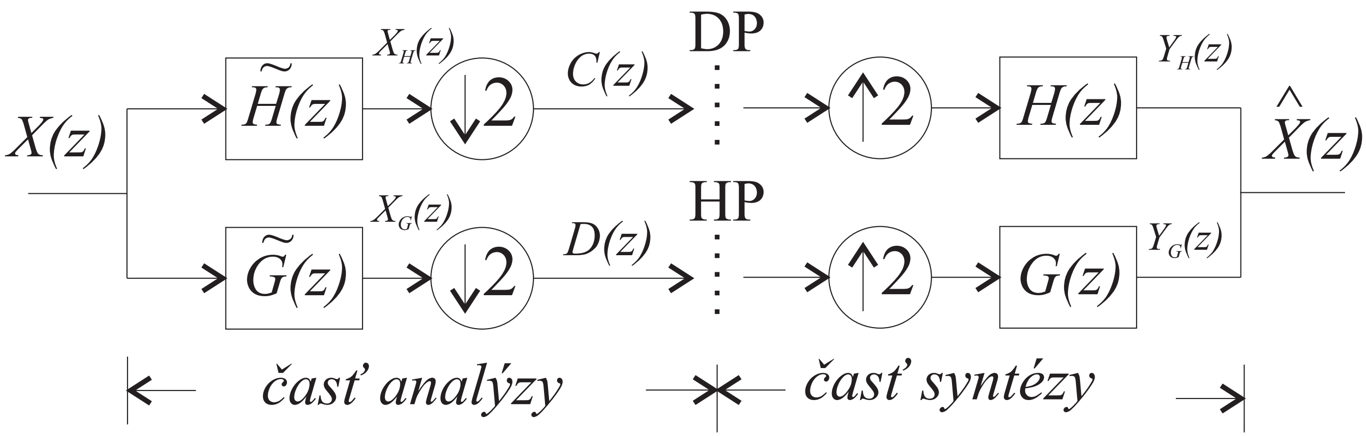
Dvojpásmové banky filtrov



Platí(V1): $c(n) = \sum_k \widetilde{h}(2n-k)x(k) \qquad d(n) = \sum_k \widetilde{g}(n-2k)x(k)$

$$\hat{x}(n) = \sum_k h(n-2k)c(k) + \sum_k g(n-2k)d(k)$$

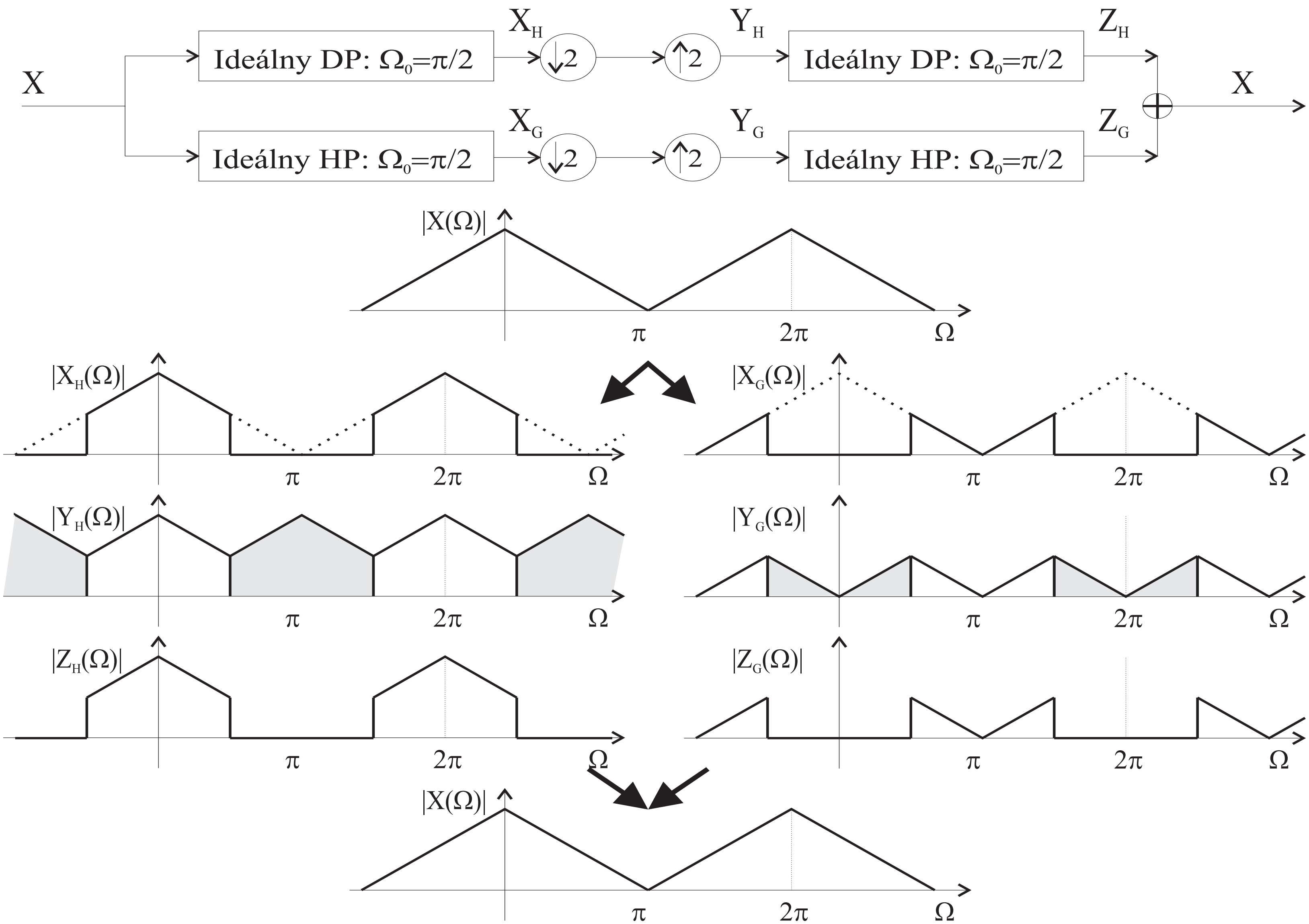
DWT(V2): $c_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k) \qquad d_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

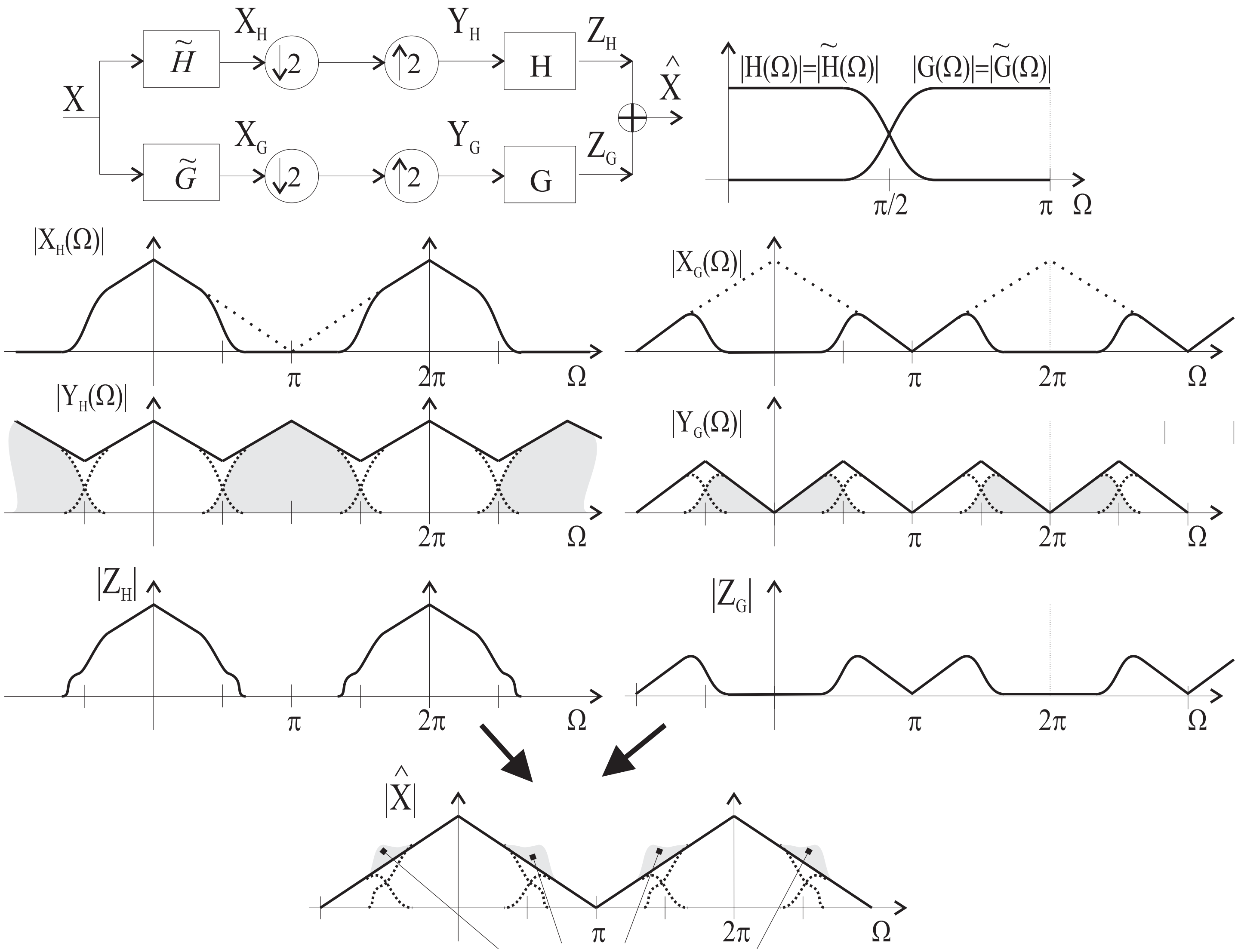
T.J.AK PLATÍ $\widetilde{h}(n) = \widetilde{h}_{mr}(-n) \qquad h(n) = h_{mr}(n)$

$\widetilde{g}(n) = \widetilde{g}_{mr}(-n) \qquad g(n) = g_{mr}(n)$ SÚ V1 a V2 TOTOŽNÉ !!!

Ako dosiahneme úplnú rekonštrukciu?



Ak filtre nie su ideálne?



Pri úplnej rekonštrukcii sa aliasing z DP a HP časti navzájom eliminuje

Polpásmový filter

Polpásmový filter s prenosovou funkciou $P(z)$ je FIR filter pre ktorý platí:

$$P(z) = P(z^{-1}) \qquad\qquad P(z) + P(-z) = 2$$

resp.

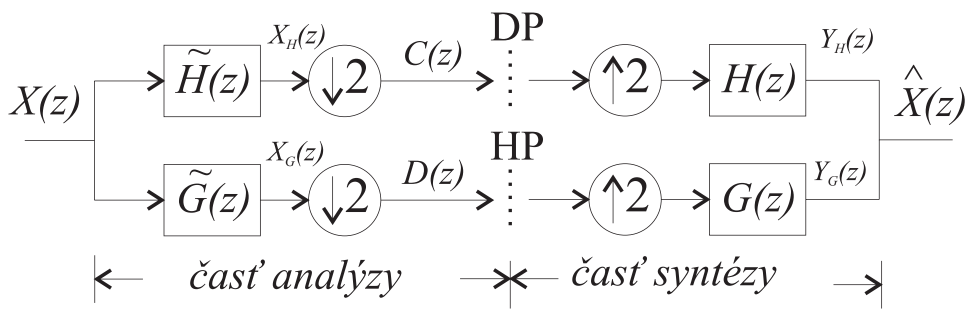
$$P(e^{j\Omega}) = P(e^{-j\Omega}) \qquad\qquad P(e^{j\Omega}) + P(e^{j(\pi-\Omega)}) = 2$$

$$p(n) = p(-n) \qquad\qquad p(n) + (-1)^n p(n) = 2\delta(n)$$

T.j $P(e^{j\Omega})$ je reálna párna funkcia Ω s nepárnou symetriou okolo bodu $[\pi/2, 1]$ a pre odpovedajúcu impulzovú charakteristiku $p(n)$ platí:

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \text{ je párne} \\ p(n) & \text{ináč} \end{cases}$$

Podmienky na úplnú rekonštrukciu pre dvojpásmovú banku filtrov



Popisom signálov v oboch vetvách FB dostávame:

$$X_H(z) = X(z)\tilde{H}(z) \qquad X_G(z) = X(z)\tilde{G}(z)$$

$$C(z) = \frac{1}{2}\left[X_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad D(z) = \frac{1}{2}\left[X_G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$Y_H(z) = C\left(z^2\right)H(z) \qquad Y_G(z) = D\left(z^2\right)G(z)$$

$$\hat{X}(z) = Y_H(z) + Y_G(z) = \ldots = \frac{1}{2}\left[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z)\right]$$

$R_p(z)$ charakterizuje celkový prenos sústavou a $R_a(z)$ aliasing

$$R_p(z) = \tilde{H}(z)H(z) + \tilde{G}(z)G(z) \qquad R_a(z) = \tilde{H}(-z)H(z) + \tilde{G}(-z)G(z)$$

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

1) eliminácia aliasingu $R_a(z)=0$, $\forall z$

2) prenos je nanajvýš oneskorením $R_p(z)=2z^{-l}$, $l \in Z$

<u>Riešením 1. podmienky</u> - eliminácie aliasingu dostaneme napr.:

$$H(z)=\pm cz^m \widetilde{G}(-z) \qquad G(z)=\mp cz^m \widetilde{H}(-z), \; m \in Z$$

<u>Pri riešení 2. podmienky</u> označme

$$P_H(z)=\tilde{H}(z)H(z)$$

Vyjadrime $R_p(z)=\widetilde{H}(z)H(z)+\widetilde{G}(z)G(z)$ pomocou riešenia 1v závislosti od $P_H(z)$:

$$P_H(z)+P_H(-z)(-1)^l = 2z^{-l}$$

Normovaním (centrovaním) $P_H(z)$ pomocou $P(z)=z^l P_H(z)$ dostaneme:

$$P(z)+P(-z)(-1)^{m+l+1} = 2$$

Kde

$$P(z)=z^l \tilde{H}(z)H(z) \qquad P(-z)=z^l \tilde{G}(z)G(z)$$

T.j. všeobecné riešenie podmienky 2 možno formulovať:

Ak normovaný súčin prenosových funkcií DP filtrov v dvojpásmovej banke filtrov tvorí prenosovú funkciu polpásmového filtra a súčet* m+l *je nepárny, potom banka filtrov dosahuje úplnú rekonštrukciu.

Ak chceme sústavu s nulovým oneskorením platia nasledovné tvary vzťahov pre elimináciu aliasingu:

$$H(z) = z^{2k-1}\widetilde{G}(-z) \qquad G(z) = -z^{2k-1}\widetilde{H}(-z)$$

Energeticky komplementárne filtre

Filtre s $H(z)$ a $G(z)$ sú *energeticky komplementárne* ak platí:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 + \left|G\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 = 2$$

Riešenie vo forme kvadratúrnych zrkadlových filtrov(QMF)

Kvadratúrne zrkadlové filtre(QMF) boli v o BF prvýkrát použité v r.1977 (Esteban, Galand) voľbou:

$$H(z)=\tilde{H}(z) \qquad \tilde{G}(z)=\tilde{H}(-z) \qquad G(z)=-\tilde{H}(-z)$$

Aliasing je odstránený, avšak takáto BF podmienku na prenos iba aproximuje, t.j. nedosahuje úplnú rekonštrukciu okrem trivialneho Haarovho prípadu. Názov kvadratúrne zrkadlové filtre pochádza z vlastnosti, že $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ majú zrkadlové prenosové funkcie okolo $\Omega=\pi/2$, pričom sú energeticky komplementárne.

Ortogonálne (paraunitárne) riešenie

Nech $H_0(z)$ je prenosová funkcia a $h_0(n)$ impulzová charakteristika (párnej dĺžky $N = 2l$, $l \in Z$ prototypového DP FIR filtra. Potom BF z neho odvodená vzťahmi:

$$\widetilde{H}(z) = H_0(z) \qquad H(z) = \pm z^{2l-1}\widetilde{G}(-z) = \widetilde{H}\left(z^{-1}\right)$$

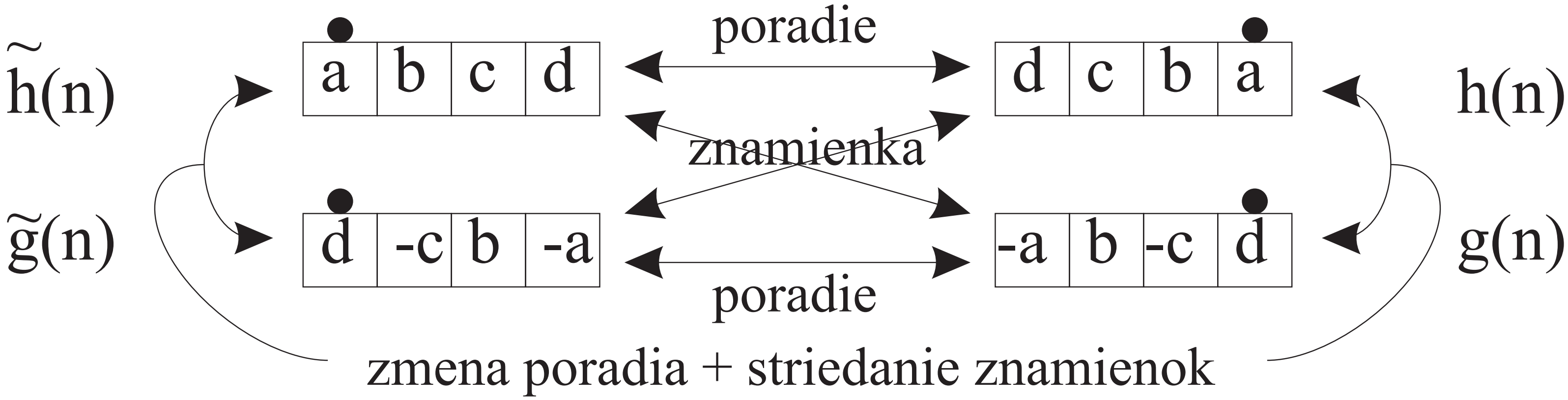
$$\widetilde{G}(z) = \mp z^{-(2l-1)}\widetilde{H}\left(-z^{-1}\right) \qquad G(z) = \mp z^{2l-1}\widetilde{H}(-z) = \widetilde{G}\left(z^{-1}\right)$$

dosahuje úplnú rekonštrukciu za podmienky, že pre $h_0(n)$ platí:

$$\sum_n h_0(n) h_0(n-2k) = \delta(k) \qquad \sum_n h_0(n) = \sqrt{2}$$

Pre takéto riešenie platí:

- má *nulové oneskorenie* avšak sú tu *nekauzálne časti* - ***filtre pre analýzu a syntézu v oboch vetvách majú impulzové charakteristiky časovo obrátené.***
- Oneskorením nekauzálnych filtrov filtrov (vynásobením členom $z^{-(2l-1)}$) dostaneme kauzálnu BF s oneskorením $2l-1$.
- filtre pre analýzu (a analogicky aj pre syntézu) sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom.



Príklad impulzových charakteristík filtrov v ortogonálnej FB s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficieny v n=0.

Poznámka: Ak sústavu začneme navrhovať od syntézy, t.j. $H(z) = H_0(z)$, výsledkom je zámena analyzačnej a syntetizačnej časti FB, t.j. vo vzťahoch na výpočet filtrov sa zamení označenie duálnosti.

Úvaha: Prečo musia byť filtre $H(z) = \widetilde{H}(z^{-1})$, $G(z) = \widetilde{G}(z^{-1})$ takto časovo otočené ?

➔Leboináč nemôžu formovať polpásmový filter, $p(n)$ by nebolo symetrické.

Biortogonálne riešenie

Biortogonálne riešenie umožňuje návrh 2-kanálových bánk filtrov s FIR filtrami s *lineárnou fázou* a *rôznymi dĺžkami impulzovej charakteristiky* filtrov pri analýze a syntéze. Aliasing musí byť nulový:

$$H(z) = \pm z^m \widetilde{G}(-z) \qquad G(z) = \mp z^m \widetilde{H}(-z),\ m \in Z$$

Filtre v jednotlivých vetvách musia formovať polpásmové filter:

$$P(z) = \widetilde{H}(z) H(z) \qquad P(-z) = \widetilde{G}(z) G(z)$$

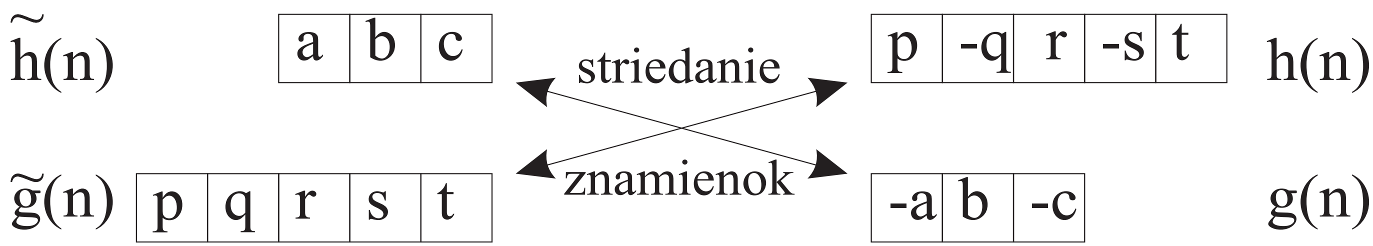
Sú možné tieto tvary riešení(formulované pre analyzačné filtre):

1) oba filtre sú symetrické, nepárnych dĺžok líšiacich sa o nepárny násobok 2
2) jeden filter je symetrický, druhý antisymetrický, oba párnych dĺžok líšiacich sa o párny násobok 2
3) jeden filter je nepárnej, druhý párnej dĺžky, oba majú nuly iba na jednotkovej kružnici. Oba sú symetrické alebo jeden je symetrický a druhý antisymetrický.

Filtre spĺňajú podmienky biortogonality, t.j. sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“:

$$\sum_k h(k)\tilde{h}(2n-k)=\delta(k) \qquad \sum_k g(k)\tilde{g}(2n-k)=\delta(k)$$

$$\sum_k g(k+2m)\tilde{h}(2n-k)=\delta(k) \qquad \sum_k h(k+2m)\tilde{g}(2n-k)=\delta(k)$$



Príklad impulzových charakteristík filtrov v biortogonálnej FB so symetrickými filtrami.

Riešenie filtrov	analýza	syntéza
symetrické	$\tilde{h}(n)$=(1, 2, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -2, 6, -2, -1)	$h(n)$=(-1, 2, 6, 2, -1) $g(n)$=(-1, 2, -1)
Antisymetrické (Kvadratický spline, rbio2.2)	$\tilde{h}(n)$=(1, 3, 3, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -3, 3, 1)	$h(n)$=(-1, 3, 3, -1) $g(n)$=(-1, 3, -3, 1)