Príklady ortogonálnych waveletových systémov

- Haarov wavelet

- Sinc wavelety

- Battle-Lemarie wavelety(ortogonalizované Spline wavelety)

- Daubechies wavelety

- Coiflety

  Dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$. Snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky. Pre Coiflet L tého rádu platí

  $m_\varphi(k)=0$, $m_\psi(k)=0$ $\qquad k=1,2,\ldots,L-1$

- Symlety – majú minimálnu a maximálny počet nulových momentov pri danej dĺžke *h(n)*

Príklady návrhu ortogonálnych waveletov

- Ortogonalizácia (napr. Battle Lemarie)

- **Parametrizácia koeficientov mierky**

- **Spektrálna faktorizácia** – wavelety s K nulovými waveletovými momentmi (napr. Daubechies)
  Pozn. Analogicky sú navrhované *biortogonálne* CDF(Cohen-Daubechies-Feauveau) spline wavelety

- wavelety s K nulovými waveletovými momentmi a K nulovými momentmi funkcie mierky(Coiflets)

- wavelety s minimalizovanými momentmi(Odegard)

- *lifting schéma*

Parametrizácia koeficientov mierky

Systém 0. rádu - dĺžka $h(n)$ je 2
Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)=\sqrt{2}$$

$$h^2(0)+h^2(1)=1$$

Riešením je $h(n)=\left\{\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right\}$

Systém 1. rádu - dĺžka $h(n)$ je 4
Má jeden stupeň voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0)+h(1)+h(2)+h(3)=\sqrt{2}$$

$$h^2(0)+h^2(1)+h^2(2)+h^2(3)=1$$

$$h(0)h(2)+h(1)h(3)=0$$

Riešením je

$$h(0)=\left(1-\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right)/\left(2\sqrt{2}\right) \qquad h(1)=\left(1+\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right)/\left(2\sqrt{2}\right)$$

$$h(3)=\left(1+\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right)/\left(2\sqrt{2}\right) \qquad h(2)=\left(1-\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right)/\left(2\sqrt{2}\right)$$

Pozn:

Ak $\alpha=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ → Haarov wavelet
Ak $\alpha=\pi/3$ → Daubechies2 wavelet

Návrh ortogonálnych waveletov s K nulovými momentmi

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter* . Potom:

$$H(\Omega) = \sqrt{2}\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)^K L(\Omega)$$

spĺňa $\left|H(\Omega)\right|^2 + \left|H(\Omega+\pi)\right|^2 = 2$ vtedy a len vtedy, ak

$$\left|L(\Omega)\right|^2 = Q\left(\sin^2(\Omega/2)\right) \quad \sin^2(\Omega/2) = \frac{1}{2}(1-\cos(\Omega)) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\left(e^{i\Omega}+e^{-i\Omega}\right)\right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

kde

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2-y)$$

a R(y) je *antisymetrický polynóm* taký, že $Q(y) \geq 0$ pre $y \in \langle 0,1 \rangle$.

Ak R(y)=0 dostávame wavelety s maximálnym počtom nulových momentov *N*, tzv. *Daubechies* wavelety.

Ak *N> 2K* potom R(y) nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Ako nájsť $L(z)$ pri danom $Q(z)$ také, pre ktoré $\left|L(\Omega)\right|^2 = Q(\Omega)$?

Využitie autokorelácie a spektrálnej faktorizácie.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ je sekvencia:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Potom

$$P(\Omega) = \left| H(\Omega) \right|^2$$

Pričom platí:

$P(\Omega)$ **je reálna nezáporná funkcia**

$$\left| H^*(\Omega) \right| = \left| H(\Omega) \right| \qquad H(\Omega) H(\Omega) \neq \left| H(\Omega) \right|^2$$

$$\left| H(\Omega)^2 \right| \neq \left| H(\Omega) \right|^2$$

Je zrejmá a očividná podobnosť:

$$P(\Omega) = \left| H(\Omega) \right|^2 \quad \leftrightarrow \quad Q(\Omega) = \left| L(\Omega) \right|^2$$

Vyjadrením $P(\Omega)=H^{*}(\Omega)H(\Omega)$ v Z-rovine dostaneme:

$$P(z)=H_{*}\left(z^{-1}\right)H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie.
Platí:

$$P(z)=\alpha\prod_{i=1}^{N_1}\left(\left(1-z_{1_i}z^{-1}\right)\left(1-z_{1_i}^{*}z\right)\right)\prod_{i=1}^{N_2}\left(\left(1-z_{2_i}z^{-1}\right)\left(1-z_{2_i}^{*}z\right)\right)$$

,kde N_1 je počet **párov núl** na jednotkovej kružnici(platí $\left|z_{1_i}\right|=1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je **počet párov núl** mimo jednotkovej kružnice (platí $\left|z_{2_i}\right|<1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú ***spektrálne faktory*** $P(z)$:

- získame ich **použitím iba jednej nuly z každého páru núl** $P(z)$ - druhú nulu v páre nám "dorobí" $H_{*}\left(z^{-1}\right)$.
- Tieto riešenia majú **rovnakú magnitúdovú charakteristiku**, líšia sa iba vo fázovej charakteristike a **nie sú jedinečné**
- Dôležité je ***riešenie s minimálnou fázou*****,** t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly **na** a **v** (!) jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z)=\sqrt{\alpha}\prod_{i=1}^{N_1}\left(1-z_{1_i}z^{-1}\right)\prod_{i=1}^{N_2}\left(1-z_{2_i}z^{-1}\right)$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak N=6.

Riešenie: Chceme max. počet nulových momentov, t.j. K=3, R=0.

Potom $Q(y) = 1 + 3y + 6y^2$,

$$y = \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1-\cos(\omega)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)\right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^2 - \frac{9}{4}z^1 + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}$$

$$\frac{8}{3}z^2 Q(z) = z^4 - 6z^3 + \frac{38}{3}z^2 - 6z^1 - 6z^0$$

nájdeme nulové body:

z_0=0.28725-0.15289i $\qquad 1/z_0 = 2.71275+1.44389i$

z_0^*=0.28725+0.15289i $\qquad 1/z_0^* = 2.71275-1.44389i$

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^{-2}(z-(0.28725 - 0.15289\mathrm{i}))(z-(0.28725 + 0.15289\mathrm{i}))$$

$$(z-(2.71275 + 1.44389\mathrm{i}))(z-(2.71275 - 1.44389\mathrm{i}))$$

Výsledok však musíme dostať do tvaru:

$$H(z) = \sqrt{\alpha}\ \prod_{i=1}^{N_1}\left(1 - z_{1_i} z^{-1}\right)\prod_{i=1}^{N_2}\left(1 - z_{2_i} z^{-1}\right)$$

Úpravami dostaneme (prvé dva členy na pravej strane vynásobíme z^{-1}, z druhých vyjmeme nuly $1/z_0$ a $1/z_0^*$ a presunieme ich do α):

$$Q(z) = \alpha\left(1 - z^{-1}(0.28725 - 0.15289i)\right)\left(1 - z^{-1}(0.28725 + 0.15289i)\right)$$
$$\left(1 - z/(2.71275 + 1.44389i)\right)\left(1 - z/(2.71275 - 1.44389i)\right)$$

kde

$$\alpha = \frac{3}{8}(2.71275 + 1.44389i)(2.71275 - 1.44389i) = \frac{3}{8}9.443814$$

vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha}\ \left(1 - (0.28725 - 0.15289i)z^{-1}\right)\left(1 - (0.28725 + 0.15289i)z^{-1}\right)$$

Potom:

$$H_{\min}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 L_{\min}(z)$$

čo je numericky

$$H_{\min}(z) = 0.33267z^3 + 0.80689z^2 + 0.45988z - 0.13501 - 0.08544z^{-1} + 0.03523z^{-2}$$

Vyýsledok odpovedá nekauzálnemu filtru. Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H_{\min}(z)$ faktorom z^{-3}, t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n)=\{0.33267,\ 0.80689,\ 0.45988,\ -0.13501,\ 0.08544,\ 0.03523\}$$

Pozn: pri výbere faktoru s *maximálnou fázou* dostaneme:

$$H_{\max}(z)=0.03523z^5-0.08544z^4-0.13501z^3+0.45988z^2+0.80689z^1+0.33267$$

t.j. otočenú a posunutú verziu filtra s minimálnou fázou.