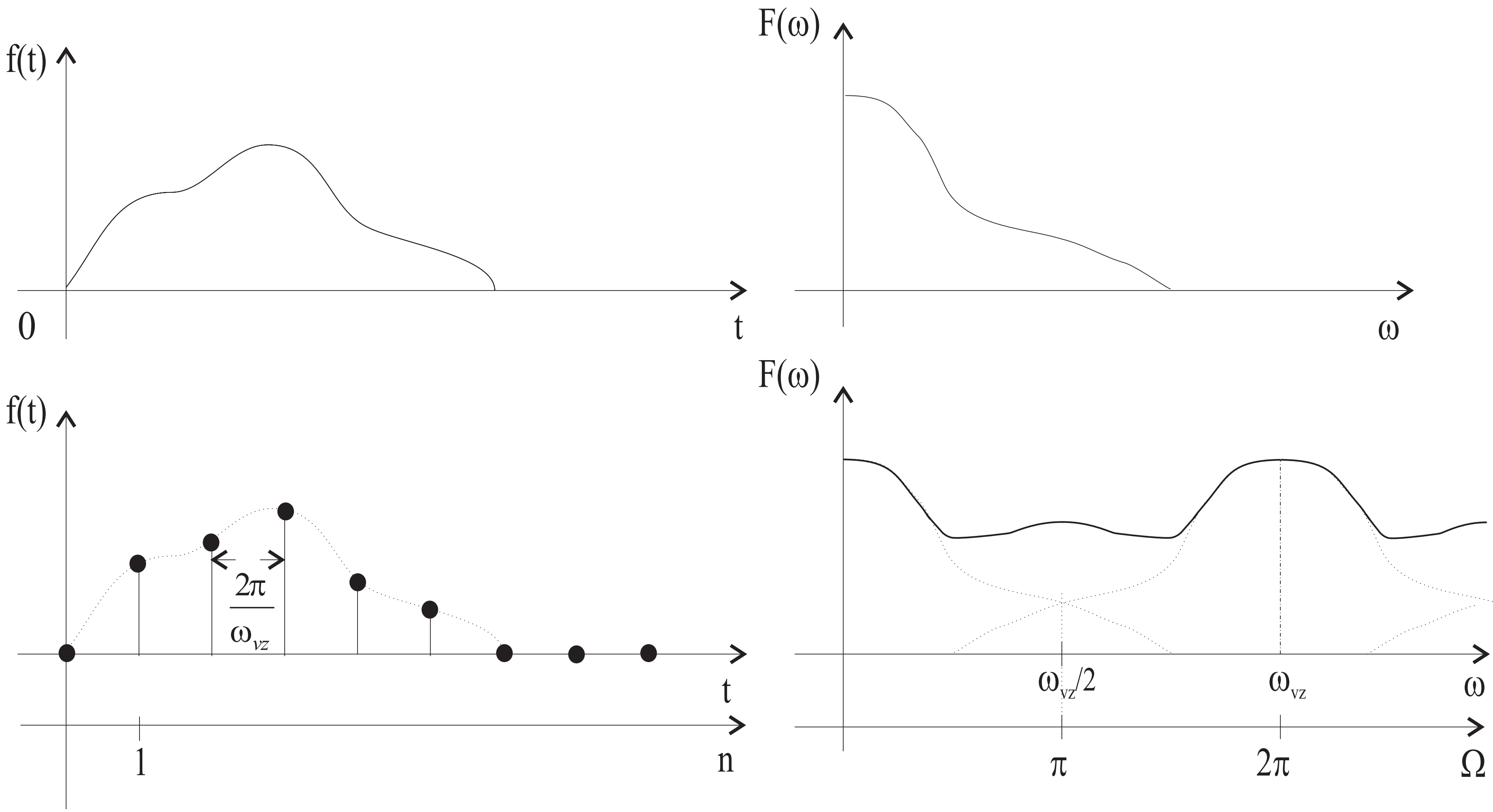
FT a DTFT signálu



$$\Omega = 2\pi\omega / \omega_{vz}$$

6.2 Z-transformácia a diskrétne systémy

Definícia 6.1 *Nech postupnosť $x(n) \in l^2(\mathcal{Z})$ predstavuje diskrétny signál. Jeho Z-transformácia je definovaná ako*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}\,, \tag{6.1}$$

kde z je komplexná premenná.

Z-transformáciou každému bodu komplexnej roviny „z“, pre ktorý vzťah 6.1 konverguje, priradíme komplexné číslo — funkčnú hodnotu $X(z)$. Niektoré základné vlastnosti Z-transformácie sú uvedené v tabuľke 6.2.

Parametrizáciou premennej z pomocou $z = e^{j\Omega}$ vyberáme iba hodnoty ležiace na jednotkovej kružnici a dostávame ***frekvenčnú charakteristiku*** $X(\Omega)$ postupnosti $x(n)$. Parameter Ω sa nazýva ***pomerová uhlová frekvencia***. Uvedený prechod od $x(n)$ k $X(\Omega)$ je ekvivalentný výpočtu DTFT signálu $x(n)$, pozri tabuľku 6.1.

Ak $x(n)$ predstavuje odpoveď diskrétneho systému na Kroneckerov impulz $u(n)$, potom $X(z)$ je prenosová funkcia systému. V tomto texte sa stretneme iba so systémami s konečnou impulzovou odpoveďou (KIO). Príkladom takýchto systémov sú ***KIO filtre***. Vyjadrením frekvenčnej charakteristiky prenosovej funkcie v tvare

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega) e^{j\phi(\Omega)} \tag{6.2}$$

Časová oblasť	z-rovina	poznámka
$x(n)$	$X(z)$	$\alpha, \beta \in \mathcal{R}$
$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$	
$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	
$x(n) \star y(n)$	$X(z)Y(z)$	
$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$	
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	

Tabuľka 6.2. Vybrané vlastnosti Z-transformácie

dostávame $M(\Omega)$ — ***magnitúdovú*** a $\phi(\Omega)$ — ***fázovú frekvenčnú charakteristiku*** systému. Tie sú jednoznačne určené polohou, počtom a rádom ***núl*** prenosovej funkcie (KIO systémy majú póly iba v $z = 0$). Pre úplnosť uveďme, že pod formuláciou „funkcia má (niekde) *nulu* resp. ***pól***“ rozumieme, že tam má *nulovú* resp. *nekonečnú* funkčnú hodnotu. Podmienky na dosiahnutie linearity fázovej charakteristiky sú zhrnuté napr. v [7]. Detailný popis problematiky Z-transformácie a diskrétnych systémov je napr. v [7], [21], [22].

Z transformácia:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}, \qquad x(n)\in l^2(z)$$

prenosová funkcia: $X(z)$

Frekvenčná charakteristika prenosovej funkcie: $X(\Omega)$, $z=e^{j\Omega}$

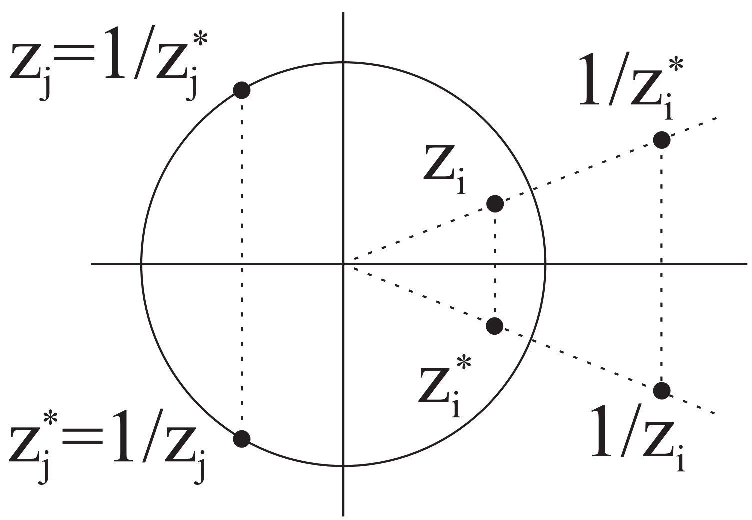
Pomerová uhlová frekvencia: Ω

$$X(\Omega)=\left|X(\Omega)\right|e^{j\phi(\Omega)}=M(\Omega)e^{j\phi(\Omega)}$$

Magnitúdová frekvenčná charakteristika: $M(\Omega)$

Fázová frekvenčná charakteristika: $\phi(\Omega)$

Prenosová funkcia - nuly



$$X(z)=\prod_l (z-z_l)^{k_l}$$

k_l = nula koľkého rádu je v z_l

Prenosová funkcia s reálnymi koeficientami

Ak $X(z)$ má nuly v z_i a aj v z_i^*, potom má reálne koeficienty

Príklad: kedy má nasledovná funkcia reálne koeficienty?

$$X(z) = (z-a)(z-b) = z^2 - z(a+b) + ab$$

Lineárna fázová charakteristika frekvenčných charakteristík

Ak $X(z)$ má nuly v z_i a aj v $1/z_i$, potom má lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku

Príklad: kedy má nasledovná funkcia lineárnu fázovú charakteristiku?

$$X(z) = (z-a)(z-b) = z^2 - z(a+b) + ab = z\left(z - (a+b) + z^{-1}ab\right)$$

$$X(\Omega) = e^{j\Omega}\left[-(a+b) + (e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}ab)\right] \overset{ab=1}{=} e^{j\Omega}\left[-(a+b) + 2\cos(\Omega)\right]$$

Nekauzálne signály

Doteraz: KIO filtre kauzálne a impulzové charakteristiky $h(n)$ pre $n \in N$

Zovšeobecnenie:

Ak $n \in Z$, prvok pri n=0 budeme označovať bodkou: Napr: $x(n) = \{1, \dot{3}, 1\}$

Časová oblasť	*Z-rovina*	*Frekvenčné char.*
$x(n)$	$X(z)$	$X(\Omega)$
$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$e^{-j\Omega k}X(\Omega)$
$x(n)*y(n)=\sum_k x(n-k)y(k)$	$X(z)Y(z)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$X^*(\Omega)=X(-\Omega)$ *ak* $x(n)\in R$
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	$X(\Omega+\pi)$
$\langle x(k),x(k-n)\rangle$	$X_*(z^{-1})X(z)$	$X^*(\Omega)X(\Omega)$
$x(Mn)$	$X(z^{1/M})$	$X(\Omega/M)$
$x(n/M)$	$X(z^M)$	$X(M\Omega)$

Je jasné napr. nasledovné:

- Čo je viacnásobná „nula“ ?
- Aká je situácia na jednotkovej kružnici? (omega, vplyv núl, pólov, ...)
- Rukolapný súvis medzi násobením a konvolúciou?
- Súvis medzi DP a HP charakteristikou v 4. riadku tabuľky?
- **Ako si predstaviť** $X(\Omega)$ ***v komplexnej rovine? (skladanie točiacich sa vektorov)***

Autokorelácia a jej frekvenčné charakteristiky.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\Omega n} = H^*(\Omega) H(\Omega) = |H(\Omega)|^2$$

$P(\Omega)$ **je reálna nezáporná funkcia**

Platí:

$$|H^*(\Omega)| = |H(\Omega)| \qquad H(\Omega) H(\Omega) \neq |H(\Omega)|^2$$

$$|H(\Omega)^2| \neq |H(\Omega)|^2$$

Autokorelácia a „z“ rovina

Vyjadrením $P(\Omega) = H^{*}(\Omega) H(\Omega)$ v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_{*}\left(z^{-1}\right) H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^{*}$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Naviac ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^{*} a $1/z_k$.

Platí:

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left(\left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{1_i}^{*} z\right)\right) \prod_{i=1}^{N_2} \left(\left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)\left(1 - z_{2_i}^{*} z\right)\right)$$

,kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici(platí $\left|z_{1_i}\right| = 1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $\left|z_{2_i}\right| < 1$).