Všeobecné opakovanie od začiatku.

Opakovanie ~ Biortogonalita: Zovšeobecnenie SWT

Pri SWT je možné použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu *rôzne základné wavelety* $\tilde{\psi}(t)$ a $\psi(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\tilde{\psi},\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle f, \tilde{\psi}_{a,b} \right\rangle \psi_{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

Invertovateľnosť je podmienená vzťahom pre výpočet $C_{\tilde{\psi},\psi}$ nasledovne:

$$C_{\tilde{\psi},\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\tilde{\Psi}(\omega)\right| \left|\Psi(\omega)\right|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

Táto podmienka je postačujúca, základné wavelety nemusia spĺňať žiadne iné podmienky.

Opakovanie ~ Biortogonalita: Waveletové rámce (WF) a rady (WR)

Ak z $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$) skonštruujeme množiny funkcií:

Pri WF: $$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(a_0^{-m} t - n b_0\right), \quad m,n \in Z$$

Pri WR: $$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi\left(2^{-m} t - n\right), \quad m,n \in Z$$

Potom signal môžeme reprezentovať pomocou jeho waveletových koeficientov

$$d_{m,n} = \left\langle f(t), \psi_{m,n}(t) \right\rangle \qquad m,n \in Z$$

A spätne zrekonštruovať pomocou

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad m,n \in Z$$

Opakovanie – biortogonalita

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonality* (hovoríme o *biortogonálnych waveletoch*), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce prodmienku biortogonality:

$$\left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \right\rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \qquad j,k,l,m \in Z$$

Biortogonálne wavelety a rozklad signálu

V predchádzajúcom texte sme vytvorili MRA s použitím ortonormálnych báz. Ak bázy $\{\psi_{m,n}\}$a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú navzájom biortogonálne potom k základným waveletom $(\psi,\tilde{\psi})$ existujú funkcie mierky ϕ, $\tilde{\phi}$ také, že množiny $\{\phi_{mn}\}$a $\{\tilde{\phi}_{mn}\}$tvoria bázy pre podpriestory V_{-m} resp. $\tilde{V}_{-m}$ a množiny $\{\psi_{mn}\}$a $\{\tilde{\psi}_{mn}\}$tvoria bázy pre podpriestory W_{-m} resp. $\tilde{W}_{-m}$. V $L^2(R)$ potom existujú dve MRA s hierarchiami:

$$...V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} ...$$
$$...\tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} ...$$

Platí:

- W_{m+1} je síce doplnkom k V_{m+1} v priestore V_m, ale nie je to ortogonálny doplnok.
- W_{m+1} je však ortogonálny doplnok k $\tilde{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{V}_m$.
- $\tilde{W}_{m+1}$ je je neortogonálny doplnok k $\tilde{V}_{m+1}$ v priestore $\tilde{V}_m$ a ortiginálny doplnok k V_{m+1} v priestore V_m.

T.j.

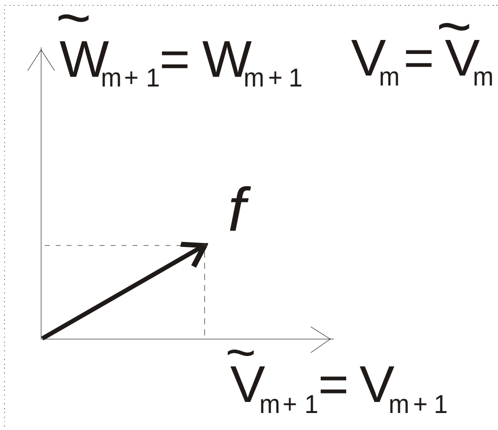
$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \qquad V_m = V_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{W}_{m+1}$$
$$\tilde{V}_m = \tilde{V}_{m+1} \oplus \tilde{W}_{m+1} \qquad \tilde{V}_m = \tilde{V}_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{m+1}$$

Vzťahy

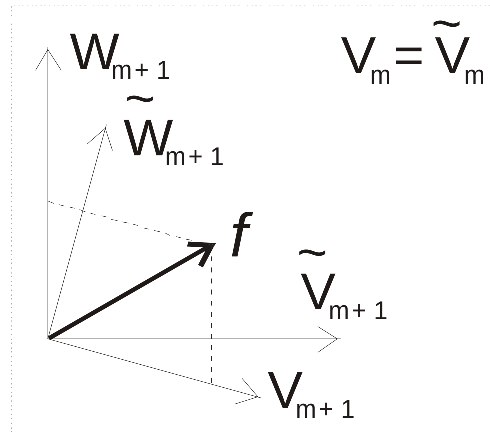
$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \qquad V_m = V_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} \widetilde{W}_{m+1}$$

$$\widetilde{V}_m = \widetilde{V}_{m+1} \oplus \widetilde{W}_{m+1} \qquad \widetilde{V}_m = \widetilde{V}_{m+1} \overset{\perp}{\oplus} W_{m+1}$$

môžeme znázorniť graficky:



a)ortogonálny rozklad



b)biortogonálny rozklad

Relácie zmeny mierky môžeme vyjadriť vzťahmi:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(2t-n) \qquad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n)\varphi(2t-n)$$

$$\widetilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{h}_{mr}(n)\widetilde{\varphi}(2t-n) \qquad \widetilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{g}_{mr}(n)\widetilde{\varphi}(2t-n)$$

<u>Aký bude odpovedajúci výpočet DWT?</u>

Ak chceme signal vyjadriť v priestoroch V_{m+1}, W_{m+1}, musíme pri získavaní súradníc používať priestory $\widetilde{W}_{m+1}$, $\widetilde{V}_{m+1}$ - (viď. geometrická analógia). V tom prípade:

Rozklad (analýza):

$$c_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{h}_{mr}(k-2n)\,c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}(k-2n)\,c_m(k)$$

Rekonštrukcia(syntéza):

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)\,c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)\,d_{m+1}(k)$$

Resp. ak chceme signal vyjadriť v priestoroch $\widetilde{W}_{m+1}$, $\widetilde{V}_{m+1}$, musíme pri získavaní súradníc používať priestory V_{m+1}, W_{m+1}. **Voľba je na nás.**

Ako to bude vyzerať v maticovom tvare? … veľmi podobne ako v ortonormálnom prípade avšak pri konštruovaní matíc použijeme podľa uvedených vzťahov aj sekvencie $\tilde{h}_{mr}$ a $\tilde{g}_{mr}$.

- Aké sú vzťahy medzi $\tilde{h}_{mr}$, $\tilde{g}_{mr}$, h_{mr}, g_{mr}?
  Zložitejšie ako v ortonormálnom prípade, avšak koncept "bánk filtrov" nám pomôže.

Základné vzťahy v ortonormálnom prípade boli:

a) $\sum_n h(n)h(n-2k)=\delta(k)$

b) $\sum_n h(n)g(n-2k)=0$

c) $\sum_n h(n)=\sqrt{2}$, $\sum_n g(n)=0$

d) $g(n)=\pm(-1)^n h(M-n)$

V biortogonálnom prípade platí:

a) $\sum_k h(k)\tilde{h}(2n-k)=\delta(k)$ $\qquad$ $\sum_k g(k)\tilde{g}(2n-k)=\delta(k)$

b) $\sum_k g(k+2m)\tilde{h}(2n-k)=0$ $\qquad$ $\sum_k h(k+2m)\tilde{g}(2n-k)=0$

c) $\sum_n g(n)=0$, $\sum_n \tilde{g}(n)=0$, $\sum_n h(n)=?$ $\sum_n \tilde{h}(n)=?$

d) ?

- Chýba nám koncept zavádzajúci K-regularitu ...
- Máme viac stupňov voľnosti ako v ortonormálnom prípade

- **<u>Príklad = rodina -Spline waveletov</u>**

Spliny sú po častiach polynomické funkcie daného stupňa s plynulým prechodom medzi jednotlivými častami. B-Spline $\varphi_{SM}(t)$ stupňa *M* je tvorený *M* násobnou konvolúciou „Box“ funkcie:

$$B(t)=\begin{cases} 1 & t\in\langle 0,1\rangle \\ 0 & inde \end{cases}$$

a má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, M+1\rangle$, M-1 spojitých derivácií.

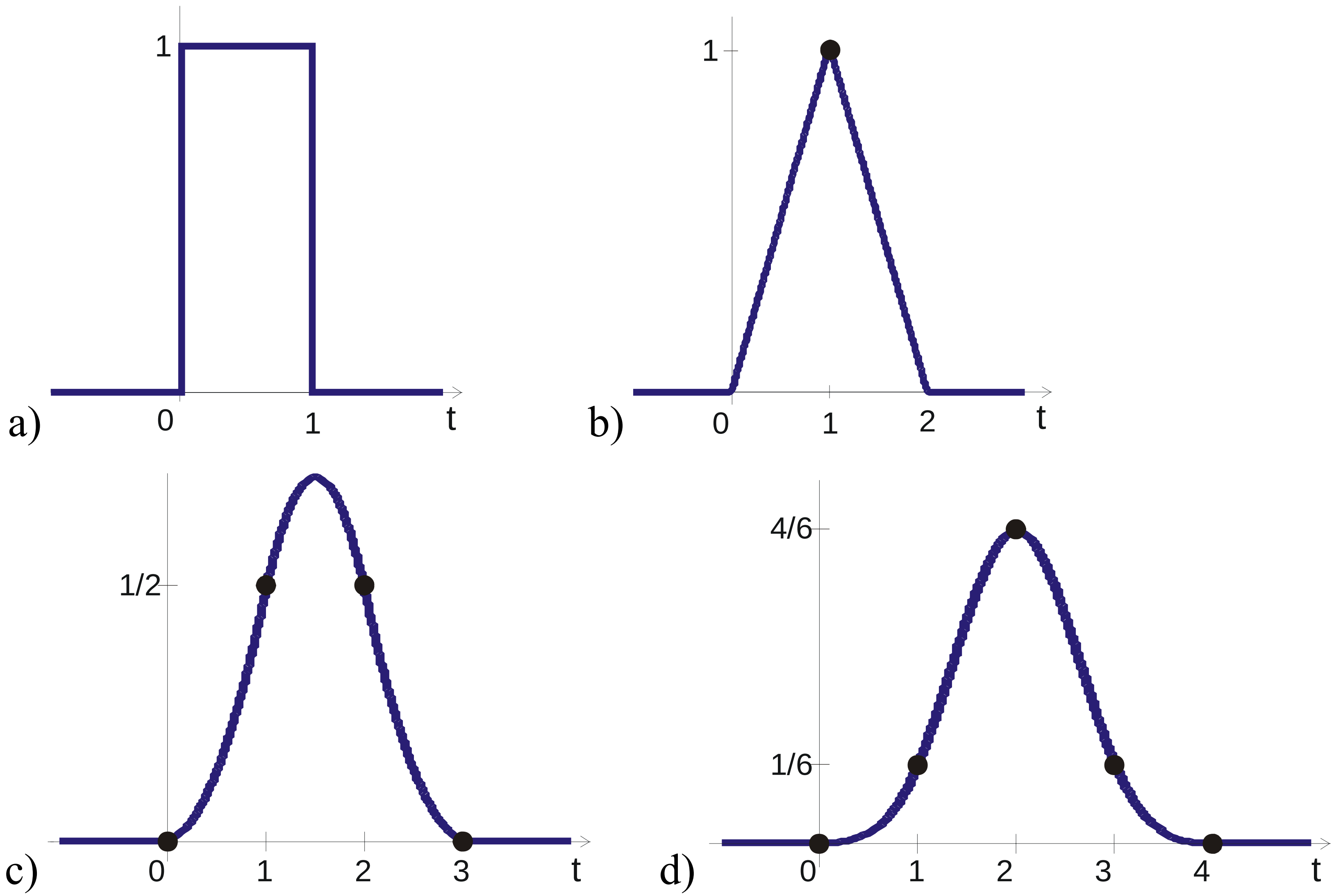
Platí: $\varphi_{S0}(t)=B(t)=\varphi_{Haar}(t)$, takže $\varphi_{S0}(t)$ môžeme generovať pomocou koeficientov $h(n)=(1,1)$ resp. ich N-násobnými konvolúciami. To odpovedá Pascalovmu rojuholníku na určenie kombinačných čísiel. Koeficienty $h(n)$ pre B-spline funkcie mierky sú potom:

$h_{S0}(n)=(1,1)\frac{\sqrt{2}}{2}$ - konštantný (spline nultého rádu)

$h_{S1}(n)=(1,2,1)\frac{\sqrt{2}}{4}$ - lineárny (spline prvého rádu)

$h_{S2}(n)=(1,3,3,1)\frac{\sqrt{2}}{8}$ - kvadratický(...)

$h_{S3}(n)=(1,4,6,4,1)\frac{\sqrt{2}}{16}$ - kubický(...)



B-Splinové funkcie mierky: a)Konštantná b)Lineárna c)Kvadratická d)Kubická

N-násobnej konvolúcii $h(n)$ odpovedá násobenie v Z rovine, t.j:

$$H_{SM}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{M+1}$$

Takže Spline majú *K=M+1* násobnú nulu v *z=-1*. Dĺžka $h_{SM}(n)$ je *M+2*.

- Platí $\int \varphi_{SM}(t)dt = 1$ a $\sum_n h_{S0}(n) = \sqrt{2}$
- Základná otázka: Formujú funkcie $\varphi_{SM}(t)$ bázy V_0?
  Formujú, lebo $\varphi_{SM,m,n}(t)$ spĺňajú dilatačné rovnice. $\varphi_{SM}(t)$ potom môžeme považovať za funkcie mierky.
- Spline majú symetrické $h(n)$, symetrické bázové funkcie, t.j. nemôžu tvoriť ortogonálne systémy (okrem triviálneho prípadu)
- Spline nie sú navzájom ortogonálne, t.j:
  $\langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle = a(k)$, pričom $a(k) \neq \delta(k)$

Semiortogonálne spline wavelety

Množiny $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m. Semiortogonálne wavelety $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy W_m, pre ktoré platí:

$$V_m \perp W_m \qquad\qquad V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

T.j. v MRA existuje len jedna hierarchia aproximačných podpriestorov

$$\{0\} \ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \ldots L^2(R)$$

Oproti Biortogonálnemu prípadu to znamená že

$$V_m = \widetilde{V}_m \qquad\qquad W_m = \widetilde{W}_m$$

Pri spline rádu M vypočítame koeficienty $g_{mr}(n)$ z koeficientov $h_{mr}(n)$ nasledovne:

$$g_{mr}(n) = \pm(-1)^n h_{mr}(M+1-n) a_M(M+1-n)$$

kde

$$a_M(k) = \langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle$$

Prakticky

$$a_M(k) = 2^{M+1/2} h_{S(M+2)}(k)$$

POZOR: ak použijeme $g_{mr}(n)$ a $h_{mr}(n)$ v tomto tvare (KIO filtre) pri analýze, pri syntéze je nutné použiť NIO filtre (a naopak).

Biortogonálne spline wavelety

- Množiny $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m .
- K nim si môžeme skonštruovať $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ také aby tvorili neortogonálne doplnky W_m (máme viac stupňov voľnosti ! Viď. príklady na ďaľšej strane)
- V $L^2(R)$ potom existujú dve MRA

$$...V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} ...$$
$$...\widetilde{V}_2 \subset \widetilde{V}_1 \subset \widetilde{V}_0 \subset \widetilde{V}_{-1} \subset \widetilde{V}_{-2} ...$$

atd…

Konkrétny spôsob návrhu Biortogonálnych B-spline waveletov uvedieme neskôr.

- pomôže nám koncept “bánk filtrov”
- použijeme vedomosti o spektrálnej faktorizácii v ortonormálnom pipade

Napr. Bior 1.3 a Bior 1.5 majú tie isté $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ - spliny nultého rádu (rozdiel je iba v časovom posunutí). Majú tie isté priestory V_m .