# DWT v maticovom tvare.

Uvažujme nasledovné tvary rovníc:

Rozklad(analýza):

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)\, c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k-2n)\, c_m(k)$$

Rekonštrukcia(syntéza):

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)\, c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)\, d_{m+1}(k)$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$c_{m+1}(n)=\sum_k h_{mr}(k-2n)c_m(k)$$
$$d_{m+1}(n)=\sum_k g_{mr}(k-2n)c_m(k) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\mathbf{C}_{m+1}\\ \mathbf{D}_{m+1}\end{pmatrix}=\mathbf{T}_a^{(m)}\mathbf{C}_m$$

$$c_m(n)=\sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k)+\sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C}_m=\mathbf{T}_s^{(m)}\begin{pmatrix}\mathbf{C}_{m+1}\\ \mathbf{D}_{m+1}\end{pmatrix}$$

, kde $T_a$, $T_s$ sú ***štvorcové*** transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu a $\mathbf{C}_m$ resp. $\mathbf{D}_m$ sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\mathbf{C}_m=\left(c_m(0),c_m(1),\dots,c_m(N_m-1)\right)^T$$
$$\mathbf{D}_m=\left(d_m(0),d_m(1),\dots,d_m(N_m-1)\right)^T$$

kde veľkosť vektorov je:

$$N_m=2^{-m}N_0$$

Pozn.: *v ďalšom texte budeme* $h_{mr}$ , $g_{mr}$ *používať bez označenia ”mr“.*

# Maticový zápis pri periodickom rozšírení signálu

$$\mathbf{H}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(-1) \\ \dots & h(-1) & h(0) & h(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & h(-1) & h(0) & h(1) \end{pmatrix}}^{N_m} \qquad \mathbf{G}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} g(0) & g(1) & \dots & \dots & \dots & g(-1) \\ \dots & g(-1) & g(0) & g(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & g(-1) & g(0) & g(1) \end{pmatrix}}^{N_m} \Bigg\} \frac{N_m}{2}$$

$$\mathbf{H}_m^T = N_m \left\{ \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) \end{pmatrix} \right. \qquad \mathbf{G}_m^T = N_m \left\{ \begin{pmatrix} g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix} \right.$$

Analýza: $\mathbf{C}_{m+1} = \mathbf{H}_m \mathbf{C}_m \quad \mathbf{D}_{m+1} = \mathbf{G}_m \mathbf{C}_m$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}_a^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix}$$

Syntéza: $\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T{}_m & \mathbf{G}^T{}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}_s^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T{}_m & \mathbf{G}^T{}_m \end{pmatrix}$

## Všeobecne platí (vynechajme indexy “m”):

$$\mathbf{T_a T_s} = \mathbf{I}_N = \mathbf{T_s T_a}$$

Vyjadrime:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{N/2}} & \mathbf{0_{N/2}} \\ \mathbf{0_{N/2}} & \mathbf{I_{N/2}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T & \mathbf{G}^T \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \mathbf{HH}^T & \mathbf{HG}^T \\ \mathbf{GH}^T & \mathbf{GG}^T \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\mathbf{HH}^T = \mathbf{GG}^T = \mathbf{I} \qquad \mathbf{HG}^T = \mathbf{GH}^T = 0$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“ = podmienky ***biortogonality***. A zároveň, aby bola splnená rovnosť na pravej strane, musia spĺňať $g(n)$ dodatočnú podmienku:

$$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n), \qquad \text{M-nepárne}$$

## V prípade Haarovej DWT:

- **Rozklad ( = dopredná transformácia)**

$$c_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{h}_{mr}(k-2n) c_m(k) \qquad d_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{g}_{mr}(k-2n) c_m(k)$$

$$\mathbf{C}_{m+1} = \widetilde{\mathbf{H}}_m \mathbf{C}_m \qquad \mathbf{D}_{m+1} = \widetilde{\mathbf{G}}_m \mathbf{C}_m$$

$$\tilde{h}_{mr} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \qquad \tilde{g}_{mr} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{G}}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

***Príklad vstupného signálu:***

$$c_0(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)^T \qquad N_0 = 8$$

$$c_1(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3, 7, 11, 15)^T \qquad d_1(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, -1, -1, -1)^T$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_m \\ \tilde{\mathbf{G}}_m \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

***Reprezentácia signálu po jednom transformačnom kroku:***

$$\left(c_1(n), d_1(n)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3, 7, 11, 15, -1, -1, -1, -1\right)^T$$

➔ Ďalšie kroky analogicky ... (ešte 2 kroky)

- **Rekonštrukcia ( = spätná transformácia)**

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k) c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k) d_{m+1}(k)$$

$$\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m & \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_s \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektory bázy, do ktorej sme transformovali, sú stĺpcové vektory z matice $\mathbf{T}_s$ .