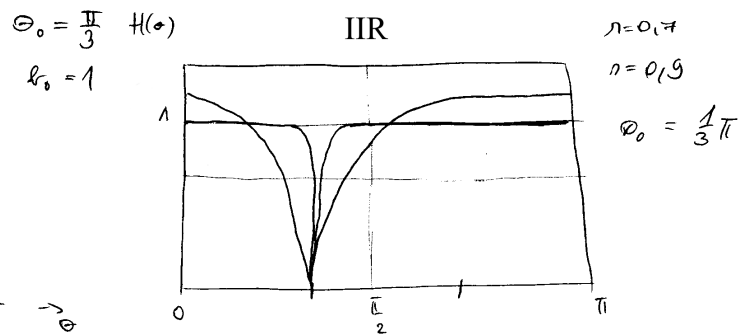
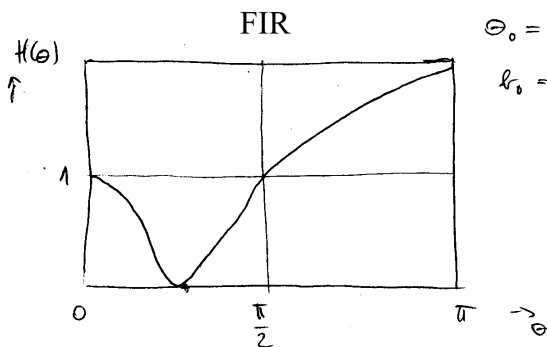
## 28. Úzkopásmová zádrž (notch filter).

a) ako FIR filter:  $c_{1,2} = e^{\pm j\Theta_0}$

$$H(z) = b_0(1 - 2 \cos \Theta_0 z^{-1} + z^{-2})$$

b) ako IIR filter:  $c_{1,2} = e^{\pm j\Theta_0}$   $d_{1,2} = r \cdot e^{\pm j\Theta_0}$

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \Theta_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \Theta_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



### 29. Hrebeňový (comb) filter.

a) ako FIR filter:

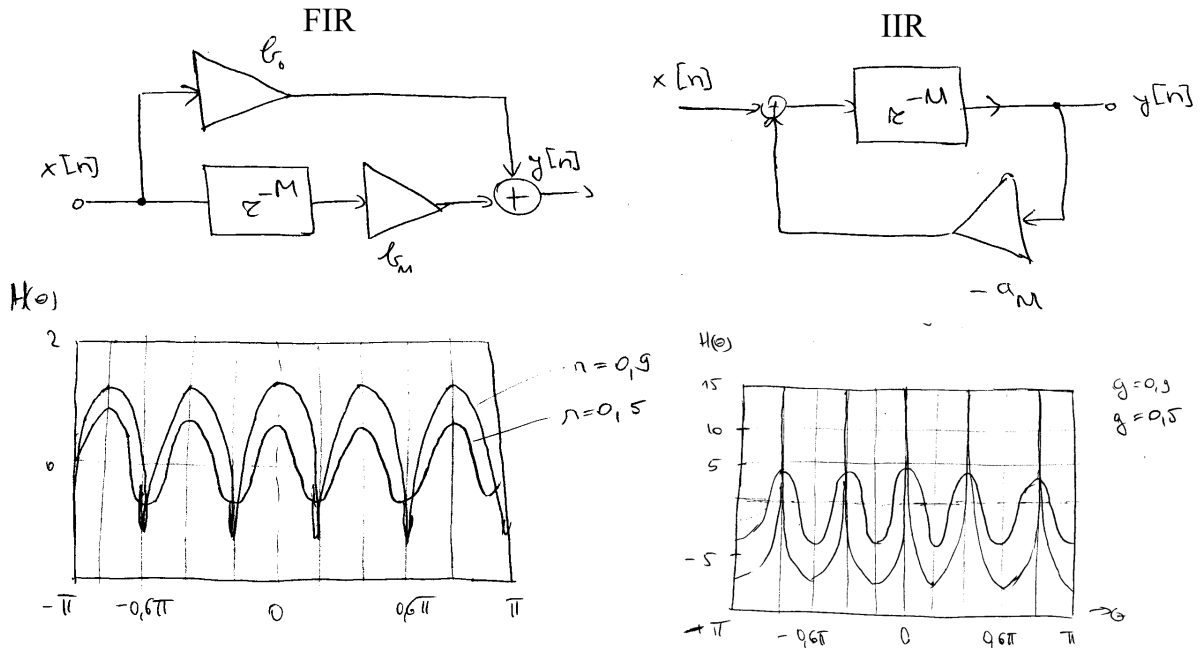
$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_M \cdot x[n - M]$$

$$H(z) = b_0 + b_M \cdot z^{-M}$$

b) ako IIR filter:

$$y[n] = x[n - M] - a_M \cdot y[n - M]$$

$$H(z) = \frac{z^{-M}}{1 + a_M \cdot z^{-M}}$$

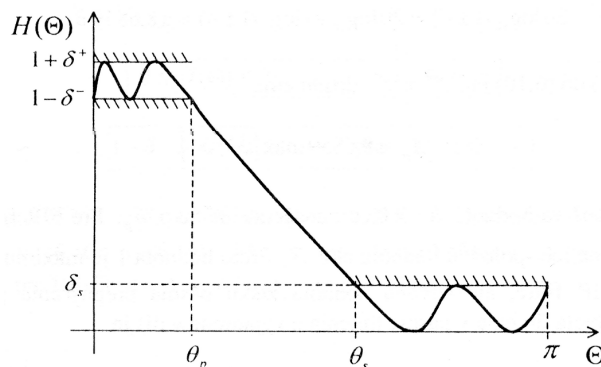


### 30. Špecifikácia číslicového DP filtra, tolerančná schéma a základné parametre.

$$1 - \delta^- \leq H(\Theta) \leq 1 + \delta^+ \quad \text{pre} \quad 0 \leq \Theta \leq \theta_p$$

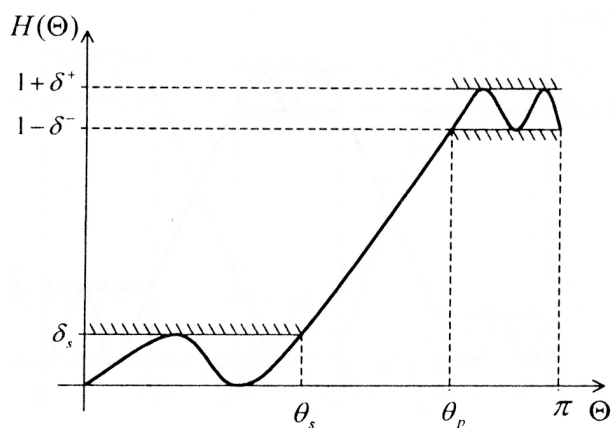
$$0 \leq H(\Theta) \leq \delta_s \quad \text{pre} \quad \theta_s \leq \Theta \leq \pi$$

$$A_s = -20 \log \delta_s \quad A_p \approx 8,6859 \cdot \max\{\delta^+; \delta^-\}$$



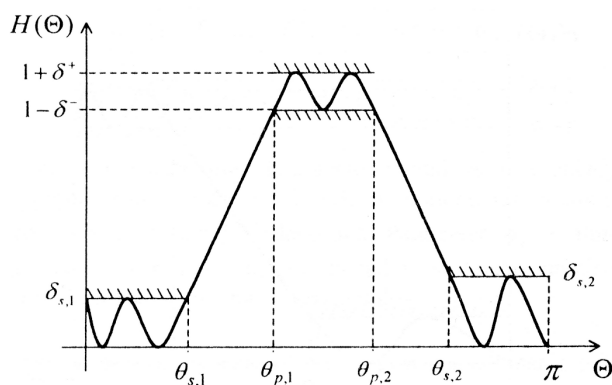
31. Špecifikácia číslicového HP filtra, tolerančná schéma a základné parametre.

$$\begin{aligned}
 0 \leq H(\Theta) \leq \delta_s & \quad \text{pre} \quad 0 \leq \Theta \leq \theta_s \\
 1 - \delta^- \leq H(\Theta) \leq 1 + \delta^+ & \quad \text{pre} \quad \theta_p \leq \Theta \leq \pi \\
 A_s = -20 \log \delta_s & \quad A_p \approx 8,6859 \cdot \max\{\delta^+; \delta^-\}
 \end{aligned}$$



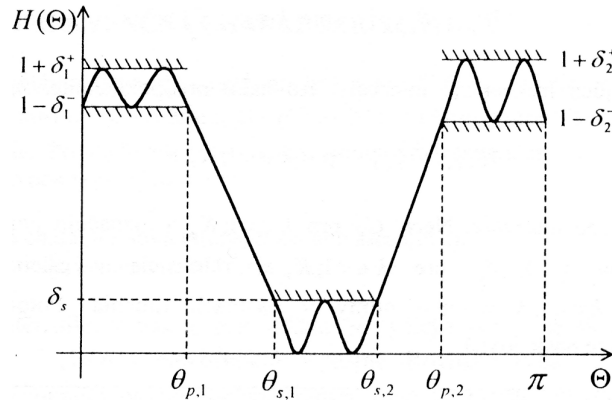
32. Špecifikácia číslicového PP filtra, tolerančná schéma a základné parametre.

$$\begin{aligned}
 0 \leq H(\Theta) \leq \delta_{s,1} & \quad \text{pre} \quad 0 \leq \Theta \leq \theta_{s,1} \\
 1 - \delta^- \leq H(\Theta) \leq 1 + \delta^+ & \quad \text{pre} \quad \theta_{p,1} \leq \Theta \leq \theta_{p,2} \\
 0 \leq H(\Theta) \leq \delta_{s,2} & \quad \text{pre} \quad \theta_{s,2} \leq \Theta \leq \pi \\
 A_p \approx 8,6859 \cdot \max\{\delta^+; \delta^-\} \\
 A_{s,1} = -20 \log \delta_{s,1} & \quad A_{s,2} = -20 \log \delta_{s,2}
 \end{aligned}$$



**33. Špecifikácia číslicového PZ filtra, tolerančná schéma a základné parametre.**

$$\begin{aligned}
 1 - \delta_1^- &\leq H(\Theta) \leq 1 + \delta_1^+ && \text{pre } 0 \leq \Theta \leq \theta_{p,1} \\
 0 &\leq H(\Theta) \leq \delta_s && \text{pre } \theta_{s,1} \leq \Theta \leq \theta_{s,2} \\
 1 - \delta_2^- &\leq H(\Theta) \leq 1 + \delta_2^+ && \text{pre } \theta_{p,2} \leq \Theta \leq \pi \\
 A_{p,1} &\approx 8,6859 \cdot \max\{\delta_1^+; \delta_1^-\} && A_{p,2} \approx 8,6859 \cdot \max\{\delta_2^+; \delta_2^-\} \\
 &&& A_s = -20 \log \delta_s
 \end{aligned}$$



**34. Špecifikácia viacpásmového číslicového filtra, tolerančná schéma a základné parametre.**

Viacpásmové filtre poskytujú rozdielne frekvenčné pásma prepúšťania a tlmenia. Sú charakterizované parametrami ako:

1. rozdelenie frekvenčného pásma  $\langle 0; \pi \rangle$  na konečný počet intervalov
2. požadovaný zisk a povolené tolerancie pre každé pásmo prepúšťania
3. prahová hodnota tlmenia pre každé pásmo tlmenia

Majme  $K_p$  pásiem prepúšťania a nech

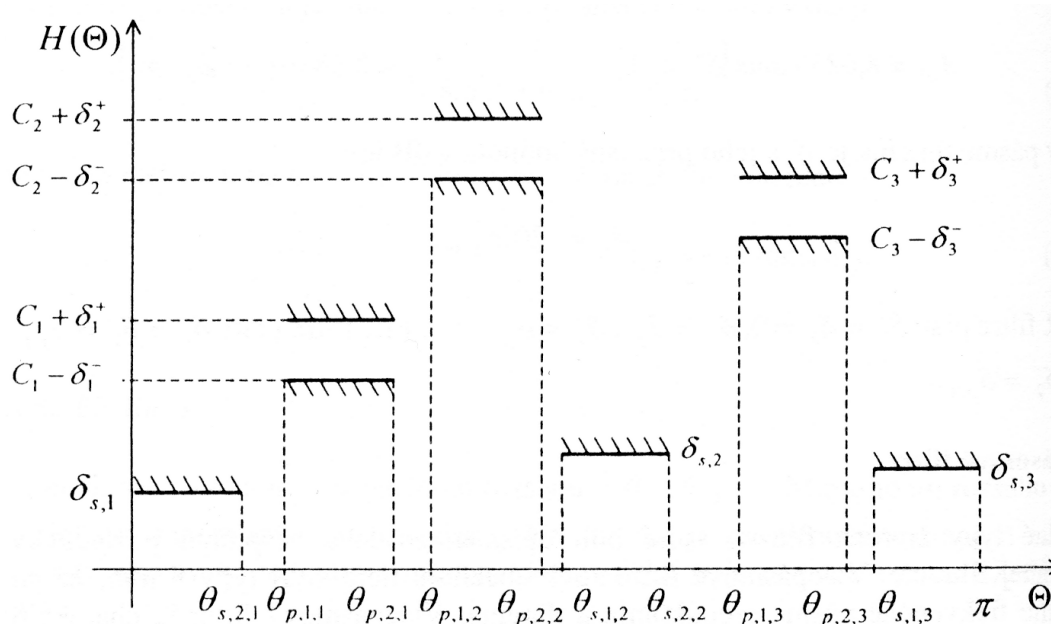
$$[\theta_{p,1,k}; \theta_{p,2,k}] \quad \text{pre } k \in \langle 1; K_p \rangle$$

označuje zodpovedajúce frekvenčné intervaly. Rovnako predpokladáme, že  $K_s$  sú pásma tlmenia, kde

$$[\theta_{s,1,k}; \theta_{s,2,k}] \quad \text{pre } k \in \langle 1; K_s \rangle$$

sú príslušné frekvenčné intervaly. Nech  $C_k$  je požadovaný zisk a  $\delta_k^-, \delta_k^+$  sú tolerancie v pásmo prepúšťania,  $\delta_{s,k}$  sú útlmy v pásmach tlmenia. Potom špecifikácia je nasledovná:

$$\begin{aligned}
 C_k - \delta_k^- &\leq H(\Theta) \leq C_k + \delta_k^+ && \theta_{p,1,k} \leq \Theta \leq \theta_{p,2,k} && 1 \leq k \leq K_p \\
 0 &\leq H(\Theta) \leq \delta_{s,k} && \theta_{s,1,k} \leq \Theta \leq \theta_{s,2,k} && 1 \leq k \leq K_s
 \end{aligned}$$



35. Číslicové FIR filtre s lineárnou a zovšeobecnenou lineárnou FFCH, fázové a skupinové oneskorenie.

*FIR s lineárnou FFCH*

$$H(e^{j\Theta}) = A(\Theta)e^{-j\Theta\tau_f}$$

*Fázové oneskorenie:*

$$\tau_f = -\frac{\Phi(\Theta)}{\Theta}$$

Filtre s lineárnou FFCH sú charakterizované konštantným skupinovým oneskorením.

*Zovšeobecnená lineárna FFCH*

$$H(e^{j\Theta}) = A(\Theta)e^{j(\Phi_0 - \Theta\tau_s)}$$

Ak je FFCH diferencovateľná, potom *skupinové oneskorenie* je definované:

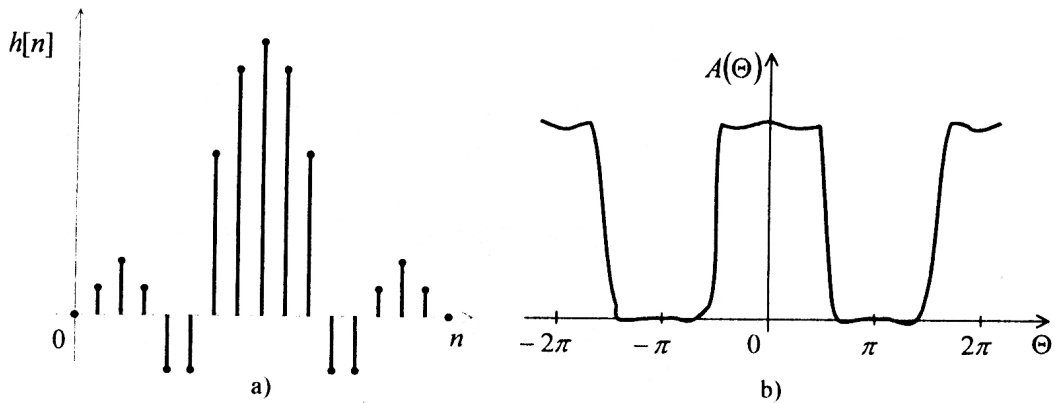
$$\tau_s(\Theta) = -\frac{d\Phi(\Theta)}{d\Theta}$$

GLP filter je charakterizovaný konštantným skupinovým oneskorením.

**36. FIR filter s lineárnou FFCH - typ I, impulzová a amplitúdová charakteristika.**

$$N = 2M \quad \Phi_0 = 0 \quad \tau_f = konst \quad h[n] = h[N - n] \quad T = 2\pi$$

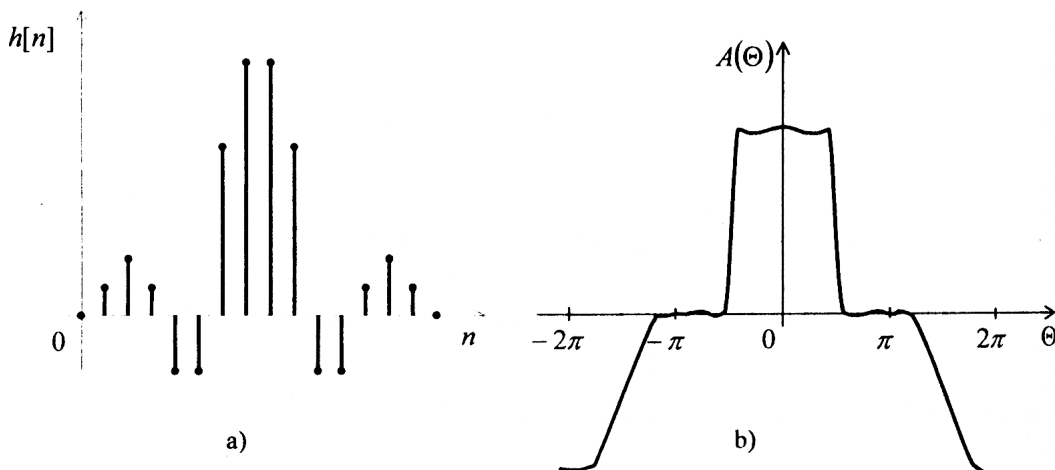
$$A_I(\Theta) = \sum_{n=0}^M h_1[n] \cos(\Theta n)$$



**37. FIR filter s lineárnou FFCH - typ II, impulzová a amplitúdová charakteristika.**

$$N = 2M + 1 \quad \Phi_0 = 0 \quad \tau_f = konst \quad h[n] = h[N - n] \quad T = 4\pi$$

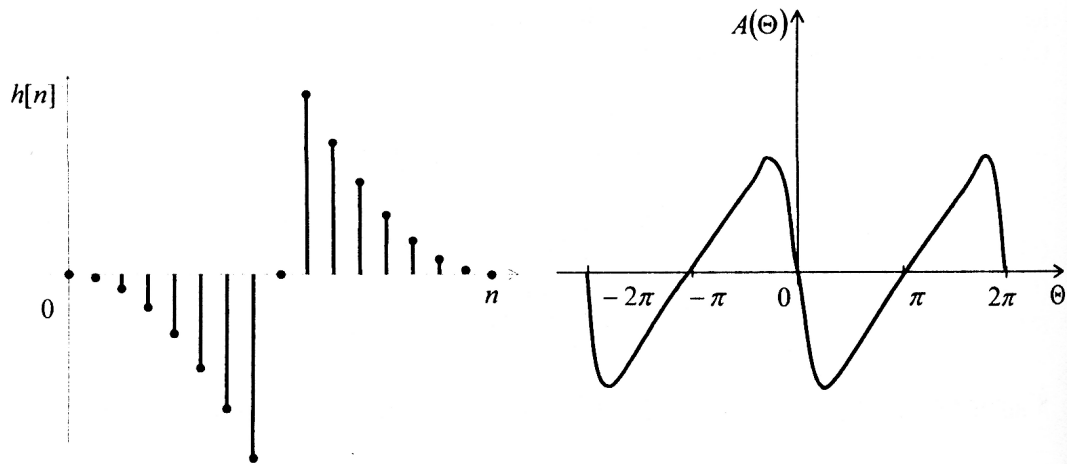
$$A_{II}(\Theta) = \cos(0,5\Theta) \sum_{n=0}^M h_1[n] \cos(\Theta n)$$



38. FIR filter s lineárnou FFCH - typ III, impulzová a amplitúdová charakteristika.

$$N = 2M \quad \Phi_0 = 0,5\pi \quad \tau_s = konst \quad h[n] = -h[N - n] \quad T = 2\pi$$

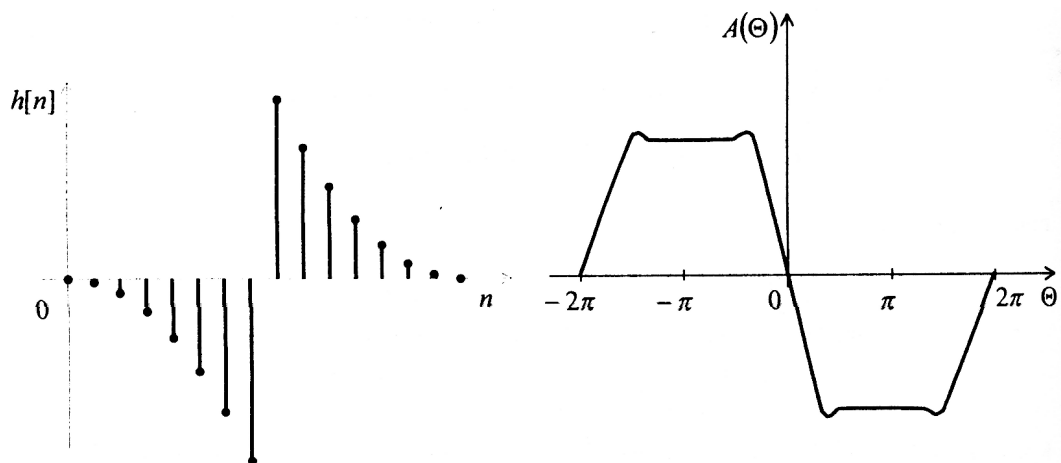
$$A_{III}(\Theta) = \sin(\Theta) \sum_{n=0}^M h_1[n] \cos(\Theta n)$$



39. FIR filter s lineárnou FFCH - typ IV, impulzová a amplitúdová charakteristika.

$$N = 2M + 1 \quad \Phi_0 = 0,5\pi \quad \tau_s = konst \quad h[n] = -h[N - n] \quad T = 4\pi$$

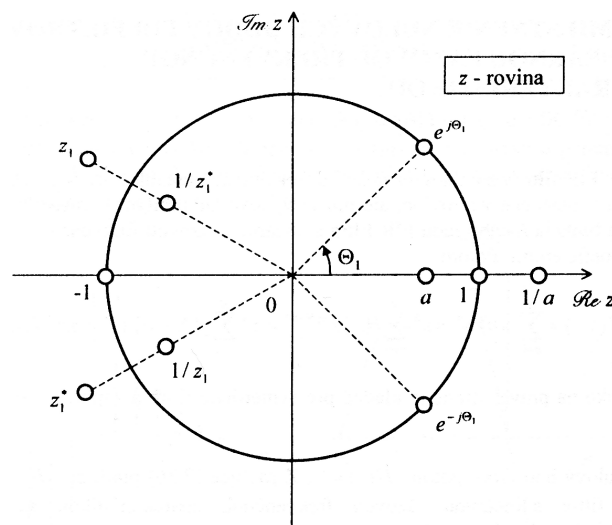
$$A_{IV}(\Theta) = \sin(0,5\Theta) \sum_{n=0}^M h_1[n] \cos(\Theta n)$$





**40. FIR filtre s lineárnou FFCH, základné vlastnosti, rozmiestnenie nulových bodov.**

Typ	I	II	III	IV
Rád	párny	nepárny	párny	nepárny
Symetria $h[n]$	symetrická	symetrická	antisymetrická	antisymetrická
Symetria $A(\Theta)$	symetrická	symetrická	antisymetrická	antisymetrická
Periódá $A(\Theta)$	$2\pi$	$4\pi$	$2\pi$	$4\pi$
$\Phi_0$	0	0	$0,5\pi$	$0,5\pi$
$F(\Theta)$	1	$\cos(0,5\Theta)$	$\sin \Theta$	$\sin(0,5\Theta)$
$H(0)$	ľubovoľná	ľubovoľná	0	0
$H(\pi)$	ľubovoľná	0	0	ľubovoľná



**41. Základný princíp použitia okien, hlavné parametre okien.**

Základné vlastnosti a parametre okien:

- relatívna šírka hlavného laloku zvoleného okna vzhľadom na šírku hlavného laloku pravouhlého okna rovnakej dĺžky
- relatívna úroveň postranného laloku vzhľadom na hlavný lalok
- čo najužší hlavný lalok
- čo najnižšie postranné laloky oproti hlavnému laloku

Typy okien: pravouhlé, Bartlettovo, Hannovo, Hammingovo, Blackmanovo okno.

Princíp metódy okien: majme nekonečne dlhú postupnosť  $y[n]$ , vyberieme krátky segment z  $y[n]$  a označíme  $x[n]$ . Túto operáciu možno opísať ako násobenie  $y[n]$  pravouhlým oknom  $w_r[n]$ , kde

$$w_r[n] = \begin{cases} 1 & \text{pre } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

Násobeniu v časovej oblasti zodpovedá konvolúcia vo frekvenčnej oblasti

$$X(e^{j\Theta}) = \frac{1}{2\pi} Y(e^{j\Theta}) * W_r(e^{j\Theta}) \quad D(\Theta; N) = \frac{\sin(0,5\Theta N)}{\sin(0,5\Theta)} \quad \text{Dirichletova funkcia}$$

#### 42. Návrh FIR filtrov metódou okien.

1. Špecifikácia požiadaviek  $H_d(e^{j\Theta})$ ,  $\delta_p$ ,  $\delta_s$ ,  $\Theta_p$ ,  $\Theta_s$
2. Voľba  $N$  ( $N$  je dĺžka impulzovej charakteristiky,  $N-1$  je rád filtra)
3. Výpočet ideálnej impulzovej charakteristiky  $h_d[n]$
4. Voľba vhodného okna a výpočet koeficientov filtra  $h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$
5. Výpočet frekvenčnej charakteristiky filtra  $H(e^{j\Theta}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\Theta n}$

#### 43. Návrh FIR filtrov metódou frekvenčného vzorkovania.

Princíp metódy vychádza z frekvenčného vzorkovania modulovej frekvenčnej charakteristiky  $H(\Theta)$  pomocou  $N$  vzoriek v ekvidistantných bodoch  $\Theta_k = (2k\pi)/N$ . DFT impulzovej charakteristiky  $h[n]$  definuje hodnoty frekvenčnej charakteristiky v diskretných frekvenciách

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_N^{kn} \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, N-1$$

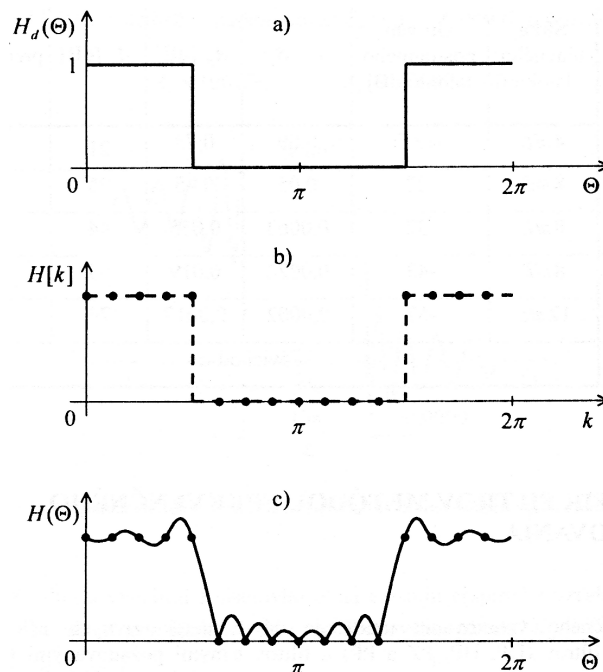
Potom určíme frekvenčnú charakteristiku prenosovej funkcie v diskretných frekvenciách

$$H_d(e^{j\Theta})|_{\Theta=\frac{2k\pi}{N}} = H(e^{j\frac{2k\pi}{N}}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_N^{kn} \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, N-1$$

Nakoniec z  $N$  vzoriek FCH získame  $N$  koeficientov filtra

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] W_N^{-nk} \quad \text{pre } n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_d(e^{j\Theta}) \longrightarrow H[k] \longrightarrow h[n] \longrightarrow H(e^{j\Theta})$$



#### 44. Základné metódy návrhu IIR filtrov.

a) metódy, ktoré využívajú analógové prototypy, súvislosť medzi p-rovinou a z-rovinou:

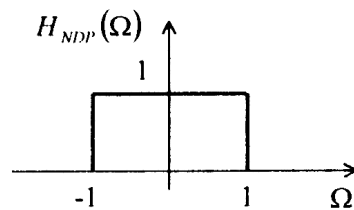
- metóda invariance impulzovej charakteristiky
- metóda spätných diferencií
- metóda bilineárnej transformácie

b) metódy priameho návrhu v z-rovine bez nadväznosti na analógové ekvivalenty:

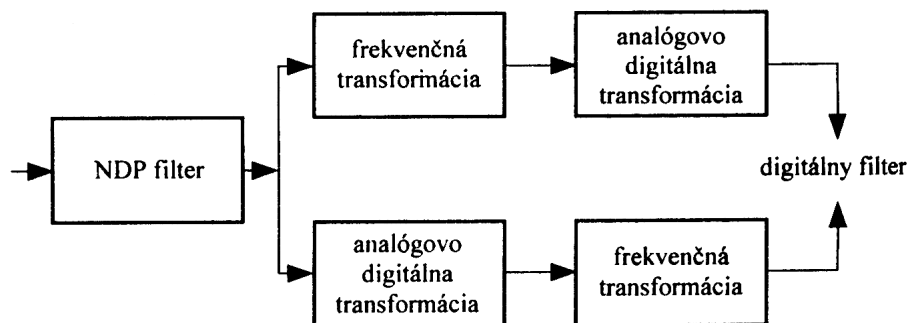
- metóda najmenších štvorcov
- identifikačné parametrické metódy

#### 45. Postup návrhu číslicových IIR filtrov na základe analógového NDP filtra.

Modulová frekvenčná charakteristika normovaného DP filtra je znázornená na obrázku



Prenosovú funkciu digitálneho filtra možno získať dvoma spôsobmi:



Na použitie analógovo digitálnej transformácie sa kladú dve základné požiadavky:

1. stabilný analógový filter sa musí transformovať na stabilný digitálny filter
2. základné frekvenčné vlastnosti analógového filtra musia ostať po frekvenčnej transformácii zachované.

Postup návrhu:

1. formulácia požiadaviek na digitálny filter
2. transformácia týchto požiadaviek na analógový NDP filter
3. návrh analógového NDP filtra (nájdanie prenosovej funkcie  $H_a(p)$ )
4. transformácia prenosovej funkcie  $H_a(p)$  na prenosovú funkciu  $H(z)$

## 46. Frekvenčné transformácie v analógovej a v číslicovej oblasti.

### *Frekvenčné transformácie v analógovej oblasti*

Majme DP filter s medznou kruhovou frekvenciou pásma prepúšťania  $\omega_p$  a chceme ho konvertovať na iný DP filter s medznou kruhovou frekvenciou pásma prepúšťania  $\omega'_p$ . To dosiahneme pomocou transformácie

$$p \rightarrow \frac{\omega_p}{\omega'_p} p$$

Týmto spôsobom získame DP filter s prenosovou funkciou

$$H_{DP}(p) = H_p\left(\left(\omega_p/\omega'_p\right)p\right)$$

Ak chceme konvertovať DP filter na HP filter

$$p \rightarrow \frac{\omega_p \omega'_p}{p}$$

$$H_{HP}(p) = H_p\left(\left(\omega_p \omega'_p\right)/p\right)$$

### *Frekvenčné transformácie v digitálnej oblasti*

Ide o nájdenie triedy zobrazenia  $g(z)$ , ktorá nezmení priebeh modulovej frekvenčnej charakteristiky v pásme prepúšťania a v pásme tlmenia, ale zmení len polohu okrajov pásma prepúšťania. Táto transformácia predstavuje zmenu premennej  $z^{-1}$  racionálnou funkciou  $g(z^{-1})$  pri splnení nasledovných podmienok:

1. mapovanie  $z^{-1} \rightarrow g(z^{-1})$  musí mapovať body vnútri jednotkovej kružnice v z-rovine opať do jednotkovej kružnice
2. jednotková kružnica sa musí mapovať sama do seba

$$g(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^n \frac{z^{-1} - c_k}{1 - c_k z^{-1}}$$

## 47. Návrh IIR filtrov metódou spätných diferencií.

Pri tejto metóde sa využíva vlastnosť, že LSI sústavu možno opísať diferenciálnou rovnicou. Cieľom metódy je snaha nahradiť túto diferenciálnu rovnicu, ktorá vedie k prenosovej funkcii analógového filtra, diferenčnou rovnicou, ktorá vedie k prenosovej funkcii digitálneho filtra. Aproximujeme deriváciu funkcie konečnou diferenciou:

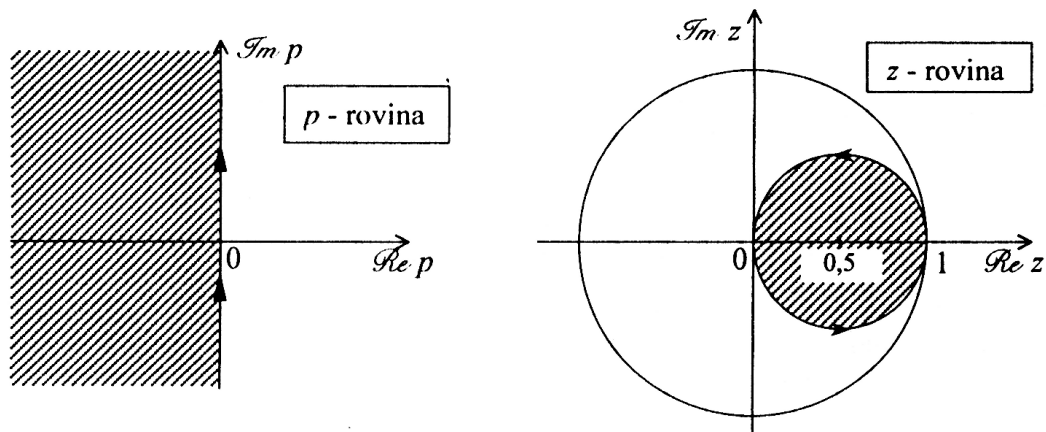
$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{y[nT] - y[nT - T]}{T} = \frac{y_d[n] - y_d[n - 1]}{T}$$

kde  $y_d[n]$  predstavuje výstupný signál LDI sústavy. So znižovaním vzorkovacej periódy  $T$  sa bude zvyšovať presnosť aproximácie. Operátor spätnej diferencie

$$p \leftarrow \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Potom prenosová funkcia  $H(z) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{1-z^{-1}}{T}}$ , pričom každý pól (nulový bod)  $p = p_k$  je nahradený pólom (nulovým bodom)  $z_k = \frac{1}{1 - p_k T}$

Imaginárna os  $p$ -roviny je transformovaná do kruhu s polomerom 0,5 v  $z$ -rovine a so stredom pre  $z = 0,5$ .



#### 48. Návrh IIR filtrov metódou invariencie impulzovej charakteristiky.

Impulzovú charakteristiku digitálneho filtra  $h[n]$  získame rovnomerným vzorkovaním impulzovej charakteristiky analógového filtra  $h_a(t)$ :

$$h[n] = h_a(nT) \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots$$

1. z prenosovej funkcie  $H_a(p)$  pomocou inverznej LT určíme  $h_a(t)$
2. na získanie  $h[n]$  vzorkujeme impulznú charakteristiku  $h_a(t)$  periódou vzorkovania  $T$
3. prenosovú funkciu  $H(z)$  vypočítame pomocou  $z$ -transformácie  $h[n]$ .

$$h[n] = h_a(nT) = \sum_{k=1}^m C_k e^{np_k T}$$

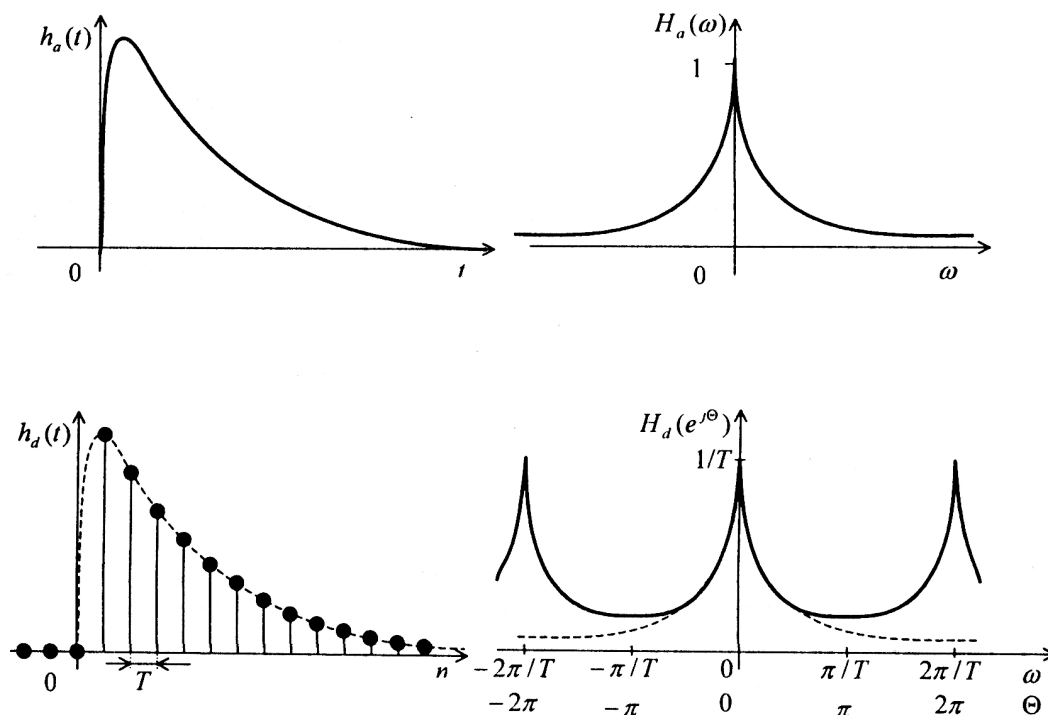
$$H(z) = \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Digitálny filter má póly  $z_k = e^{p_k T}$  pre  $k = 1, 2, \dots, m$ . Transformovaný digitálny filter má tieto vlastnosti:

1. rád digitálneho filtra je rovnaký ako rád analógového filtra
2. jeho póly sú transformované  $p_k \rightarrow e^{p_k T}$  pre  $k \in \langle 1; m \rangle$
3. nulové body  $H(z)$  nemajú jednoduchý vzájomný vzťah s prenosovou funkciou  $H_a(p)$

Frekvenčná charakteristika digitálneho filtra a frekvenčná charakteristika analógového filtra sú navzájom viazané na základe vzorkovacej teóremy

$$H(e^{j\Theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{H}_a(\omega - 2\pi k/T)$$



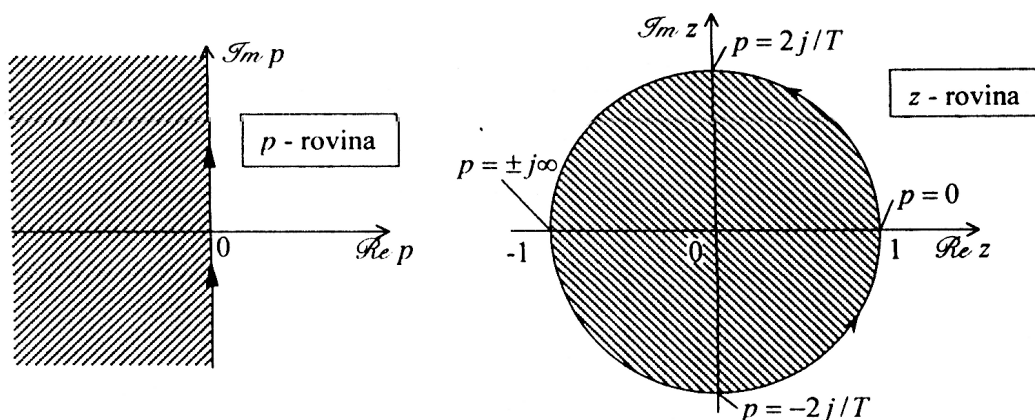
#### 49. Návrh IIR filtrov metódou bilineárnej transformácie.

Podstata spočíva v matematickej interpretácii komplexnej premennej  $p$  v Laplaceovej transformácii, kde  $p$  je operátor derivácie funkcie podľa času ako aj akustičnosti, že v teórii diskretných sústav táto operácia nie je definovaná.  $p$ -rovinu mapujeme do  $z$ -roviny použitím substitúcie

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{2 + pT}{2 - pT}$$

$$H(z) = H_a(p) \Big|_{p = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

Vertikálna os  $p$ -roviny  $j\omega$  sa zobrazí ako jednotková kružnica  $z$ -roviny, bod  $p = 0$  do bodu  $z = 1$  a body  $p = \pm\infty$  do bodu  $z = -1$ . Ľavá polrovina  $p$ -roviny sa transformuje do vnútra jednotkovej kružnice a pravá polrovina mimo jednotkovej kružnice v  $z$ -rovine.



## 50. Hlavné výhody a nevýhody FIR a IIR filtrov.

### Digitálne IIR filtre:

#### *Výhody:*

- a) oproti FIR filtrom majú nízky rád prenosovej funkcie
- b) malé oneskorenie pri spracovaní vstupnej vzorky
- c) malé nároky na pamäť pri výpočte koeficientov
- d) jednoduché metódy návrhu, ktoré využívajú prenosové vlastnosti analógových filtrov s použitím analógovo-digitálnych transformácií
- e) k digitálnemu filteru možno nájsť analógový ekvivalent
- f) môžu realizovať fázovacie sústavy

#### *Nevýhody:*

- a) nemôžu mať lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku v celom frekvenčnom rozsahu
- b) sú spravidla vhodné len na základné typy filtrov DP, HP, PP, PZ
- c) môžu nastať problémy so stabilitou
- d) malá použiteľnosť pre adaptívne spracovanie
- e) veľká citlivosť na kvantovanie

### Digitálne FIR filtre:

#### *Výhody:*

- a) sú vždy stabilné
- b) možnosť realizácie lineárnej fázovej frekvenčnej charakteristiky, z čoho vyplýva konštantné skupinové oneskorenie
- c) sú vhodné na realizáciu špeciálnych operácií (derivátor, HT)
- d) menšia citlivosť na kvantovanie koeficientov
- e) sú vhodné pre adaptívne algoritmy

#### *Nevýhody:*

- a) vysoký rád prenosovej funkcie
- b) veľké oneskorenie pri spracovaní vstupnej vzorky
- c) veľké nároky na pamäť pri výpočte koeficientov
- d) optimalizačné iteračné metódy sú výpočtovo náročné
- e) neexistuje analógový ekvivalent

*Vypracoval: dawnermeister@gmail.com*

*22. decembra 2007*