Waveletové Rady Diskrétna WT	**=**	**Iterované Banky filtrov**	**←**	**Banky Filtrov**
Dyadická DWT	**=**	**Iterovaná 2-pásmová Banka filtrov**		

Banky filtrov a systémy s rôznym taktovaním

V *systémoch s rôznym taktovaním* (***SRT***, "*multirate systems*") sú vzorky signálu spracovávané v častiach systému s rôznymi *taktovacími frekvenciami*. Zmeny taktovacej frekvencie sú uskutočnené operáciami *decimácie* a *interpolácie*.

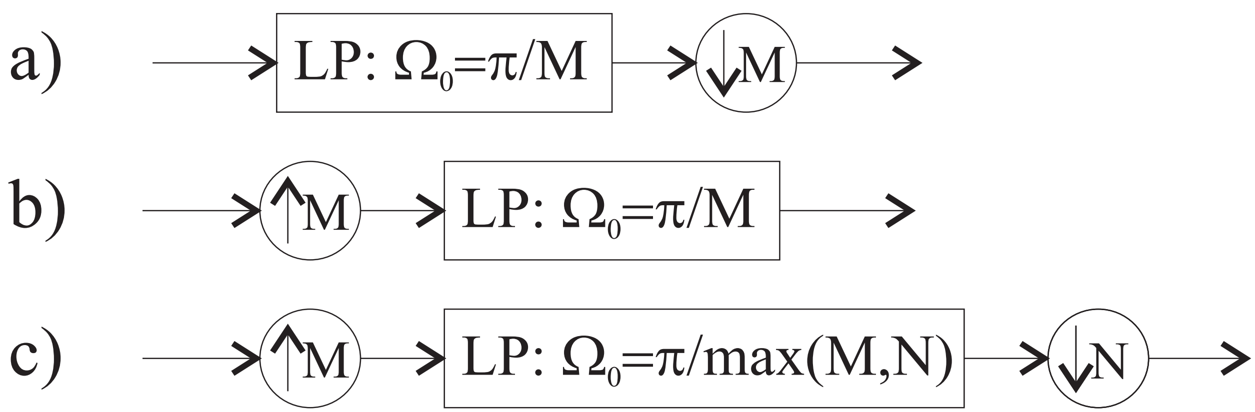
Decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M. Najprv je signál $u(k)$ filtrovaný *antialiasingovým* filtrom prípadne ideálym DP filtrom s hranicou prepúštania $\Omega_0 = \pi / M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je podvzorkovaný. Výsledok po decimácii je:

$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k)$$

Interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M. Signál $x(k)$ je najprv nadvzorkovaný (vložením *M -1* núl medzi každé 2 vzorky) a potom interpolovaný filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi / M$) s imp. charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k)$$

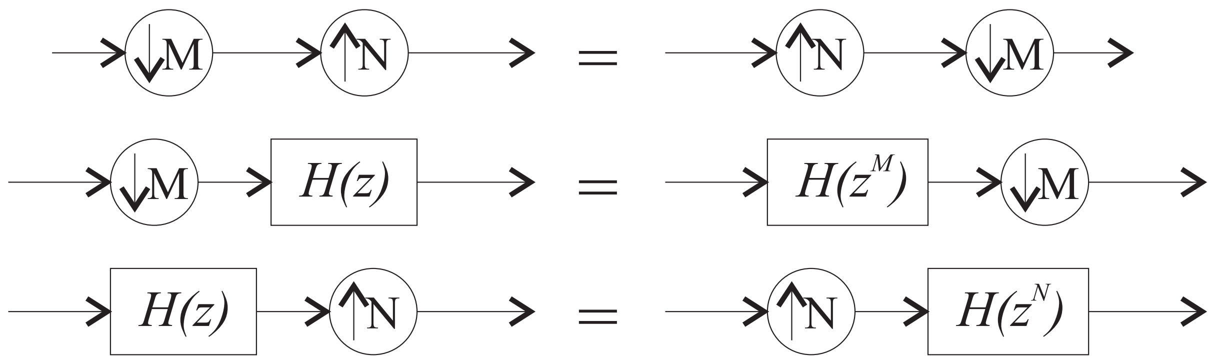
Operácie v SRT a) decimácia b) interpolácia



Požadovaný typ filtra pri : a) decimácii b)interpolácii c) zmene taktovacej frekvencie faktorom M/N

Ekvivalentné štruktúry v SRT

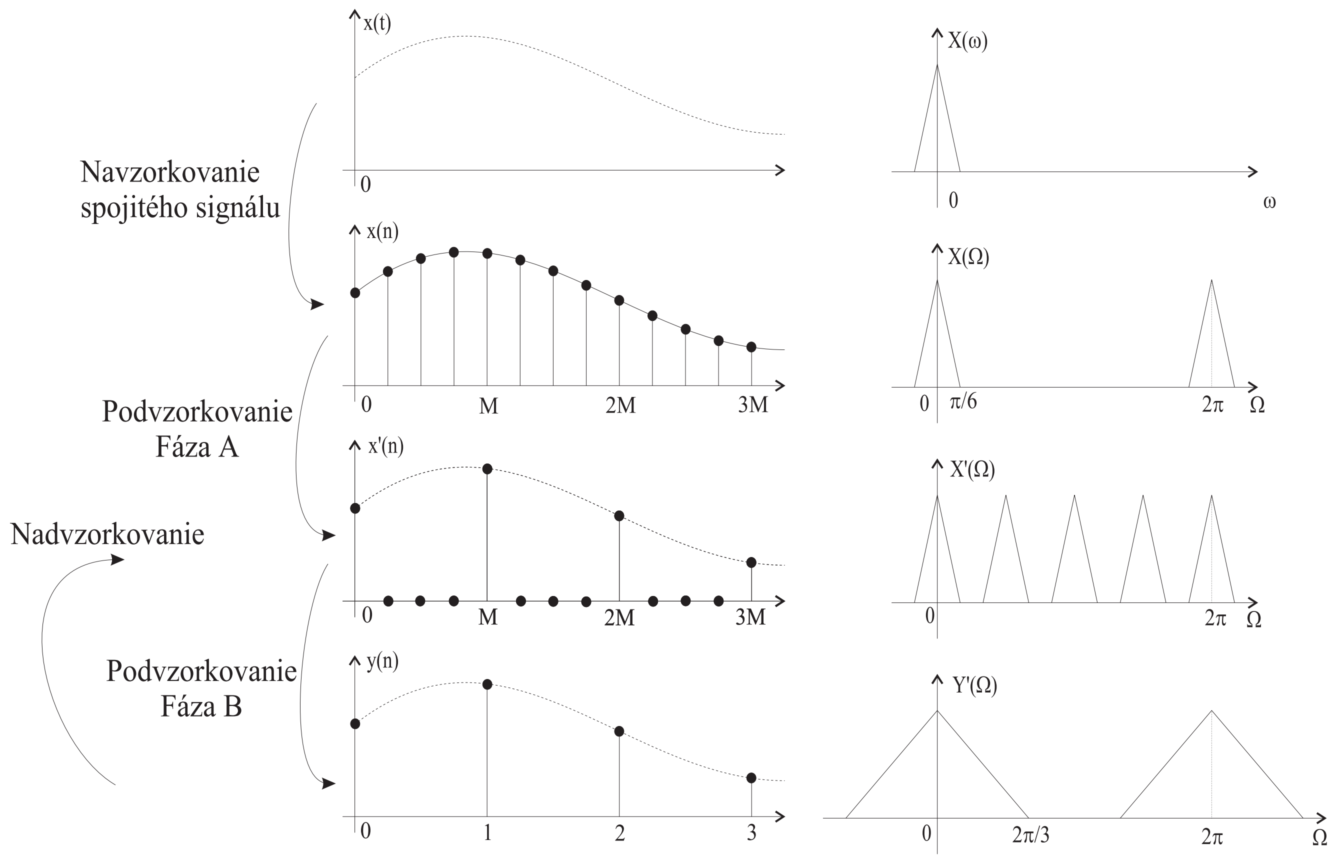
M, N nesúdeliteľné



Podvzorkovanie signálu

Z pôvodného signálu zachovávame iba každú M-tú vzorku. Pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný $y(n) = x(Mn)$

Čo vo frekvencii odpovedá(znázornené preM=4):



Proces podvzorkovania $x(n)$ môžeme popísať *v dvoch fázach*:

A) <u>vynulovanie nepotrebných zložiek</u> (násobenie Kroneckerovými impulzami)

$$x'(n) = x(n)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(n-rM) = x(n)\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}nk} \qquad \text{(Finta)}$$

Z transformáciou dostaneme:

$$X'(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}Z\left\{x(n)\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right)^{n}\right\} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(zW^{k}\right)$$

, kde $W = e^{-j2\pi/M}$. Tomu opovedá frekvenčná charakteristika (pri $z = e^{j\Omega}$)

$$X'(\Omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right)$$

T.j. výsledné spektrum je sumou M pôvodných spektier, posunutých zakaždým o $2\pi / M$.

B) <u>Zmena mierky</u>, resp. roztiahnutie signálu $x'(n)$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(Mn) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{k} x'(k) \left(z^{\frac{1}{M}} \right)^{-k} = X'\left(z^{\frac{1}{M}} \right) \qquad Y(\Omega) = X'(\Omega/M)$$

Výsledkom podvzorkovania teda je:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} W^{k} \right) \qquad Y(\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega - 2k\pi}{M} \right)$$

Nadvzorkovanie signálu.

Pri nadvzorkovaní signálu vkladáme medzi jeho vzorky zakaždým *M-1* núl. Teda pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný:

$$y(n) = x(n / M)$$

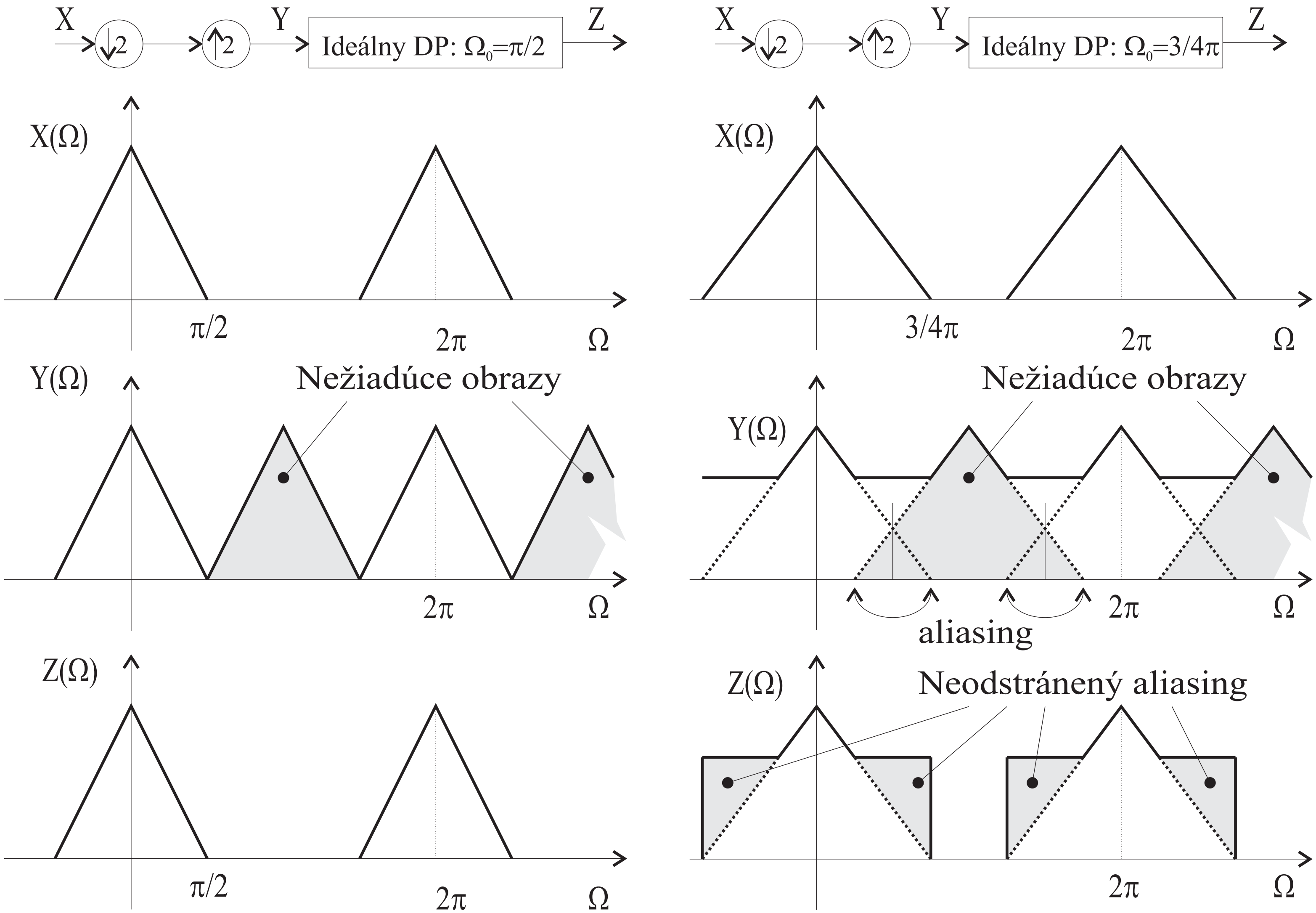
Proces je opačný ako pri fáze B podvzorkovania, t.j na intervale vznikne *M-1* obrazov spektra pôvodného signálu $x(n)$:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n / M) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{k} x(k) \left(z^{M}\right)^{-k} = X\left(z^{M}\right)$$

$$Y(\Omega) = X(M\Omega)$$

Úlohou interpolačného filtra je ***odstrániť týchto M-1 obrazov.***

Podvzorkovanie a následné nadvzorkovanie signálu



- Vidíme, že po podvzorkovaní a následnom nadvzorkovaní vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi / M$.

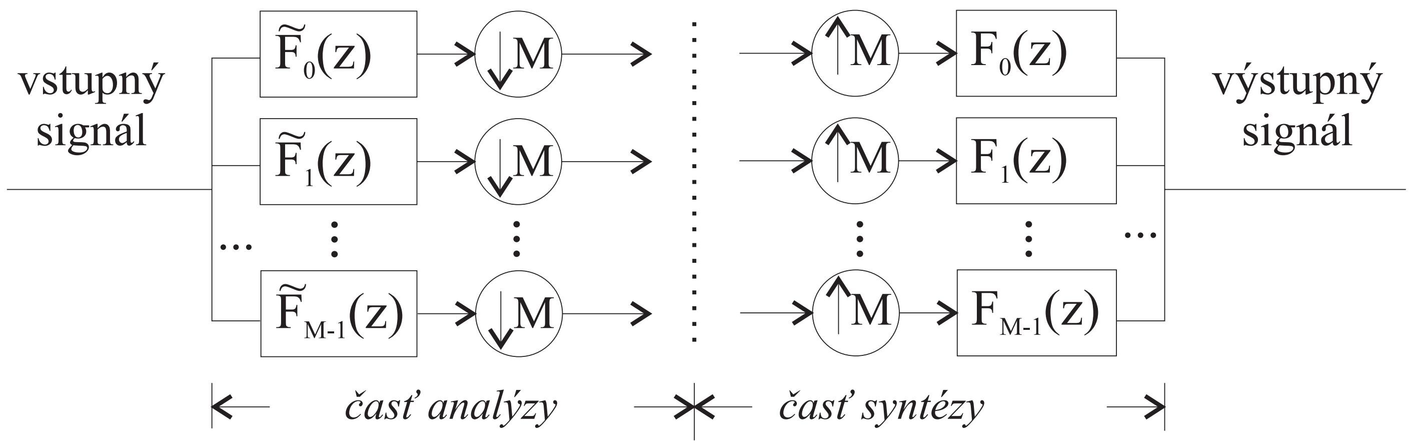
- Ináč vzniká tzv. ***aliasing*** (sčítavanie zrkadlových spektrálnych zložiek signálu), ktorý nevieme odstrániť.

Ako po podvzorkovaní zrekonštruovať ľubovoľný signál?

–>> Riešením je banka filtrov.

Banka filtrov

Definícia: ***Banka filtrov (BF)*** je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciach decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložit (analýza) na ***subpásma*** a spätne zložiť(syntéza).



Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s kritickým podvzorkovaním

- Signál je rozdelený filtrami pre analýzu $\tilde{F}_k$ na M častí (subpásiem) a následne podvzorkovaný – ***analýza signálu***

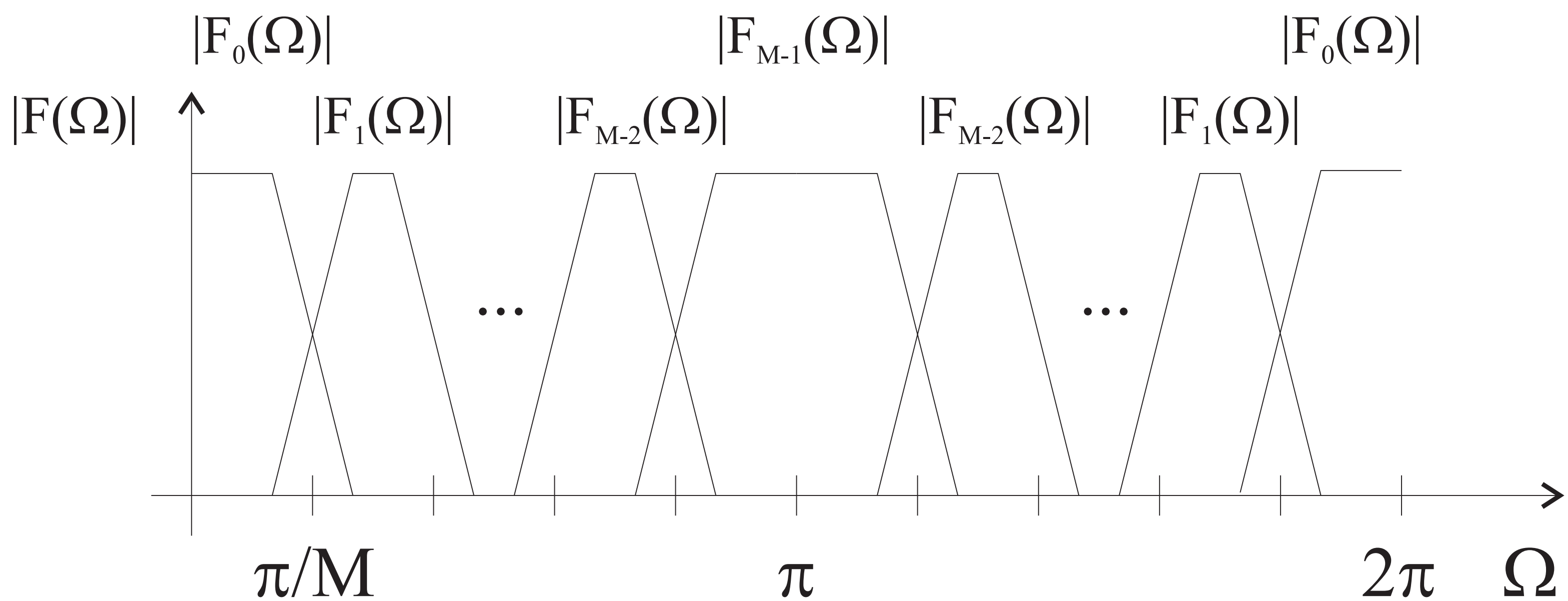
- Signál zrekonštruujeme spätným nadvzorkovaním týchto dvoch častí, interpoláciou filtrami pre syntézu F_k nakoniec sčítaním – ***syntéza signálu***

Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom FB má vlastnosť ***perfektnej(úplnej) rekonštrukcie***.

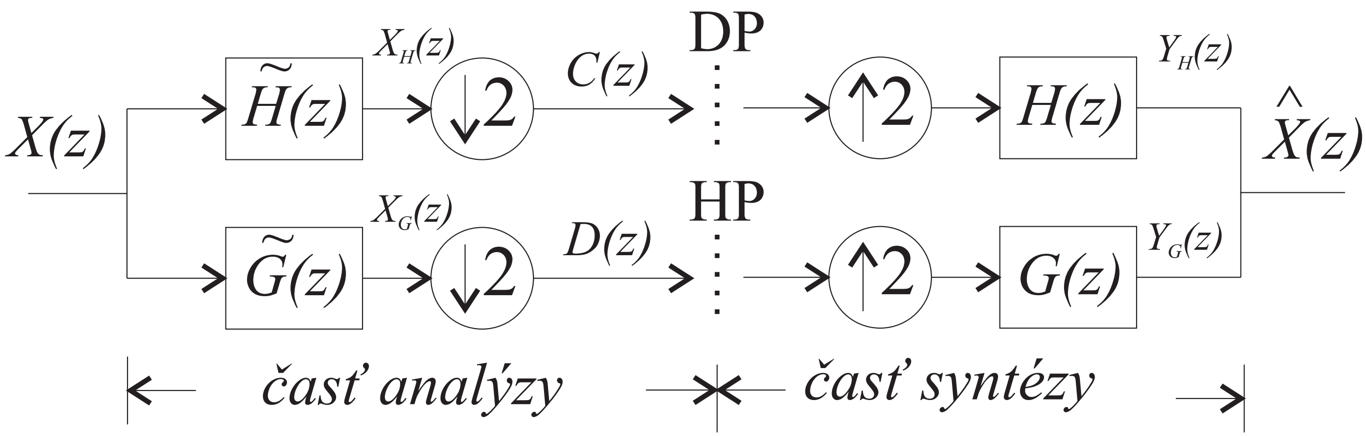
Zvyčajne chceme FB s *rušením aliasingu* a *úplnou rekonštrukciou signálu*.

→ Prenosové funkcie analyzačných $\tilde{F}_k(z)$ resp. syntetizačných filtrov $F_k(z)$ musia spĺňať isté podmienky.

Najčastejšie je používané rovnomerné rozdelenie na subpásma v tvare:



Dvojpásmové banky filtrov



Platí(V1): $c(n)=\sum_k \tilde{h}(2n-k)x(k) \qquad d(n)=\sum_k \tilde{g}(n-2k)x(k)$

$$\hat{x}(n)=\sum_k h(n-2k)c(k)+\sum_k g(n-2k)d(k)$$

DWT(V2): $c_{m+1}(n)=\sum_k \tilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k) \qquad d_{m+1}(n)=\sum_k \tilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$

$$c_m(n)=\sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k)+\sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

T.J.AK PLATÍ $\tilde{h}(n)=\tilde{h}_{mr}(-n) \qquad h(n)=h_{mr}(n)$

$\tilde{g}(n)=\tilde{g}_{mr}(-n) \qquad g(n)=g_{mr}(n)$ SÚ V1 a V2 TOTOŽNÉ !!!