

Nástroje na opis vlastností signálov a systémov (korelácia, konvolúcia, ESD, PSD...).

Signály

1. Náhodné (stochastické) – nevieme napísať vzorcom, ale vieme ako vyzerá (napr. šum)
 - a. Stacionárne
 - b. Nestacionárne
 - c. ergodické
2. Nenáhodné (deterministické) – poznáme hodnotu signálu v každom okamžiku, dajú sa popísať funkciou času
 - a. Periodické – majú diskrétné spektrum
 - i. Harmonické - napr. sin, cos
 - ii. neharmonické
 - b. Neperiodické – majú spojité spektrum
 - c. Kvázi-periodické – naspĺňajú podmienku periodicity, čo znamená. Že aspoň pre jednu dvojicu frekvencií je ich pomer iracionálne číslo

Rozdelenie podľa stredného normovaného výkonu (energie):

Výkonové signály

- sú to periodické signály (Fourrierov rad), majú nenulový, avšak konečný výkon
- stredný normovaný výkon je $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\bar{x}(t)|^2 dt$ [W]
- Parsevalova teoréma – celkový výkon signálu vo frekvenčnej oblasti sa rovná celkovému výkonu signálu v časovej oblasti $P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

$$\text{Poznámka : } |c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Energetické signály

- sú to neperiodické signály (Fourrierova transformácia), majú nenulovú, avšak konečnú energiu
- stredná normovaná energia je $E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\bar{x}(t)|^2 dt$ [J]
- Parsevalova teoréma – celková energia reálneho signálu vo frekvenčnej oblasti sa rovná celkovej energii signálu v časovej oblasti $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(f)|^2 df$

PSD (power spectral density) = Výkonová spektrálna hustota:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$x(t) \overset{FR}{\leftrightarrow} X(f)$$

$$PSD = |X(f)|^2 = G_x(f) - \text{nezáporná a párna}$$

$$G_x - \text{výkonová spektrálna hustota } \left[\frac{W}{Hz} \right]$$

$$G_x(f) = \sum |c_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

$$n = -\infty$$

c_n - komplexné koeficienty

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) df$$

jednostranná dvojstranná

$$PSD = G_x(f) = |X(f)|^2$$

▪ Vlastnosti:

- $\sigma_x(f) \geq 0$
- $\sigma_x(f) = \sigma_x(-f)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(f) df = P_x$
- $\sigma_x(f) \rightarrow F.T.^{-1} \rightarrow R_x(\tau)$

ESD (energy spectral density) = Energetická hustota spektra:

- Výkonnosť komunikačného signálu závisí od energie signálu
- Výkon udáva rýchlosť akou je energia prenášaná
- Vysielame signály s konečnou energiou, pričom platí, že čím väčšia energia, tým lepšia detekovateľnosť

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$ESD = |X(f)|^2 = \psi_x(f) \left[\frac{J}{Hz} \right]$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} \psi_x(f) df$$

jednostr. dvojstr.

$$ESD = \psi_x(f) = |X(f)|^2$$

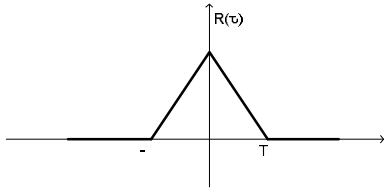
▪ Vlastnosti:

- $\psi_x(f) \geq 0$
- $\psi_x(f) = \psi_x(-f)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(f) df = E_x$
- $\psi_x(f) \rightarrow F.T.^{-1} \rightarrow R_x(\tau)$

Autokorelačná funkcia

- Vyjadruje mieru podobnosti signálu so samým sebou, miera podobnosti do akej miery sa signál podobá, ak ho posunieme o T
 - Vzájomná korelácia = miera podobnosti medzi dvoma alebo viacerými signálmi
- Je definovaná pre (Predpokladáme reálne signály):

- Výkonové signály (periodické, stochastické):

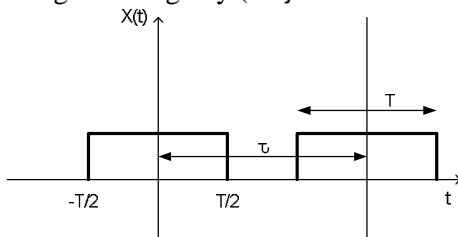


$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt$$

▪ Vlastnosti:

- $R_x(0) \geq R_x(\tau)$ - maximum má v 0
- $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ - je párna
- $R_x(0) = P_x$
- $R_x(\tau) \rightarrow F.T. \rightarrow G_x(f) = PSD = |X(f)|^2$

- Energetické signály (majú konečnú Energiu, konečný počet prototypov):



$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt$$

▪ Vlastnosti:

- $R_x(0) \geq R_x(\tau)$
- $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
- $R_x(0) = E_x$
- $R_x(\tau) \rightarrow F.T. \rightarrow \psi_x(f) = ESD = |X(f)|^2$

Model kanála.

Prenosová funkcia kanála:

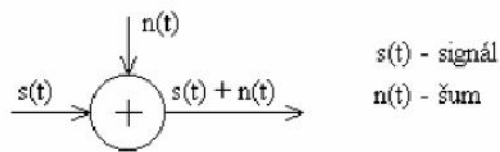
ZÁKLADNÉ PÁSMO	PRELOŽENÉ PÁSMO
$H(f) = \begin{cases} 1, & f \leq W \\ 0, & f > W \end{cases}$	$H(f) = \begin{cases} 1, & f \pm f_n \leq \frac{W}{2} \\ 0, & f + f_n , f - f_n > \frac{W}{2} \end{cases}$

W – frekvenčné pásmo

AWGN ŠUM

Najroširenejším modelom šumu ktorý sa používa pre modelovanie reálnych komunikácií je šum AWGN (Additive White Gaussian Noise). AWGN šum sa pripočítava ku prenášanému signálu na

vstupu. AWGN šum ovplyvňuje rovnako celé spektrum a jeho výkon je nekonečne veľký. AWGN vzniká z rôznych zdrojov ako napríklad tepelný šum spôsobený pohybom atómov.



$$G(f) = \frac{N_0}{2}$$

AWGN šum je opísaný takouto dvojstrannou výkonovou hustotou spektra

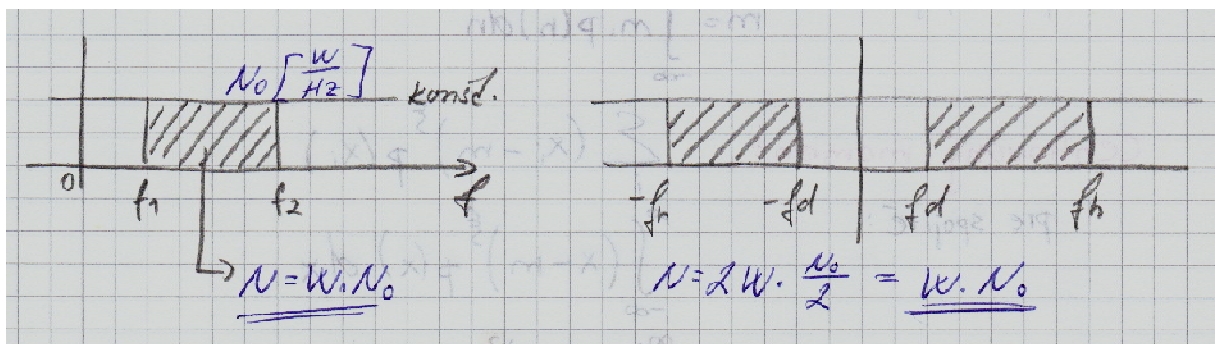
Na výstupe kanála sa prejaví ako šumový výkon

$$N = 2W \frac{N_0}{2} = WN_0$$

Kde N_0 je jednostranná výkonová hustota spektra.

Kapacita Gaussovho kanála je

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bit/s}$$



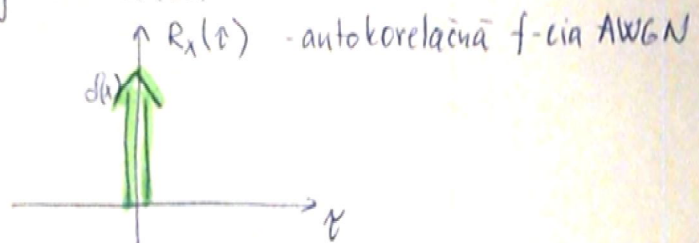
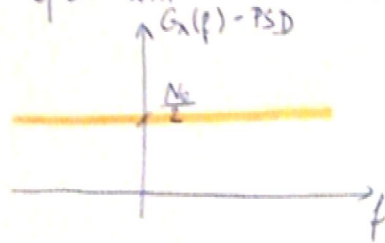
AWGN

- prirodny tepelny šum
- je spôsobeny tepelným pohybom elektrónov, nemožno ho eliminovať, dá sa popísať Gaussovým rozdelením s nulovou strednou hodnotou

$$X \sim N(a, \sigma^2)$$

- $a = E(x)$ - stredná hodnota
- $\sigma^2 = D(x)$ - disperzia
- σ - smerodajná odchýlka

- spektrum AWGN šumu je konštanta:



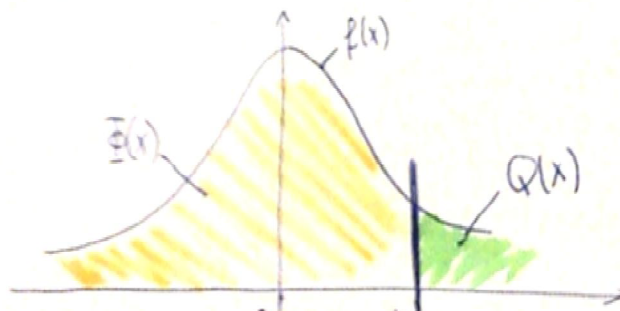
- N_0 - jednosmerná výkonová hustota spektra
- $G_x(f) = \frac{N_0}{2}$ - dvojstranná výkonová hustota spektra

- hustotová funkcia

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

- distribučná funkcia

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$



chybová funkcia

komplementárna chybová funkcia

$$\Phi(x) + Q(x) = 1$$

pre $N(0,1)$:

chybová f-cia $F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ $F(x) = P(X \leq x) = \Phi(x)$

komplement. chybová f-cia $Q(x) = Q\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ $Q(x) = P(X \geq x)$

Praktické definície frekvenčného pásma.

FREKVENČNÉ PÁSMA

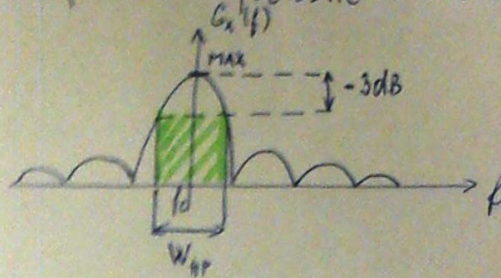
$$G_x(f) = T \left\{ \frac{\sin[\pi(f-f_c)T]}{\pi(f-f_c)T} \right\}^2$$

T - doba impulzu
 f_c - nosná frekvencia

ROZDELENIE

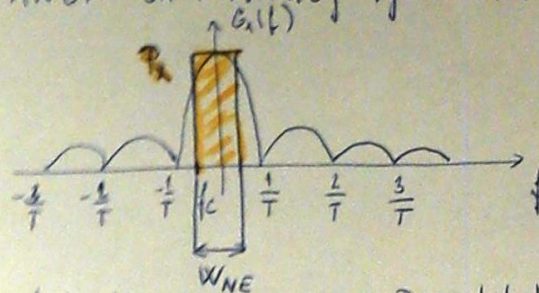
- ① W_{HP} (Half Power) - pásmo, v ktorom poklesne PSD o 3dB (na $\frac{1}{2}$)

$$W_{HP} = \frac{1}{2} PSD$$

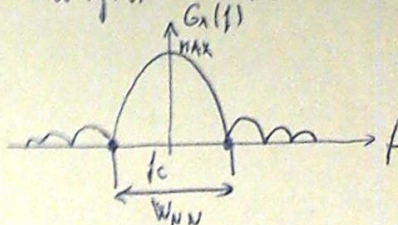


- ② W_{NE} (Noise Equivalent) - pásmo, v ktorom má AWGN šum rovnaký výkon ako celkový výkon signálu

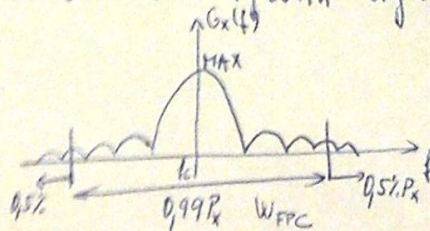
$$W_{NE} = \frac{P_x}{\max\{G_x(f)\}}$$



- ③ W_{NN} (Null to Null) - pásmo medzi hlavnými uzlami PSD (okolo f_c)



- ④ W_{FPC} (Fractional power containment) - pásmo, v ktorom sa nachádza 99% výkonu signálu
 - symetricky okolo f_c



- ⑤ W_{BPSD} (Bounded PSD) - pásmo, v ktorom PSD nesmie prevýžiť stanovenú hodnotu voči max

- ⑥ W_{ABS} (Absolute pásmo)
 - mimo toto pásmo je $G_x(f) = 0$
 - v tomto pásme sme schopný nič o odmerať

Optimálny prijímač.

- AWGN
- Nie je použité samoopravné kódovanie (neexistuje väzba)
- Cieľom je tzv. tvrdé rozhodnutie, tvrdá detekcia

Binárne signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$, ktoré zodpovedajú binárnym symbolom a sú prenášané v časovom intervale $\langle 0; T \rangle$ môžeme zapísať:

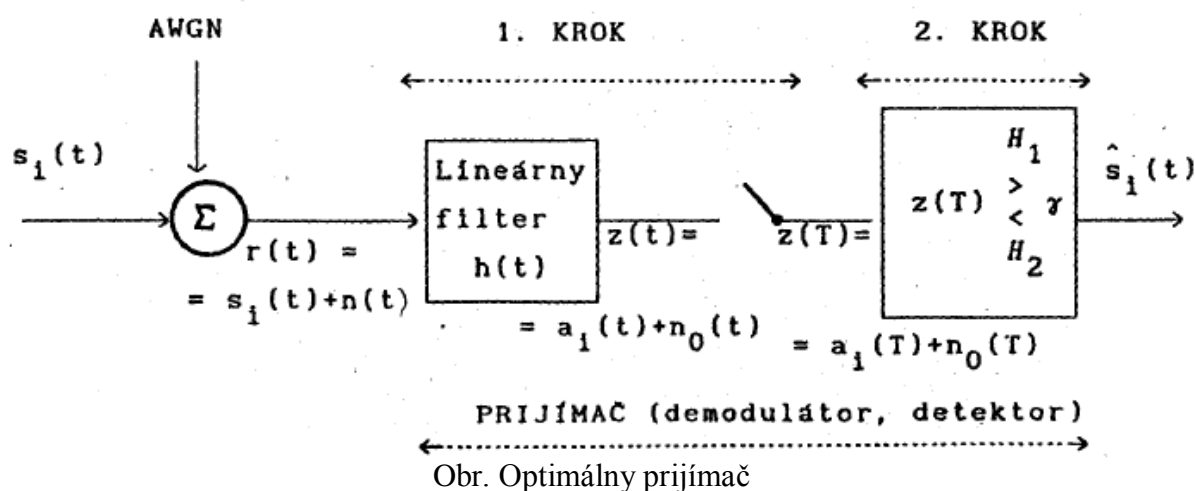
$$s_1(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 \leq t \leq T & \text{pre } 1 \\ s_2(t), & 0 \leq t \leq T & \text{pre } 0 \end{cases}$$

Prijatý signál $r(t)$ môžeme vyjadriť vzt'ahom:

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 1, 2; \quad 0 \leq t \leq T$$

Pričom $n(t)$ predstavuje šum AWGN.

Na obr. sú ilustrované dva kroky, ktoré je treba vykonať pri detekcii:



1.KROK – TRANSFORMÁCIA

Transformácia $r(t)$ na vzorku $z(t=T)$. Dá sa uskutočniť lineárnym filtrom, za ktorým je zapojený vzorkovací obvod. Ak chceme dostať optimálny spôsob príjmu, vtedy treba použiť buď spriahnutý filter, alebo korelátor. Na začiatku každého intervalu T sú počiatočné podmienky filtra alebo korelátora nastavené na nulové hodnoty. Na konci intervalu T sa na výstupe kroku 1 objaví vzorka $z(T)=a_i(T)+n_0(T)$, kde $a_i(T)$ je zložka spôsobená signálom $s_i(t)$ a $n_0(T)$ je zložka spôsobená šumom.

Spriahnutý filter:

Je lineárny filter zostrojený s cieľom maximalizovať pomer výkonu signálu k výkonu šumu (odstup signál-šum) na svojom výstupe pre konkrétny tvar signálu. $SNR = \frac{S}{N} \Rightarrow$
maximalizujeme

E je energia signálu vstupujúceho do filtra, takže maximum S/N závisí len od energie signálu a nie od jeho tvaru.

Charakteristiky

1. Vo frekvenčnej oblasti – prenosová funkcia

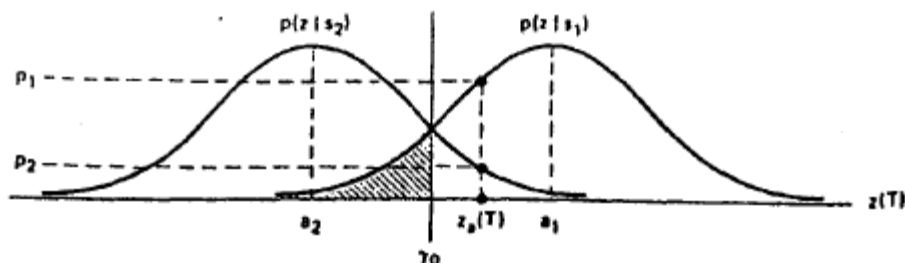
$$H(f) =$$

$k \cdot S^*(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$, kde $S^*(f)$ je komplexne združené k spektru signálu $s_i(t)$

2. V časovej oblasti – impulzová odozva $h(t) = \begin{cases} k \cdot s(T-t) & \text{pre } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

2.KROK - ROZHODOVANIE

Na obrázku rozdelenie vpravo $p(z/s_1)$, znázorňuje hustotu pravdepodobnosti za predpokladu, že bol vyslaný signál s_1 . Podobne $p(z/s_2)$ znázorňuje hustotu pravdepodobnosti $z(T)$ za predpokladu, že bol vyslaný signál s_2 .



Obr 2. Podmienené hustoty pravdepodobnosti

V druhom kroku detekcie treba $z(T)$ porovnať so zvolenou hraničnou hodnotou γ tak, aby bolo možné odhadnúť, ktorý zo signálov s_1, s_2 bol vyslaný. Rozhodnutie možno symbolicky označiť:

$$\begin{matrix} H_1 \\ z(T) > \gamma \\ H_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{kde } H_1, H_2, \text{ sú dve možné hypotézy,} \\ H_1 - \text{ bol vyslaný } s_1, H_2 - \text{ bol vyslaný } s_2. \end{matrix}$$

Zvolenie rozhodovacej hranice γ – rozhodovacie kritériá MAP a ML:

γ_0 – označuje optimálnu hranicu pre rozhodovanie

MAP (Maximal Aposteriory Prob.)

$$\begin{matrix} H_1 \\ P(s_1)p(z/s_1) > P(s_2)p(z/s_2) \\ H_2 \end{matrix}$$

$$\gamma_0 = \left(\ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)} - \frac{a_2^2 - a_1^2}{2\sigma_0^2} \right) \cdot \frac{\sigma_0^2}{a_1 - a_2}$$

ML (Maximal Likelihood)

$$P(s_1) = P(s_2) \rightarrow \begin{matrix} H_1 \\ p(z/s_1) > p(z/s_2) \\ H_2 \end{matrix}$$

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

GFT a priestor signálov.

GFT je zovšeobecnená Fourierova Transformácia. Pracuje s energetickými signálmi a ortogonálnymi funkciami.

Signálna abeceda s M prvkami: $S = \{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$

Báza: $\{\psi_j(t)\}, j = 1 \dots N, N \leq M$

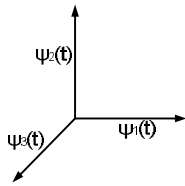
$$s_1(t) = a_{11}\psi_1(t) + a_{12}\psi_2(t) + \dots + a_{1N}\psi_N(t)$$

$$s_M(t) = a_{M1}\psi_1(t) + a_{M2}\psi_2(t) + \dots + a_{MN}\psi_N(t)$$

$$GFT: s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}\psi_j(t), i = 1 \dots M, N \leq M \quad \text{a} \quad a_{ij} = \frac{1}{k_j} \cdot \int_0^T s_i(t) \cdot \psi_j(t) dt$$

Signálový priestor :

- ortogonálný: ak platí $\int_0^T \Psi_i(t)\Psi_j(t) dt = \begin{cases} k & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$



- podmienka ortogonality:

$$\int_0^T \Psi_j(t)\Psi_k(t) dt = K_j \cdot \delta_{jk}, \quad j = 1 \dots N, \quad K_j - \text{konštanta}, \quad k = 1 \dots M$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad K_j = \int_0^T \Psi_j^2(t) dt$$

Hodnota zložky $\Psi_j(t)$ v signále $s_i(t)$ je $a_{ij} = \frac{1}{k_j} \int_0^T s_i(t)\Psi_j(t) dt$

- koeficienty zovšeobecnenej fourrierovej transformácie vyjadrujú podobnosť dvoch signálov. Koeficienty fourrierovej transformácie, ktoré vyjadrujú podobnosť:

$$a_{ij} = \frac{1}{k_j} \int_0^T s_i(t)\Psi_j(t) dt \quad k_j = \int_0^T \Psi_j^2(t) dt$$

- táto transformácia slúži na to, aby sme vedeli vyjadriť signál ako bod alebo vektor

Číslicové modulácie a ich charakteristiky.

Moduláciu možno charakterizovať ako proces, pri ktorom je menená amplitúda, frekvencia, fáza alebo ich kombinácie pri nosnej frekvencii v závislosti od informácie, ktorú chceme preniesť. Nosnú frekvenciu môžeme vo všeobecnosti vyjadriť vzťahom: $s(t) = A(t)\cos[\theta(t)]$, kde $A(t)$ opisuje zmenu amplitúdy v čase a $\theta(t)$ popisuje zmenu uhla v čase. $\theta(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$, kde ω_0 je kmitočet nosnej a $\varphi(t)$ je fáza.

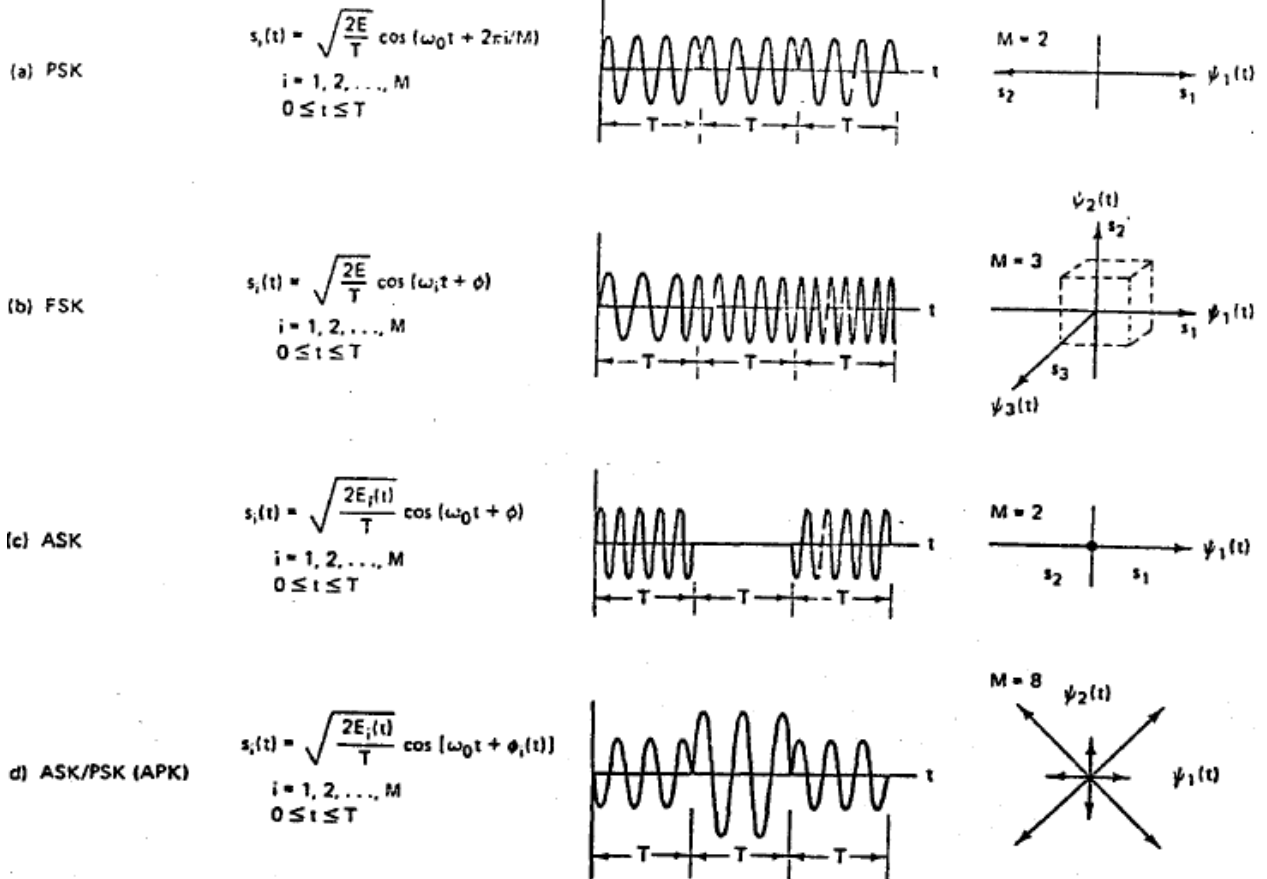
Typy modulácií:

Koherentné	Nekoherentné
Fázové kľúčovanie (PSK)	Diferenčné fázové kľúčovanie (DPSK)
Frekvenčné kľúčovanie (FSK)	FSK
Amplitúdové kľúčovanie (ASK)	ASK
Spojité fázové modulácie (CPM)	CPM
Hybridné modulácie	Hybridné modulácie

Typy detekcie:

- Koherentná detekcia- prijímač využíva pri detekcii znalosť fázy
- Nekoherentná detekcia – prijímač nevyužíva znalosť fázy

Na obrázku sú znázornené príklady najbežnejších spôsobov číslicovej modulácie. Vľavo sú udané analytické výrazy, v strede typické priebehy signálov v čase a vpravo vektorové znázornenie. Vo všeobecnejšom M-árnom prípade modulátor na základe k-bitových symbolov vyprodukuje v určitom časovom intervale jeden z prípustných $M=2^k$ typov signálov. Binárna modulácia ($k=1$) je špeciálny typ M-árnej modulácie.



PSK

Pri PSK moduláciach čiže moduláciach s kódovaním pomocou fázového posunu (alebo zdvihu) dátový signál ovplyvňuje fázu nosnej vlny, pričom jej amplitúda zostáva konštantná. Využitie vo vojenských a komerčných komunikačných systémoch. Všeobecný analytický tvar:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi_i(t)]; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad 0 \leq t \leq T$$

Kde $\phi_i(t)$ nadobúda M diskretných hodnôt daných výrazom $\phi_i(t) = \frac{2\pi i}{M}$; $i = 1, \dots, M$

Pri jednoduchšej dvojtavovej binárnej modulácii BPSK $M=2$ E udáva energiu symbolu, T čas jeho trvania ($0 \leq t \leq T$). Pri BPSK modulujúci (dátový) signál posúva fázu signálu $s_i(t)$ do jedného zo stavov 0 alebo π (180°). Signál môže byť reprezentovaný ako vektor, pričom dĺžka

vektora zodpovedá amplitúde signálu a smer vektora pre všeobecný M-árny prípad zodpovedá fáze. Pre BPSK vektorový diagram znázorňuje dva vektory ležiace oproti sebe (posunuté o 180°). Množiny signálov, ktoré možno znázorniť pomocou takýchto vektorov, sa nazývajú antipodálne.

FSK

Všeobecný výraz má tvar:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \varphi) \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M; \end{matrix}$$

Pričom ω_i nadobúda M diskretných hodnôt a φ ľubovoľnú konštantnú hodnotu. V praxi je zvyčajne M rovné mocnine 2. Množina signálov je charakterizovaná kartézskymi súradnicami tak, že každá zo vzájomne kolmých osí reprezentuje sínusovku s rozdielnou frekvenciou. Množina signálov s takýmito navzájom kolmými vektormi sa nazýva množina ortogonálnych signálov.

ASK:

ASK možno opísať pomocou analytického vzťahu

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, 2, \dots, M \end{matrix}$$

Pričom prvý člen zodpovedajúci amplitúde môže nadobúdať M diskretných hodnôt a člen zodpovedajúci fáze φ nadobúda ľubovoľnú konštantnú hodnotu. Vektorové vyjadrenie využíva tie isté fázovo-amplitúdové polárne súradnice ako PSK. Binárna modulácia ASK tiež nazývaná (on-off keying) predstavuje jednu z prvých foriem číslicovej modulácie.

APK:

Kombinácia ASK a PSK sa označuje ako APK. Možno ju opísať analytickým vzťahom:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos[\omega_0 t + \varphi_i(t)] \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, 2, \dots, M; \end{matrix}$$

V ktorom indexi i vyjadrujú skutočnosť, že ako amplitúda, tak aj fáza nadobúda diskretné hodnoty. V prípade, že je množina M symbolov v dvojrozmernom priestore signálov usporiadaná v navzájom pravouhlej polohe, modulácia sa nazýva kvadrátúrna amplitúdová modulácia QAM.

Koherentné – ak sa vie zosynchronizovať prijímač aj čo do fázy ($\phi \neq 0$)

Nekoherentné – v opačnom prípade ($\phi = <0, 2\pi$))

M počet stavov modulácie $M=2^k$

k počet bitov v jednom modulačnom symbole

Detekcia - koherentná (musí poznať fázu)

- nekoherentná

1.koherentná BPSK

používa antipodálne signály, 1 ψ

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right)$$

2. koherentná BFSK

používa 2 ortogonálne signály, 2 ψ

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right)$$

Koherentná BPSK má o 3dB nižšiu chybovosť ako koh. BFSK

3. nekoherentná (diferenciálna) DBPSK

$$P_B = \frac{1}{2} e^{-E_B/N_0}$$

O 1dB horšia chybovosť ako koherentná. Používa sa vo WiFi, nevyžaduje synchronizáciu

4. nekoherentná BFSK

$$P_B = \frac{1}{2} e^{-E_B/2N_0}$$

Pre dosiahnutie chybovosti ako koherentná vyžaduje o 1dB nižší pomer $\frac{E_B}{N_0}$

5. koherentná MPSK

chyba na symbol $P_S(M) \cong 2Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$ [rad]

6. nekoherentná DMPSK

$$P_S(M) \cong 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}} \sin\frac{\pi}{\sqrt{2}M}\right)$$

7. koherentná MFSK

$$P_S(M) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)$$

8. nekoherentná MFSK

$$P_S(M) \leq \frac{1}{M} e^{-\frac{E_B}{N_0}} \sum_{j=2}^M (-1)^j \binom{M}{j} e^{\left(\frac{E_S}{jN_0}\right)}$$

Pre ortogonálne modulácie (MFSK)

$$P_B = \frac{\frac{M}{2}}{M-1} \cdot P_S = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_S$$

Pre neortogonálne modulácie (MPSK)

$$P_B = \frac{P_S}{\log_2 M} = \frac{P_S}{k}$$

Konvolučné kódy a ich dekódovanie.

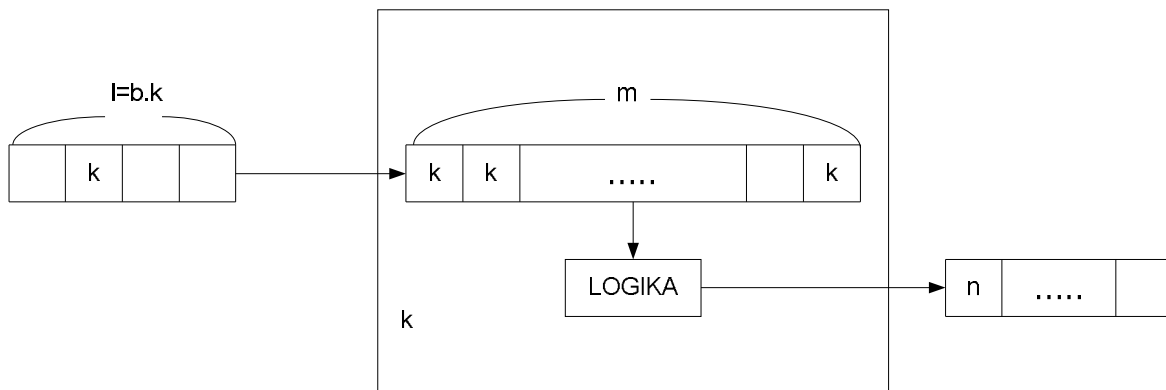
Konvolučné kódovanie

- používajú sa v prostredí, ktoré sa vyznačuje náhodným výskytom chýb
- konvolučné kódy (n,k,K): k – info bitov, n – bitové kódové slovo, K-kódové ohraňenie
 - kódové slovo závisí aj od predchádzajúcich k – tic info. bitov (pamäťové kódy)
 - spracovávajú info. sériovo – pomerne jednoduchá realizácia pomocou klopných obvodov (tzv. flip-flop)
- podmnožina lineárnych stromových (neblokovaných) kódov
- konvolučný kóder pracuje ako FIR filter nad poľom GF(2)
- vstupnú polonekonečnú postupnosť rozdeľujeme na zábery (dĺžky n) informačnej postupnosti dĺžky k-bitov
- charakteristiky:

– rýchlosť (efektivita) kódu $R = \frac{k}{n}$

– efektívna rýchlosť kódu $R_{ef} = \frac{l}{(l+m-1).n}$ l – vstupná sekvencia bitov, Ref < R

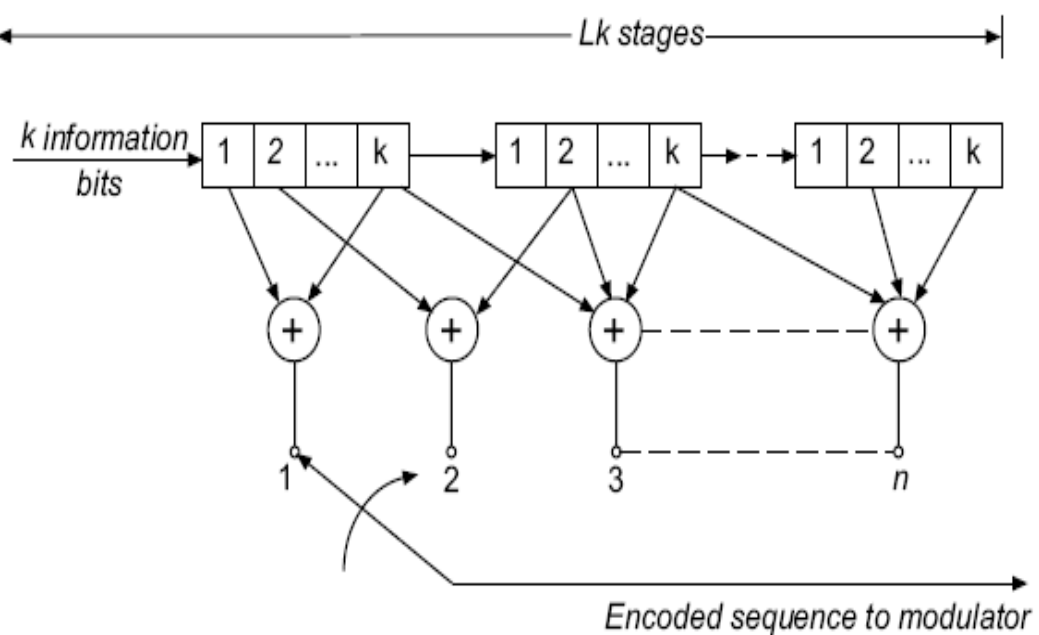
– kódové ohraňenie- udáva počet buniek posuvného registra $K = m.k$



Všeobecná štruktúra konvolučného kódera:

- v každom takte je do konv. kódera vsunutá k-tica bitov
- každej k-tici vstup. bitov je priradená n-tica výstupných

- L – počet k -tic, ktoré ovplyvnia výstupnú n -ticu – tzv. dĺžka kódového ohraničenia



Vlastnosti konvolučných kódov

Systematické KK sú také, ktoré vo výstupnom kódovom slove obsahujú vstupné slovo. Majú menšiu voľnú vzdialenosť ako nesystematické. Systematické KK nemôžu byť katastrofické.

Katastrofické šírenie chýb – na základe konečného počtu chybných kódových symbolov na vstupe vznikne na výstupe nekonečný počet chybné dekódovaných bitov.

KK je katastrofický, ak jeho generujúce polynómy majú spoločného deliteľa (polynómy so stupňom aspoň 1).

V stavovom diagrame môžeme nájsť katastrofickú chybu, ak niektorá uzavretá slučka má nulovú Hammingovu vzdialenosť od postupnosti samých núl.

KK je nekatastrofický ak platí:

$$G(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)]$$

$$NSD[g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)] = 1$$

Príklady

Uvažujme KK zadaný $G(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)]$.

KK je opísaný maticou $[x^7+x^4+x^3, x^4+x^2+x+1]$. Použitím Euklidovho algoritmu zistíte, či je daný KK katastrofický. Určite polynómy, pomocou ktorých dokážeme rekonštruovať správy.

$$(x^7+x^4+x^3):(x^4+x^2+x+1)=(x^3+x) \text{ zvyšok } (x^3+x^2+x)$$

$$(x^4+x^2+x+1):(x^3+x^2+x)=(x+1) \text{ zvyšok } (x^2+1)$$

$$(x^3+x^2+x):(x^2+1)=x+1 \quad \text{zvyšok } 1$$

$$(x^2+1):1=(x^2+1) \quad \text{zvyšok } 0 \quad \rightarrow \quad \text{kód je nekatastrofický}$$

Ak chceme určiť polynómy na rekonštruovanie správ vychádzame zo vzťahov

$$NSD = b_1(x)g_2(x) + b_2(x)g_1(x) \quad i(x) = b_1(x)c_1(x) + \dots + b_n(x)c_n(x)$$

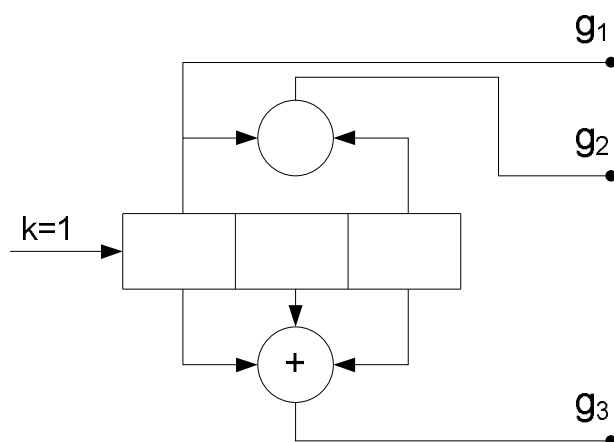
Po dosadení do prvého vzťahu dostaneme

$$1 = b_1(x)(x^4 + x^2 + x + 1) + b_2(x)(x^7 + x^4 + x^3)$$

Spôsoby opisu konvulčných kódov

1. hardwarová realizácia
2. vektorový opis väzieb
3. impulzová odozva
4. polynóm
5. stavový diagram
6. stromový diagram
7. mriežka

1. hardwarová realizácia = linkový diagram



$$g_3(x) = 1 + x + x^2$$

vstupná postupnosť: $i(101) = 1 + x^2$

$$c_1(x) = i(x).g_1(x) = (1 + x^2).(1) = 1 + x^2$$

$$c_2(x) = i(x).g_2(x) = (1 + x^2).(1 + x^2) = 1 + x^4$$

$$c_3(x) = i(x).g_3(x) = (1 + x^2).(1 + x + x^2) = 1 + x + x^3 + x^4$$

výsledné kódové slovo:

$$c(x) = c_1(x) + c_2(x) + c_3(x)$$

c1(x)	1. x0	0. x1	1. x2	0. x3	0. x4
c2(x)	1. x0	0. x1	0. x2	0. x3	1. x4
c3(x)	1. x0	1. x1	0. x2	1. x3	1. x4

$$c(x) = (111) + (001).x + (100).x^2 + (001).x^3 + (011).x^4$$

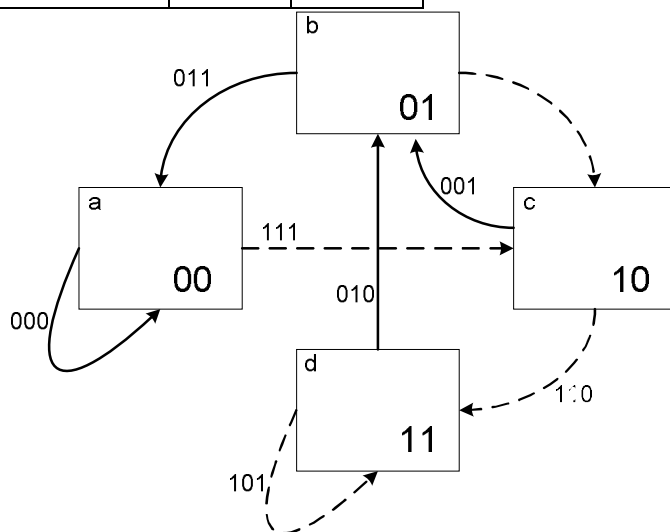
5. opis pomocou stavového diagramu

- každý krúžok diagramu predstavuje jeden stav kódera (stavov je 2^{m-1}).
- Šípky označujú prechody do nasledujúceho stavu - typ čiary zodpovedá vstupným bitom čiarkovaná - bit 1, plná čiara - bit 0
- cesty medzi stavmi reprezentujú výstupné slovo

$m-1=3-1=2 \rightarrow 2^{m-1}=4 \rightarrow$ potrebujeme 4 stavy

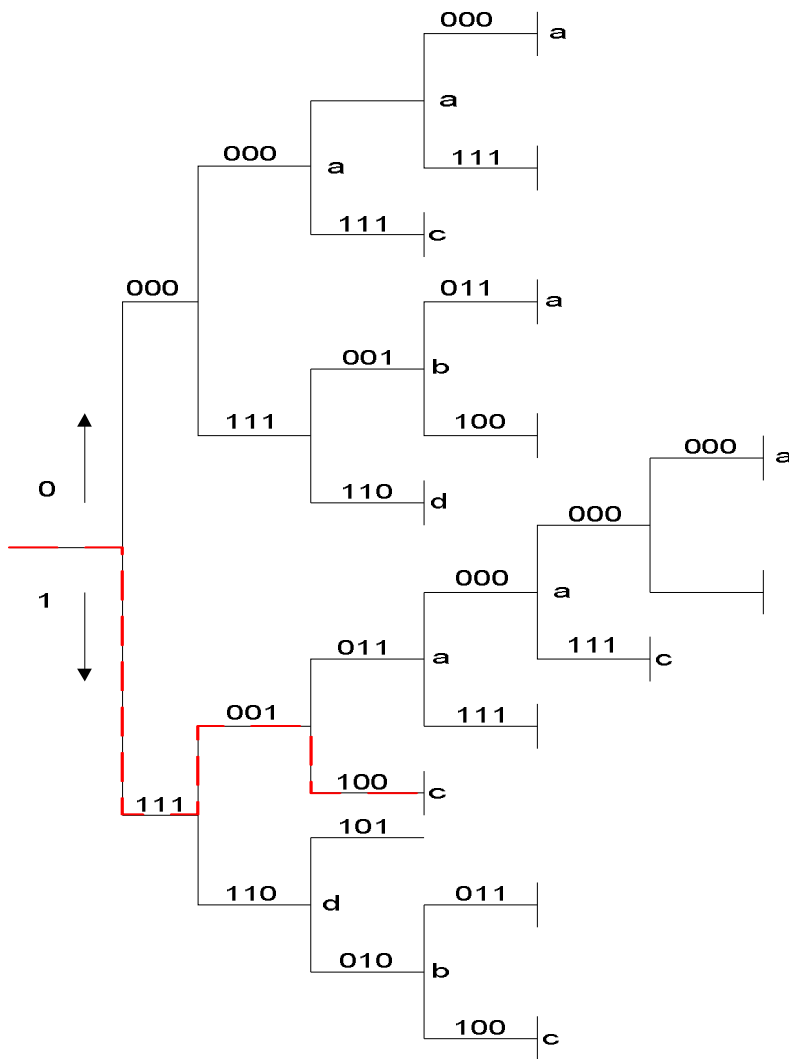
Súčasný stav	Nasledujúci stav	
	0	1
00	00	10
01	00	10
10	01	11
11	01	11

Súčasný stav	0	1
00	000	111
01	011	100
10	001	110
11	010	101

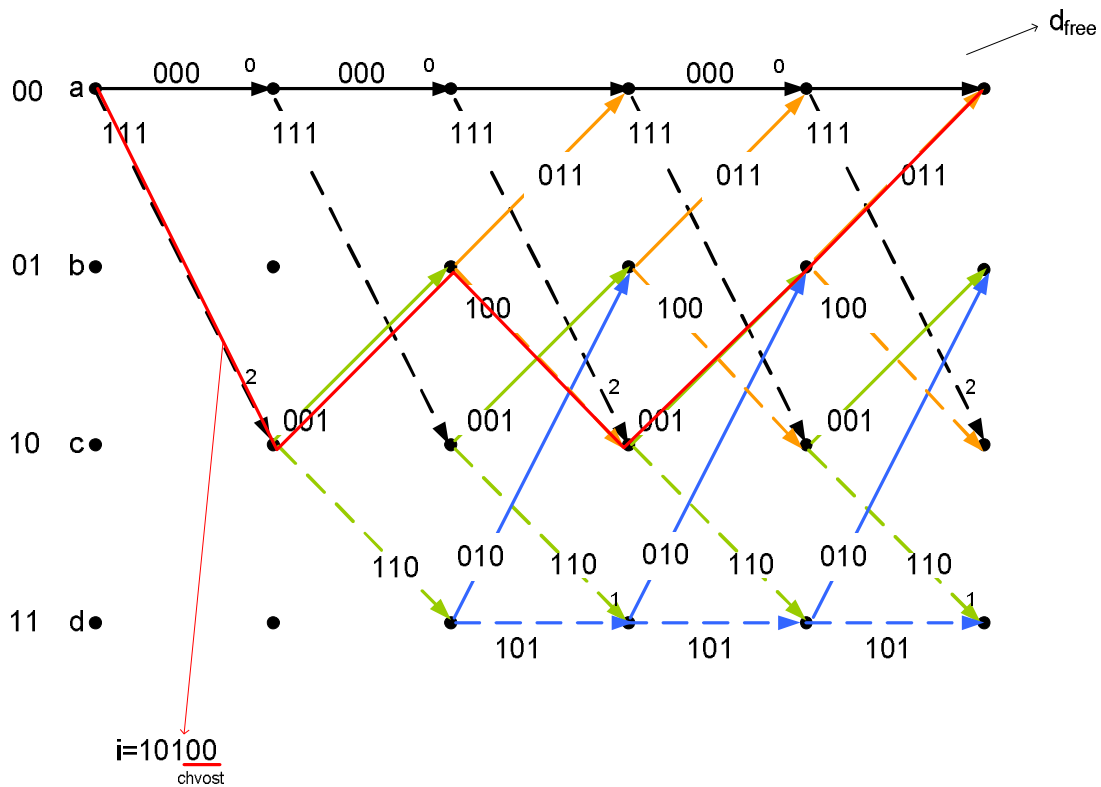


6. Stromový diagram

- Zobrazuje históriu kódovania v čase, vstupný bit vstupuje do diagramu vľavo a postupným prechádzaním diagramu vpravo dostávame výstupné slová. Po vetvách sa pohybujeme pre bit 0 hore a pre bit 1 dole. Každá vetva má priradené výstupné slovo.
- Pri kódoch s mnohými stavmi sa rozvíja na veľkú plochu a po istom čase sa sekvencia v strome začne opakovať
- Na obrázku je uvedený stromový diagram pre kóder z už uvedeného príkladu a kódovanie $i=101$
- výsledné kódové slovo $c=111\ 001\ 100$

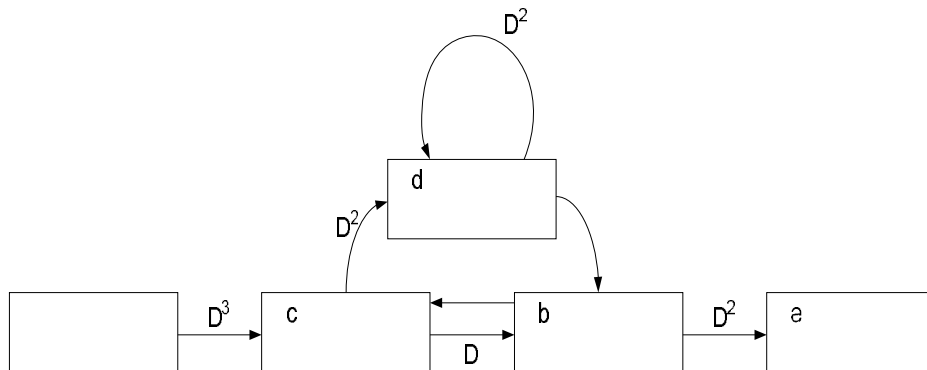


7. opis pomocou mriežky
- všeobecne preferovaný typ
 - zobrazuje časovú os a zároveň si zachováva kompaktnosť
 - hrúbka čiary zodpovedá vstupnému bitu čiarkovaná pre bit 0 a plná čiara pre bit 1
 - každá vetva má priradené výstupné slovo
 - diagram má toľko riadkov, koľko má kódový register stavov
 - d_{free} = voľná vzdialenosť, je to najmenšia Hammingova vzdialenosť dvoch kódových slov (udáva, koľko chýb opravi daný kód na 1 kódovom ohrazení)



Modifikačný stavový diagram

- na určenie voľnej vzdialenosti zo stavového diagramu



- na obrázku vidíme, že treba ohodnotiť každú vetvu mocninou premennej D. Exponent D nám určuje Hammingovu vzdialenosť od nulového slova.
- Na výpočet voľnej vzdialenosti používame stavové rovnice:

$$X_c = D^3 X_a + D X_b$$

$$X_b = D X_c + D X_d$$

$$X_d = D^2 X_c + D^2 X_d$$

$$X_e = D^2 X_b$$

$$T(D) = \frac{X_e}{X_a} = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}$$

- Prenosová funkcia:
- Zo stavových rovníc vyjadríme T(D)

$$X_b = DX_c + DX_d$$

$$X_d = D^2 X_c + D^2 X_d \quad \rightarrow \quad X_d = DX_b$$

$$X_e = D^2 X_b \quad \rightarrow \quad X_b = \frac{X_e}{D^2}$$

$$\begin{aligned} X_e &= D^2 X_b = D^2 (DX_c + DX_d) = D^3 (X_c + X_d) = D^3 (X_c + DX_b) = D^3 \left(X_c + D \frac{X_e}{D^2} \right) \\ &= D^3 \left(X_c + \frac{X_e}{D} \right) = D^3 \left(D^3 X_a + DX_b + \frac{X_e}{D} \right) = D^3 \left(D^3 X_a + \frac{X_e}{D} + \frac{X_e}{D} \right) = D^6 X_a + 2D^2 X_e \end{aligned}$$

$$T(D) = \frac{X_e}{X_a} = \frac{D^6}{1 - 2D^2} = 1 \cdot D^6 + 2 \cdot D^8 + 4 \cdot D^{10} + 8 \cdot D^{12} + \dots$$

- Z tohoto zápisu môžeme povedať, že zadaný kód sa vyznačuje jedným seldom s Hammingovou vzdialenosťou 6, dvoma sledmi s Hammingovou vzdialenosťou 8, štyrmi sledmi s Hammingovou vzdialenosťou 10,....

Dekódovanie

- existuje niekoľko prístupov ku dekodovaniu konvolučných kódov:

- o sekvenčné dekodovanie – Fanov algoritmus
- o dekodovanie na základe maximálnej pravdepodobnosti – Viterbiho algoritmus

Fanov algoritmus

- Dekóder sleduje jednu cestu v mriežkovom diagrame. Ak príde do bodu, kde jeho rozhodnutie nie je jednoznačné, označí si toto miesto a vyberie sa jednou z dvoch možností. Ak počet nejednoznačných rozhodnutí prekročí stanovenú hranicu, dekóder sa vracia späť k poslednému označenému miestu neistého rozhodnutia a vyberie sa druhou z dvoch ciest. Dekóder sa vracia späť, až kým nenájde správnu cestu – dekóduje celé kódové slovo.
- Dekódovací čas je kvôli návratom späť premenlivý

Viterbiho algoritmus

- Predpoklady pre úspešné použitie: výskyt chýb je zriedkavý, pravdepodobnosť chyby je malá, výskyt chýb je náhodný
- Preferovaný typ dekodovania KK

- je založený na vyberaní najpravdepodobnejšej cesty (cesta s nižšou metrikou) mriežkovým diagramom. Zo všetkých ciest, ktoré vchádzajú do každého stavu v čase ti sa vyberie tá, ktorá má najmenšiu Hammingovu vzdialenosť medzi prijatým kódom a cestou.
- Je to rýchle dekodovanie, čas potrebný na dekodovanie je konštantný, vhodné pre hardwarovú implementáciu

Viterbiho algoritmus.

Najznámejší algoritmus dekódovania konvulučných kódov je Viterbiho algoritmus. Tento algoritmus vyberá v mriežkovom diagrame cestu s najmenšou Hammingovou vzdialenosťou medzi prijatou postupnosťou **w** a postupnosťou symbolov, ktoré sa generujú pri ceste. Dekóder pre každý takt určuje **metriku** t.j. Hammingovú vzdialenosť všetkých možných ciest. Ak do jedného uzla vchádza viac ako jedna cesta, vyberá sa len cesta, ktorá má najmenšiu Hammingovú vzdialenosť. Cesty s horšou metrikou nikdy v ďalšom kroku nenadobudnú lepšiu metriku ako cesty s najlepšou metrikou. Dekódovanie sa končí výberom cesty s najlepšou metrikou spomedzi tých ciest, ktoré prežijú.

základný princíp:

- hľadanie minimálnej Hammingovej vzdialenosti prijatej postupnosti bitov od všetkých možných postupností, ktoré môžeme dostať na výstupe KK
- používa sa Viterbiho algoritmus ktorý využíva opis KK pomocou trelistu
- hľadá sa „cesta“ trelistom, ktorá minimalizuje vzdialenosť od prijatej postupnosti bitov
- v každom uzle sa vyhodnocujú vzdialenosti (tzv. metriky) čiastočných ciest
- ak do uzla vstupujú dve cesty – tá s väčšou metrikou sa vylúči
- pre každú cestu sa počíta akumulovaná metrika (súčet metrik v jednotlivých uzloch)
- cesta s najmenšou akumulovanou metrikou predstavuje postupnosť bitov s minimálnou vzdialenosťou od prijatej postupnosti, t.j. pravdepodobnú vyslanú postupnosť

Opravné schopnosti KK závisia podobne ako u blokových kódov od „vzdialenostných vlastností“ postupností bitov na výstupe KK.

Satelitné systémy.

Základom satelitných systémov je družica (satelit), nachádzajúca sa na stabilnej orbite Zeme. Satelitný systém je vlastne anténny systém, ktorý sa pohybuje, resp. krúži nad Zemou a komunikuje s jednou alebo viacerými pozemnými stanicami. Pri komunikačných satelitných systémoch komunikuje satelit minimálne s dvoma alebo viacerými pozemnými stanicami. Pozemná stanica je rovnako anténny systém umiestnený na (alebo takmer na) Zemi. Prenos dát z pozemnej stanice smerom ku družici je definovaný ako **uplink** (vzostupné spojenie) a prenos dát z družice smerom k pozemnej stanici je definovaný ako **downlink** (zostupné spojenie). Elektronika, ktorá v satelite konvertuje signál z uplink na downlink sa nazýva **transpondér**. Ak transpondér prijímaný signál iba presúva na uplink frekvenciu, ide o **transparentný transpondér**, ak vykonáva aj dodatočnú regeneráciu signálu, ide o **regeneratívny transpondér**.

Porovnanie satelitnej a pozemnej bezdrôtovej komunikácie

Existuje niekoľko rozdielov medzi satelitnou komunikáciou a pozemnou bezdrôtovou komunikáciou, ktorá je ovplyvnená návrhom a prevedením. Porovnaním týchto dvoch typov komunikácií môžeme urobiť nasledujúce závery.

Výhody satelitnej komunikácie:

- Oblasť pokrytia (dosahu) signálom, ktorá ďaleko prekračuje dosah pozemných systémov. Pri použití geostacionárneho satelitu je možné signálom pokryť až 1/4 zemského povrchu.
- Keďže podmienky pri komunikácii satelitu s pozemnou stanicou sú podobné, ako tie pri komunikácii satelitu so satelitom, je možné dosť precízne navrhnuť a zrealizovať komunikačný spoj medzi dvoma satelitmi. Tento potom dáva možnosť smerovať signál medzi satelitmi, čím sa znižuje doba prenosu na minimum a výrazne sa zredukuje počet pozemných smerovacích brán.
- Cena prenosu je nezávislá na vzdialenosti vo vnútri oblasti satelitného pokrytia.
- Je možné využívať dvojbodové, skupinové aj plošné spojenie.
- Aj keď sú satelitné spoje náchylné na jednorázové výpadky alebo pokles kvality prenosu, všeobecne je kvalita prenosu extrémne vysoká.
- Dostupnosť veľkých širokých pásm umožňuje používať vysoké rýchlosti prenosu dát. Satelity nie sú vystavené prírodným katastrofám.

Nedostatky satelitnej komunikácie:

- Schopnosť, nosnosť kozmických lodí ako i pridelené šírky pásma sú limitmi, ktoré vyžadujú kompromisy pri návrhu parametrov satelitov a pozemných staníc.
- U geostacionárnych satelitov sú dlhé doby prenosu signálu, až 1/4 sekundy. Vysoké sú aj počiatkové náklady.

Bilancia linky satelitného systému.

celkový pohľad na systém, všetky kladné aj záporné faktory ovplyvňujúce SNR

Šumové číslo a šumová teplota.

Šum je náhodný alebo systematický vplyv, ktorý pôsobí na signál v prenosovom kanáli.

Kvantitatívne ho vyjadrujeme **šumovým číslom popripade šumovou teplotou.**

Šumové číslo je definované ako

$$\text{šumové číslo} = \frac{\text{SNR na vstupe}}{\text{SNR na výstupe}}$$

kde SNR na vstupe je pomer výkonu signálu ku výkonu šumu na vstupe S/N a SNR na výstupe je je pomer výkonu signálu ku výkonu šumu na výstupe S/N

Pri ideálnom bezšumovom systéme je rovné 1.

Šumová teplota je energia elektrónov náhodne sa pohybujúcich vo vnútri prijímacieho systému.