

Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením

Signál pri *analýze viacúrovňovým rozlíšením* (AVR) rozkladáme do systému hierarchických podpriestorov, pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále. AVR pozostáva zo sekvencie uzavretých podpriestorov priestoru $L^2(R)$:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

← horšia aproximácia lepšia →

Vlastnosti MRA:

- kompletnosť

$$\mathcal{V}_\infty = \{0\} \quad \mathcal{V}_{-\infty} = \{L^2(\mathcal{R})\} .$$

- Invariancia vzhľadom na

zmenu mierky - $f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in V_0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

posun v čase - $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

- Existencia bázy - existuje také $\varphi \in V_0$, že množina $\{\varphi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou V_0 . Funkciu $\varphi \in V_0$ nazývame *funkcia mierky*
- Existencia *bázy ortogonálneho doplnku*. Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1} . Potom existuje taký ortonormálny wavelet $\psi \in W_0$, že množina $\{\psi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru W_0 .

Dôsledky:

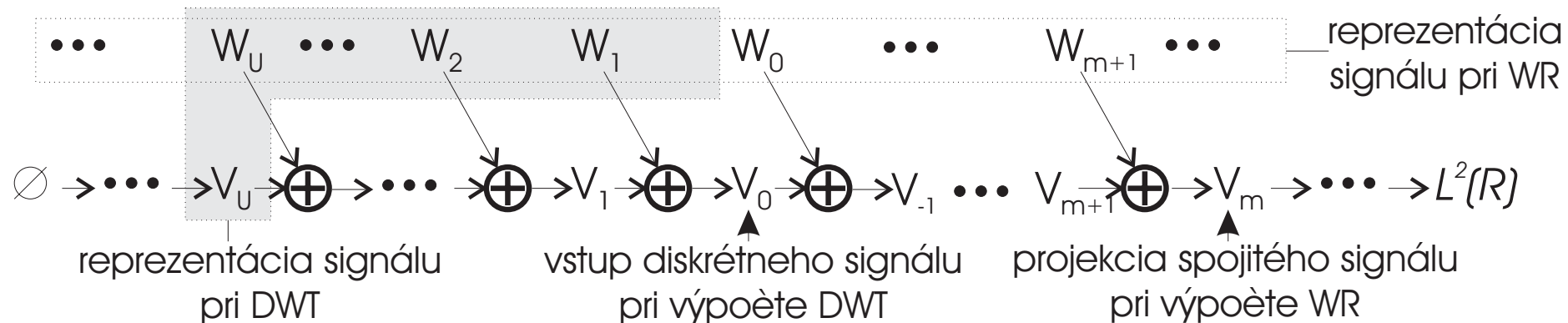
- Aby AVR bola úplná, musia mať funkcie mierky *jednosmernú zložku*, t.j. $\int \varphi(t) dt \neq 0$
- $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je bázou V_m .
- $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je bázou W_m

Platia nasledovné relácie:

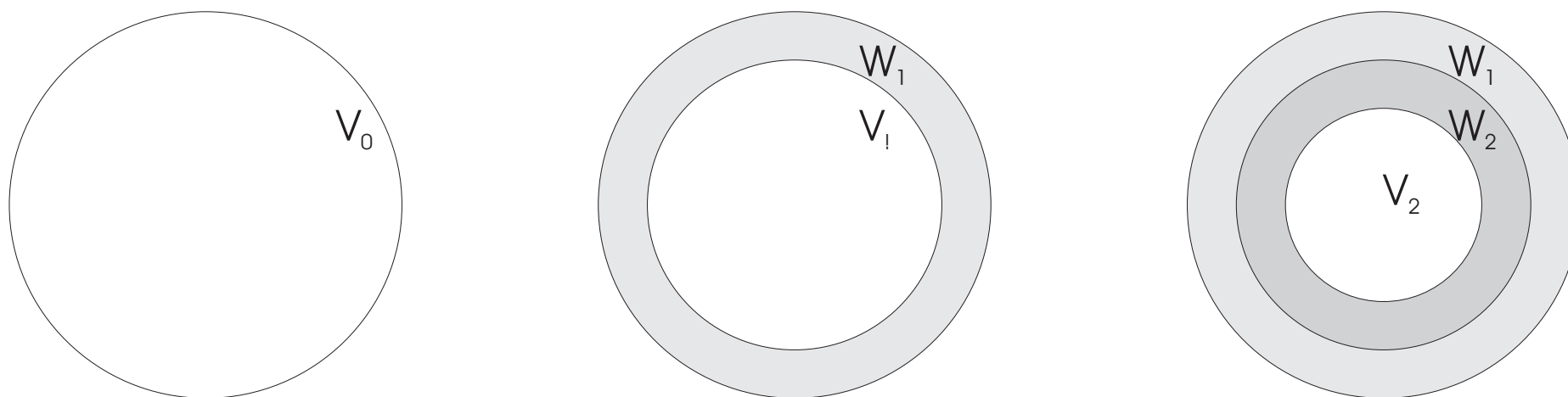
$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \quad L_2(\mathbb{R}) = \underbrace{\dots \oplus W_2 \oplus W_1}_{V_1} \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{V_0}$

Vidíme, že priestory V_m majú *aproximačný charakter*, pričom W_m obsahujú iba *detaily* na rôznych úrovniach rozlíšenia.



Hierarchia aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v MRA



Znázornenie hierarchie aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v rovine.

Keďže V_0 je obsiahnuté vo V_{-1} , pre $\varphi(t) \in V_0$ platí aj, že $\varphi(t) \in V_{-1}$. Bázou vo V_{-1} je $\{\sqrt{2}\varphi(2t - n), n \in \mathbb{Z}\}$, takže $\varphi(t)$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Na základe vlastností ortogonálnom doplnku platí analogicky

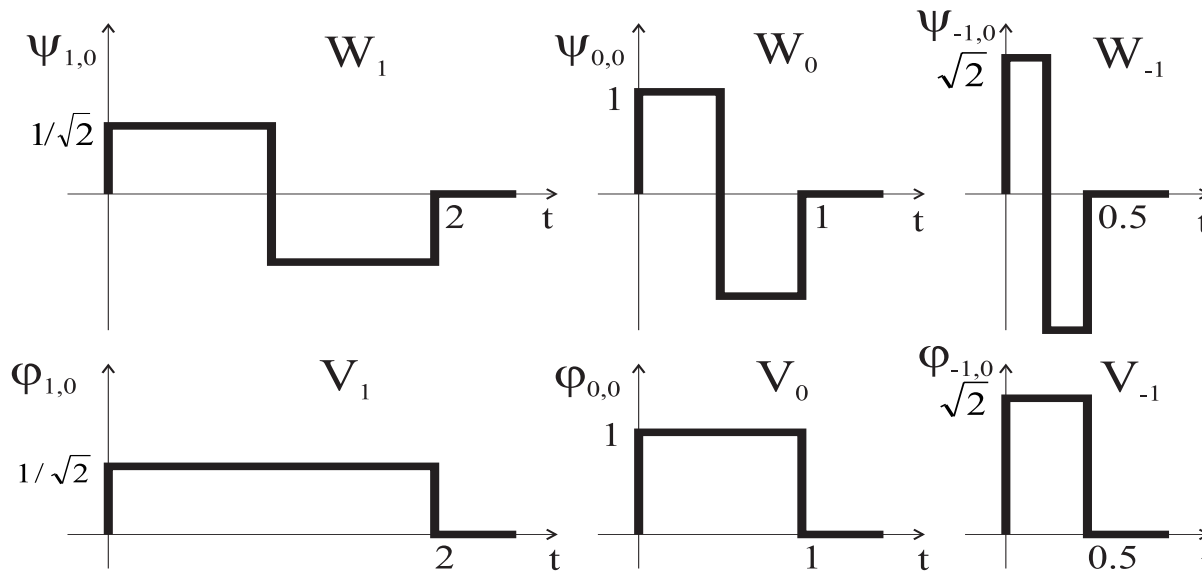
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto dva vzťahy sa nazývajú *relácie zmeny rozlíšenia* resp. *dilatačné rovnice*.

Koeficienty h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa *koeficienty pre zmenu rozlíšenia* resp. *dilatačné koeficienty*

Uvedomme si, že platí (na základe vlastností AVR)

$$\varphi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \varphi_{m,n}(t/2) \quad \psi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \psi_{m,n}(t/2)$$

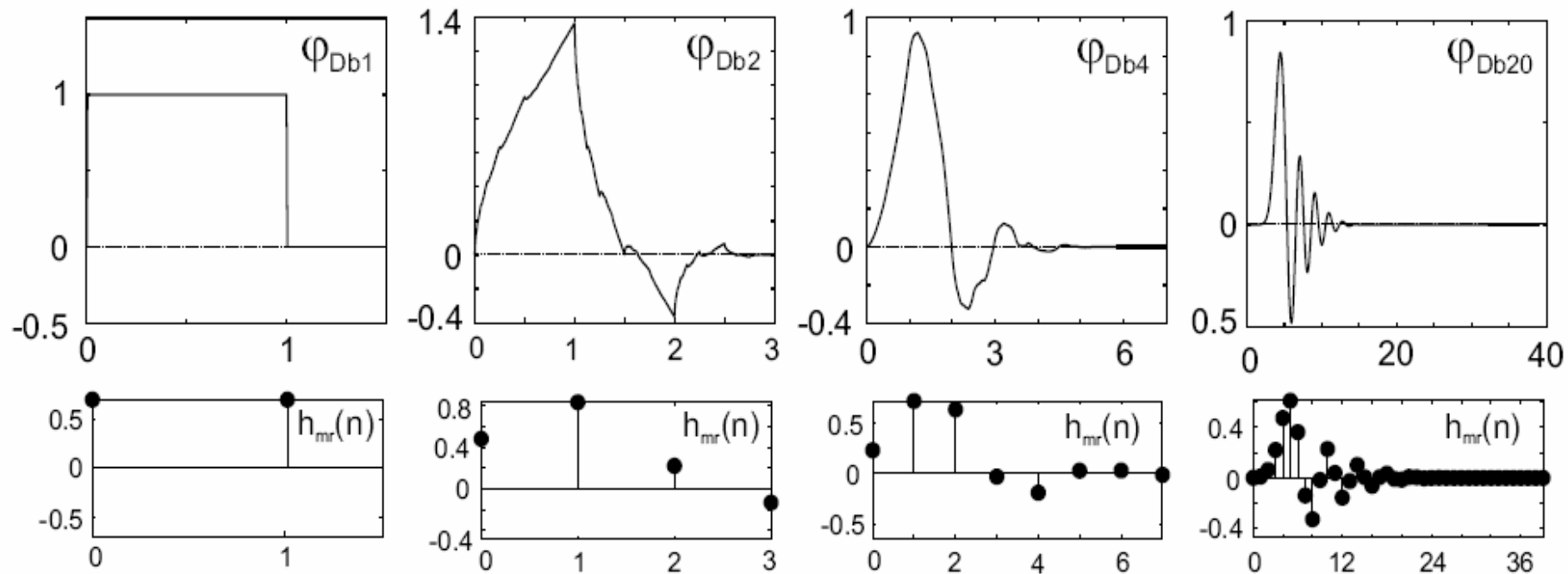


Na báзовých funkciách pre Haarovu WT môžeme vidieť, že

- 1) Priamy súčet podpriestorov V_1 a W_1 je V_0 , t.j. báзовé funkcie V_0 sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia báзовých funkcií V_1 a W_1
- 2) Bázy vo V_1 a W_1 môžeme vyjadriť pomocou bázy V_0 , t.j.:

$$\varphi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) + \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad h_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\psi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) - \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad g_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



Obr. 1.14. Príklady funkcií mierok $\varphi(t)$ a zodpovedajúcich dilatačných koeficientov $h_{mr}(n)$ pre Daubechieovej (Db) wavelety rádu 1, 2, 4, 20. Vidíme, že dĺžky $h_{mr}(n)$ presne zodpovedajú *nosičom* funkcií mierky.

Algoritmus výpočtu Waveletových radov a disktrétnej waveletovej transformácie

Nech funkcia $s(t) \in L(R)$. Potom súradnice jej *priemetu* do priestoru V_m môžeme vyjadriť ako:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$$

Získavame diskkrétne množinu *koeficientov mierky* $c_m(n)$.

Aká informácia sa do nich uložila? \rightarrow spravme spätnú rekonštrukciu

$$\hat{s}_{V_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n) \varphi_{m,n}(t)$$

Získavame $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ - *aproximáciu* (ap_m) funkcie $s(t)$ vo V_m .

Analogicky priemetom $s(t)$ do W_m získame *waveletové koeficienty* $d_m(n)$:

$$d_m(n) = \langle s(t), \psi_{m,n}(t) \rangle$$

Aká informácia sa do nich uložila? \rightarrow spravme spätnú rekonštrukciu

$$\hat{s}_{W_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_m(n) \psi_{m,n}(t)$$

Získavame $\hat{s}_{W_m}(t) \in W_m$ - *detail* (de_m) funkcie $s(t)$ vo W_m .

Projekciou $s(t)$ do V_{m+1} a W_{m+1} môžeme získať koeficienty:

$$c_{m+1}(n) = \langle s(t), \varphi_{m+1,n}(t) \rangle$$

$$d_{m+1}(n) = \langle s(t), \psi_{m+1,n}(t) \rangle$$

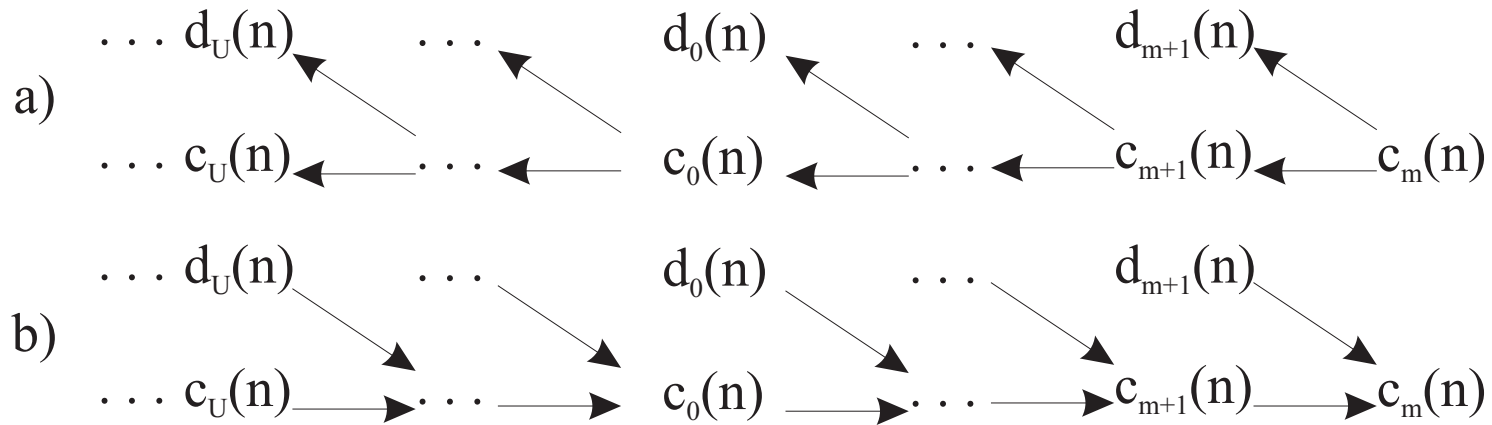
priamo. A podobne do všetkých ostatných priestorov W_i (to predsa chceme, nie?)

➔ Keď poznáme vzťahy medzi bázami podpriestorov na susedných úrovniach rozlíšenia, môžeme tieto koeficienty vypočítať rýchlejšie?

Odpoveď je ÁNO:

rozklad:
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

Odvozenie:

Chceme odvodiť vzťah: $c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)c_m(k)$

Vieme, že platí: $\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n)$

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Vynásobme obe strany druhej rovnice $2^{-m/2}$ a za t dosadíme $2^{-m}t - n$:

$$2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n) = 2^{-m/2} \cdot 2^{1/2} \sum_k h_{mr}(k) \varphi(2(2^{-m}t - n) - k)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n}(t) &= \sum_k h_{mr}(k) 2^{-(m-1)/2} \varphi(2^{-(m-1)}t - 2n - k) = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_m(n) &= \langle f(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle = \left\langle f(t), \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \right\rangle = \sum_k h_{mr}(k) \langle f(t), \varphi_{m-1,2n+k} \rangle = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) c_{m-1}(2n+k) = \sum_k h_{mr}(k-2n) c_{m-1}(k) \end{aligned}$$

T.j: $c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k-2n)c_m(k)$

Výpočet waveletových radov

Pri výpočte *waveletových radov* z $s(t) \in L^2(R)$ môžeme zvoliť počiatkové V_m tak, aby $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j. začneme:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{n,m}(t) \rangle$$

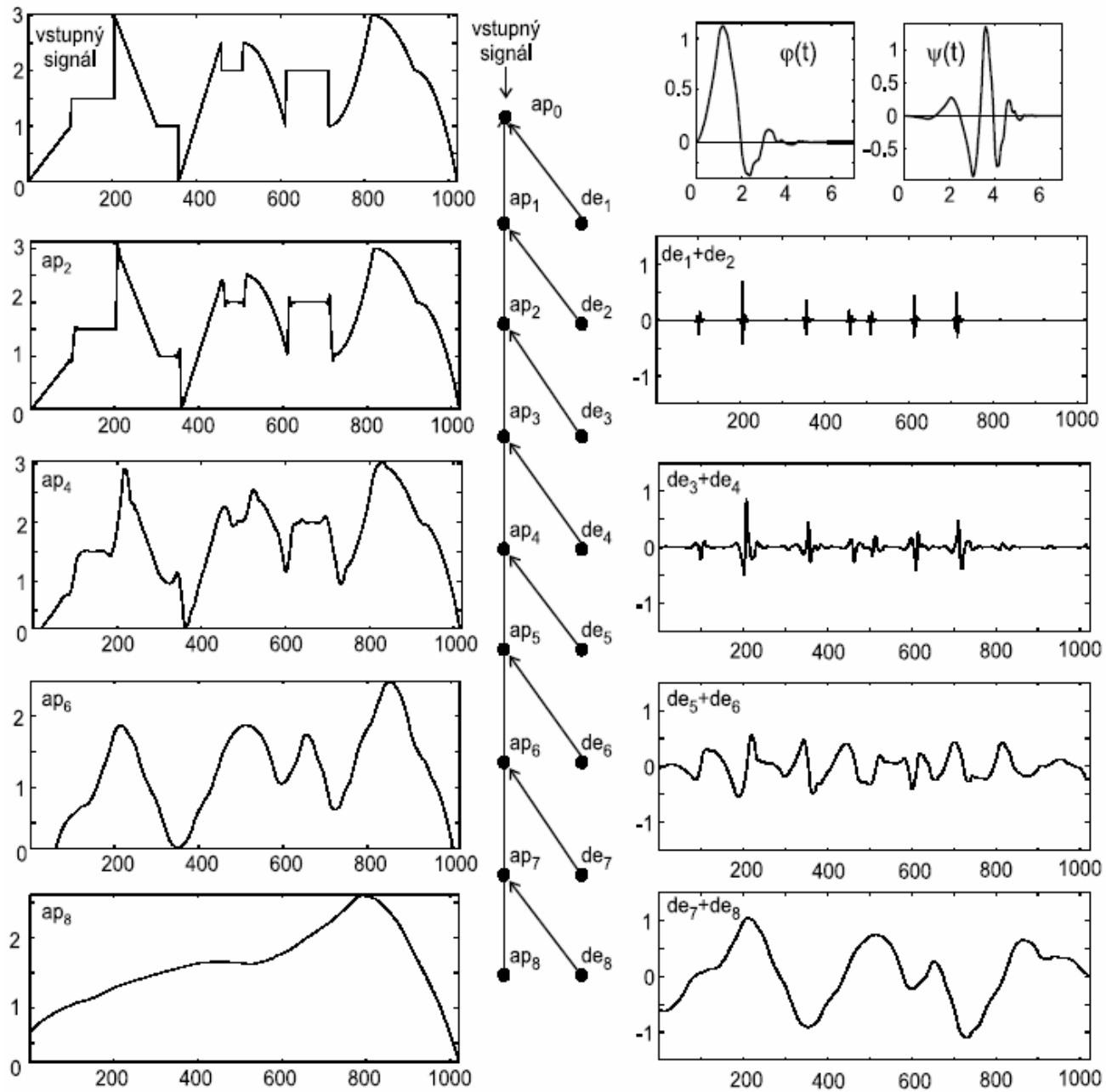
a ďalej pokračujeme v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahu na výpočet rozkladu, často iba po želanú úroveň rozkladu (napr. U).

V tejto reprezentácii môžeme $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ vyjadriť sumou rekonštrukcií signálu z koeficientov v príslušných podpriestoroch, t.j. (zbytkovej) aproximácie signálu $\hat{s}_{V_u}(t)$ a postupným pridávaním detailov $\hat{s}_{W_i}(t)$:

$$\hat{s}_{V_m}(t) = \hat{s}_{V_u}(t) + \hat{s}_{W_u}(t) + \hat{s}_{W_{u-1}}(t) \dots + \hat{s}_{W_m}(t)$$

t.j. napr. pre $m=0$:

$$ap_0(t) = ap_U(t) + de_U(t) + de_{U-1}(t) \dots + de_0(t)$$



Výpočet DWT

Pri výpočte *diskrétnej waveletovej transformácie* (DWT) interpretujeme vstupné dáta $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ do V_0 a ďalej pokračujeme rozkladmi ako pri WR.

Ak je signál konečnej dĺžky L , potom pre max. počet úrovní rozkladu U platí

$$U \leq \log_2 L$$

Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskrétny v čase, *báza projekčných priestorov bude diskrétna, vytvorená z koeficientov pre zmenu rozlíšenia.*

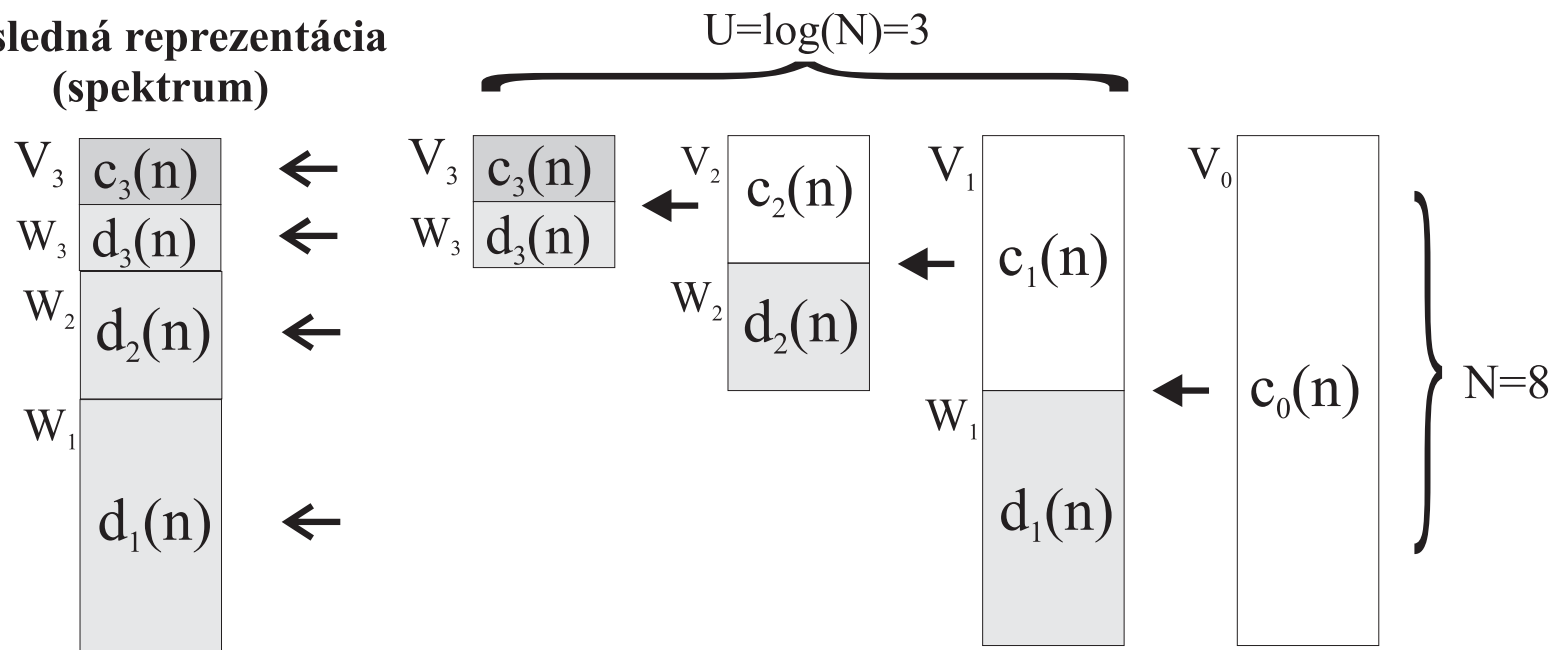
Celá transformácia potom môže byť vyjadrená v maticovom tvare ako ostatné diskkrétne lineárne transformácie.

rozklad:
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

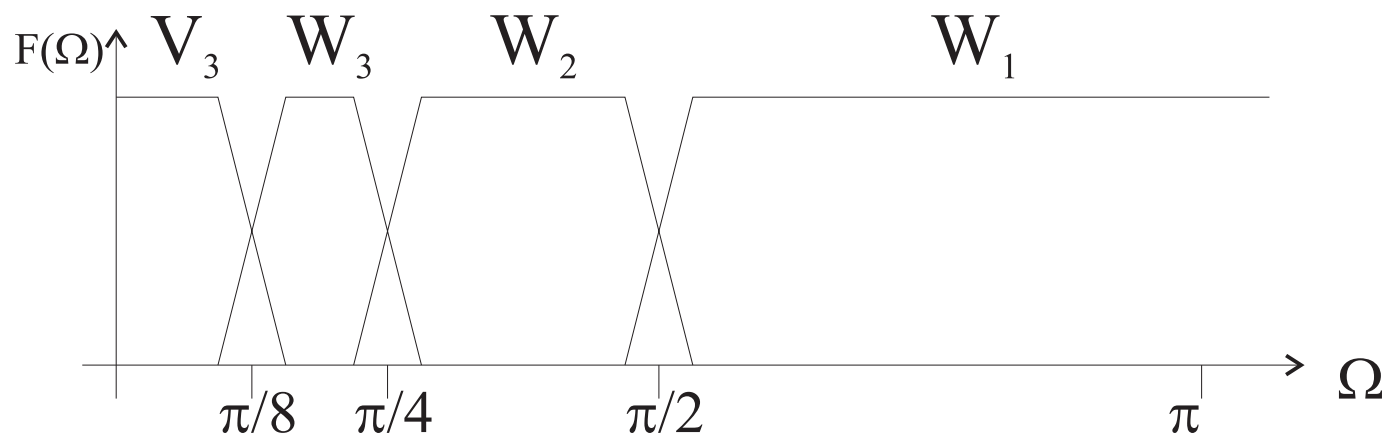
rekonštrukcia:
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$

Výpočet WR a DWT sa v praxi realizuje bankami filtrov.

**Výsledná reprezentácia
(spektrum)**

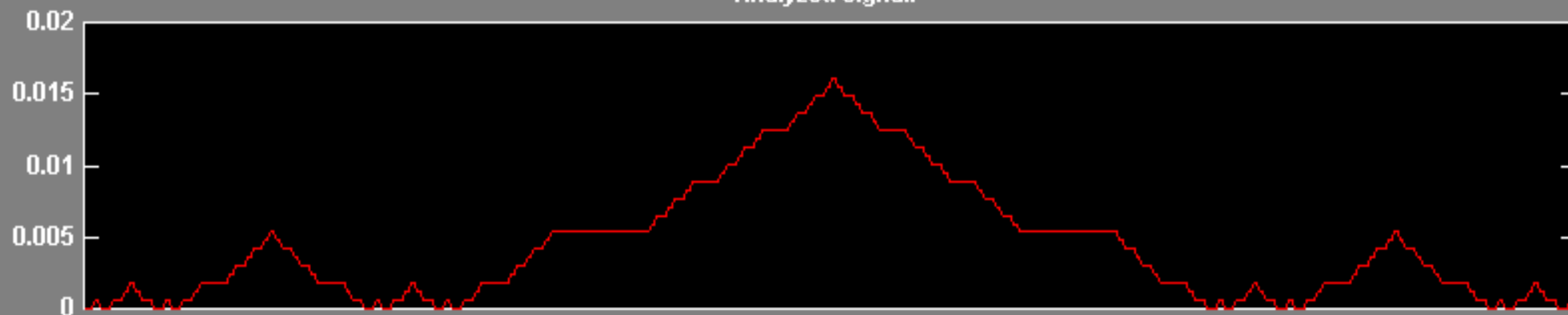


Výpočet koeficientov pri DWT a veľkosti vstupného vektora 8.

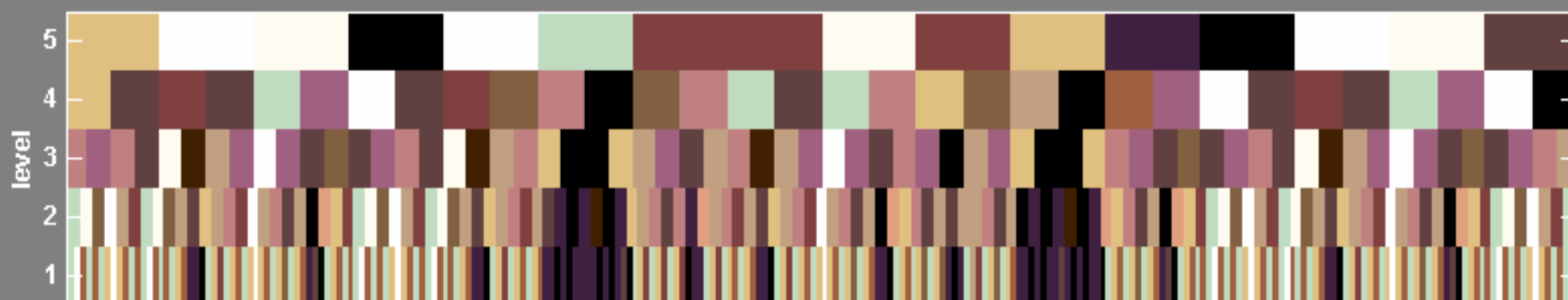


Označme diskrétny vstup pre DWT ako $f(n)$. Na príklade jeho DTFT $f(\Omega)$ je znázornené, ktoré časti spektra budú vyjadrené v ktorých podpriestoroch.

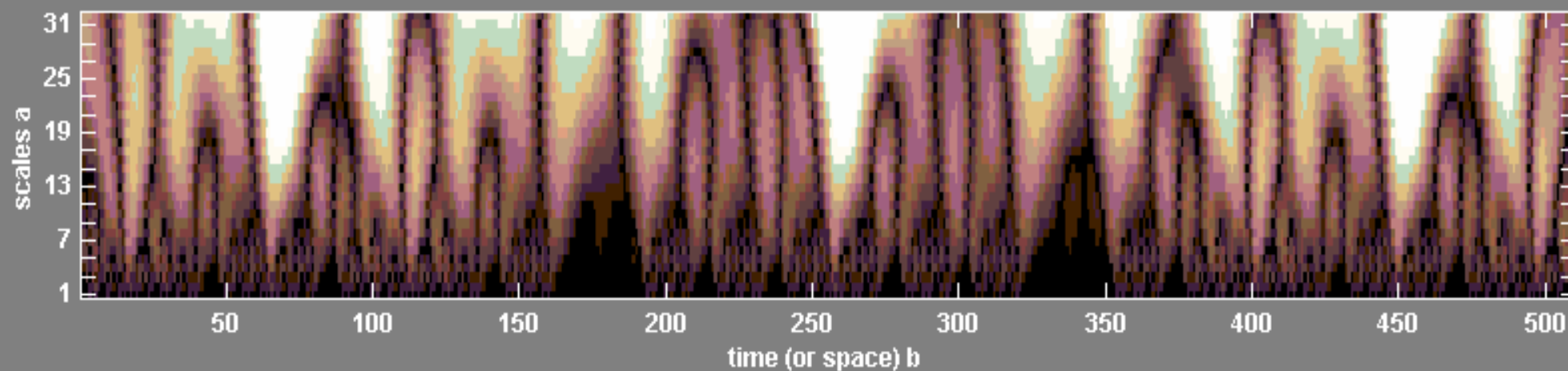
Analyzed signal.



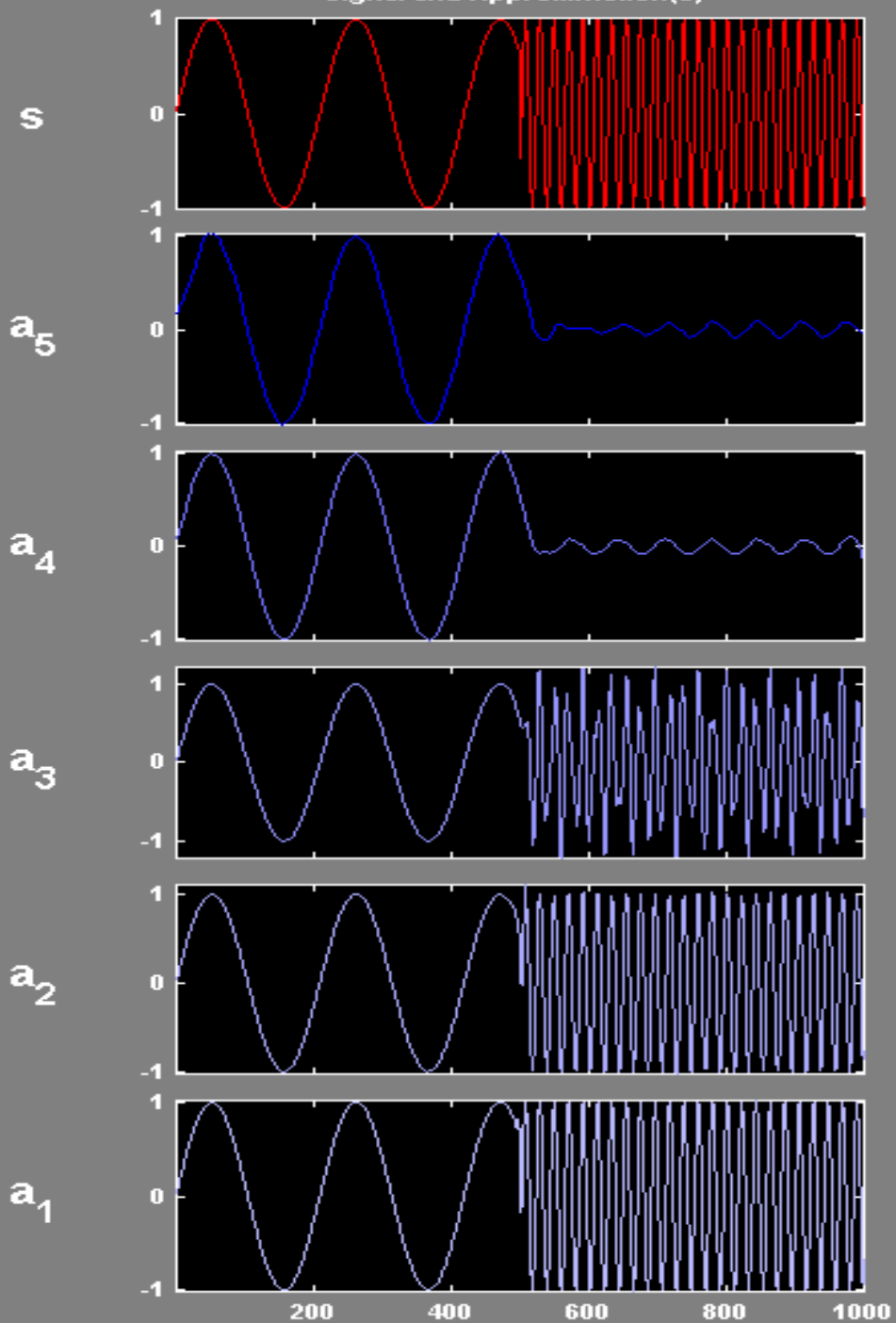
Discrete Transform, absolute coefficients.



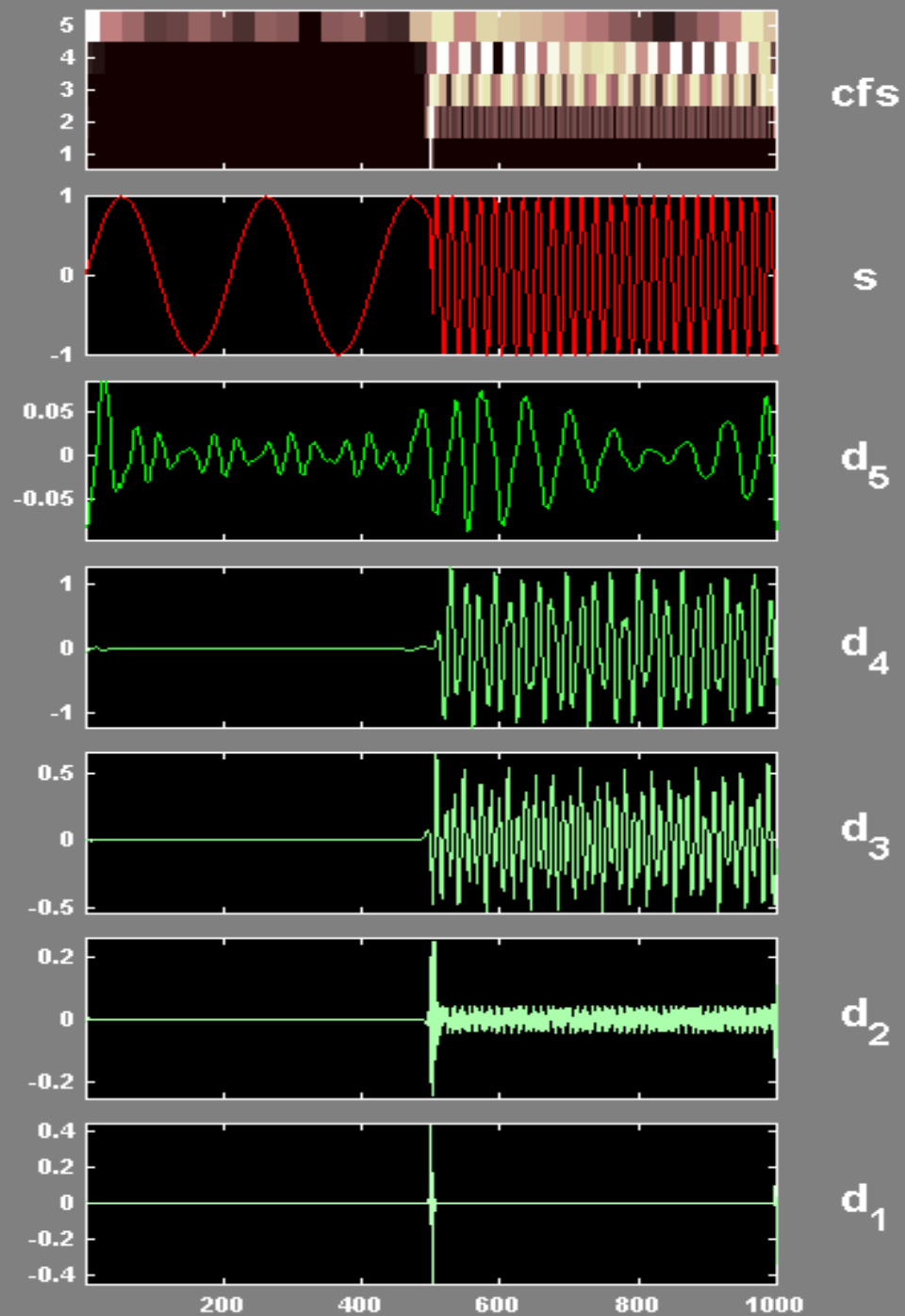
Absolute Values of $C_{a,b}$ Coefficients for $a = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots$



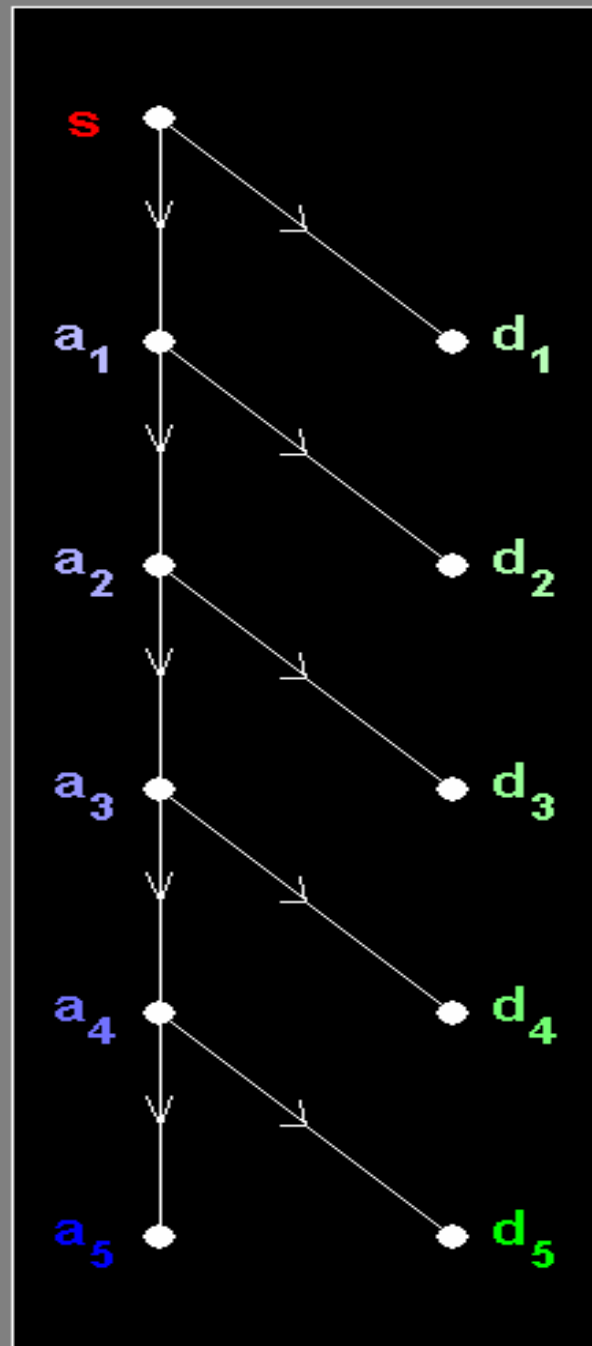
Signal and Approximation(s)



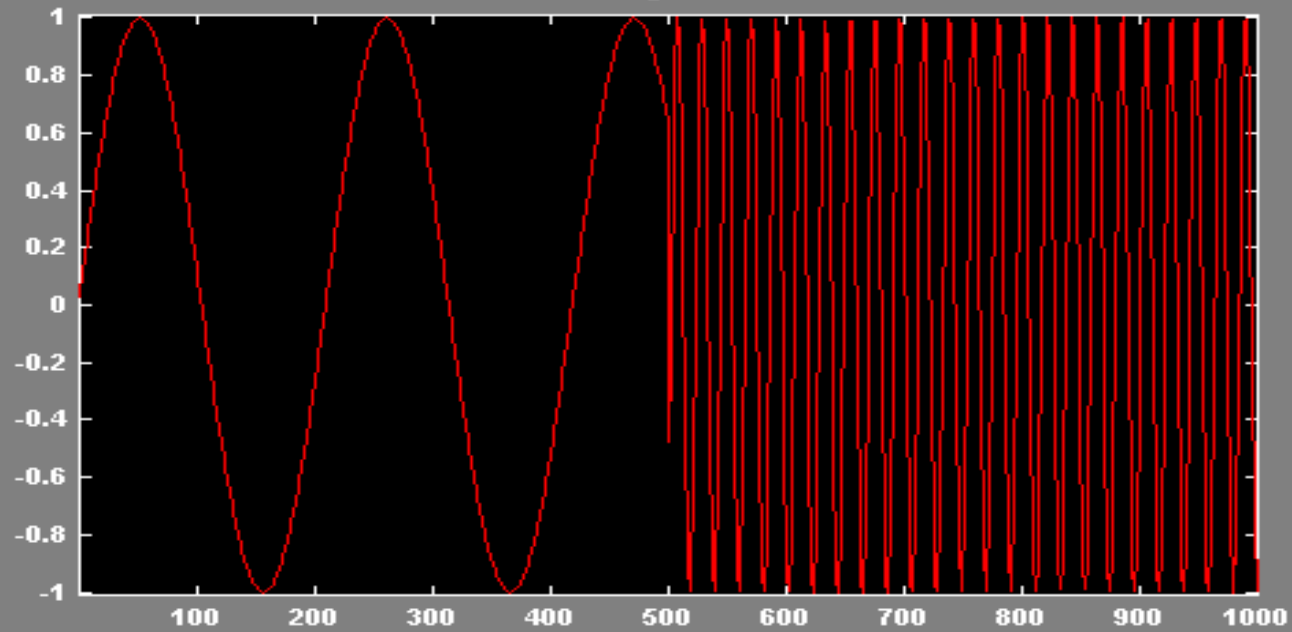
Coefs, Signal and Detail(s)



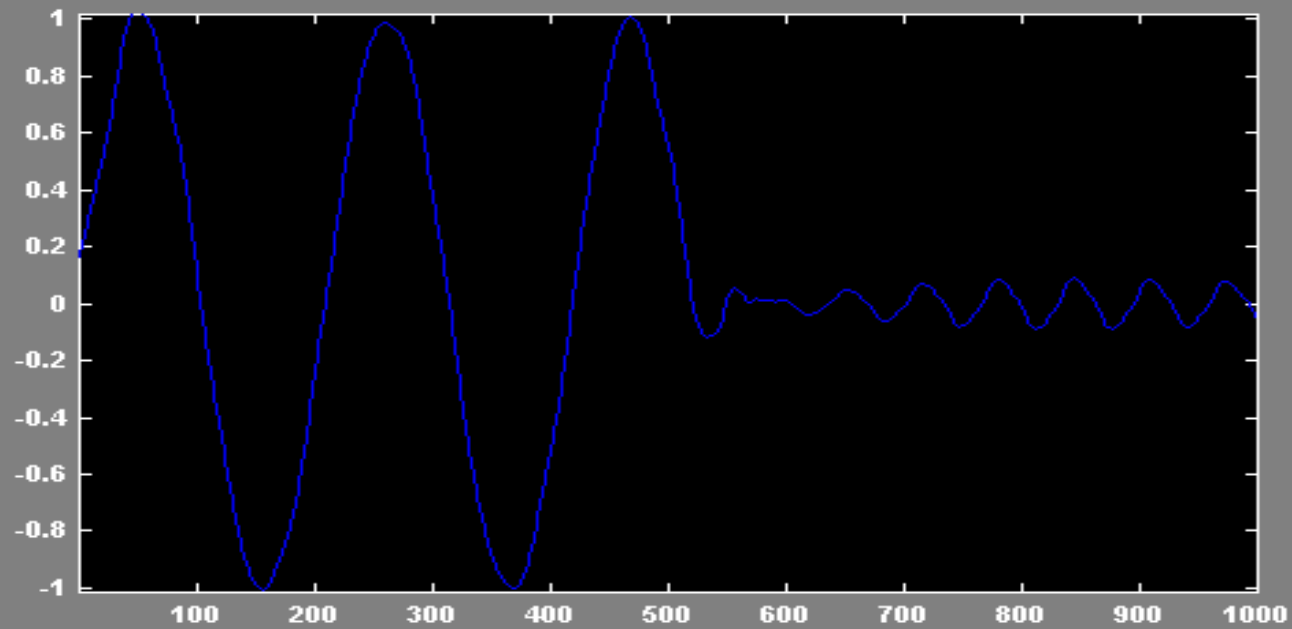
DWT : Wavelet Tree

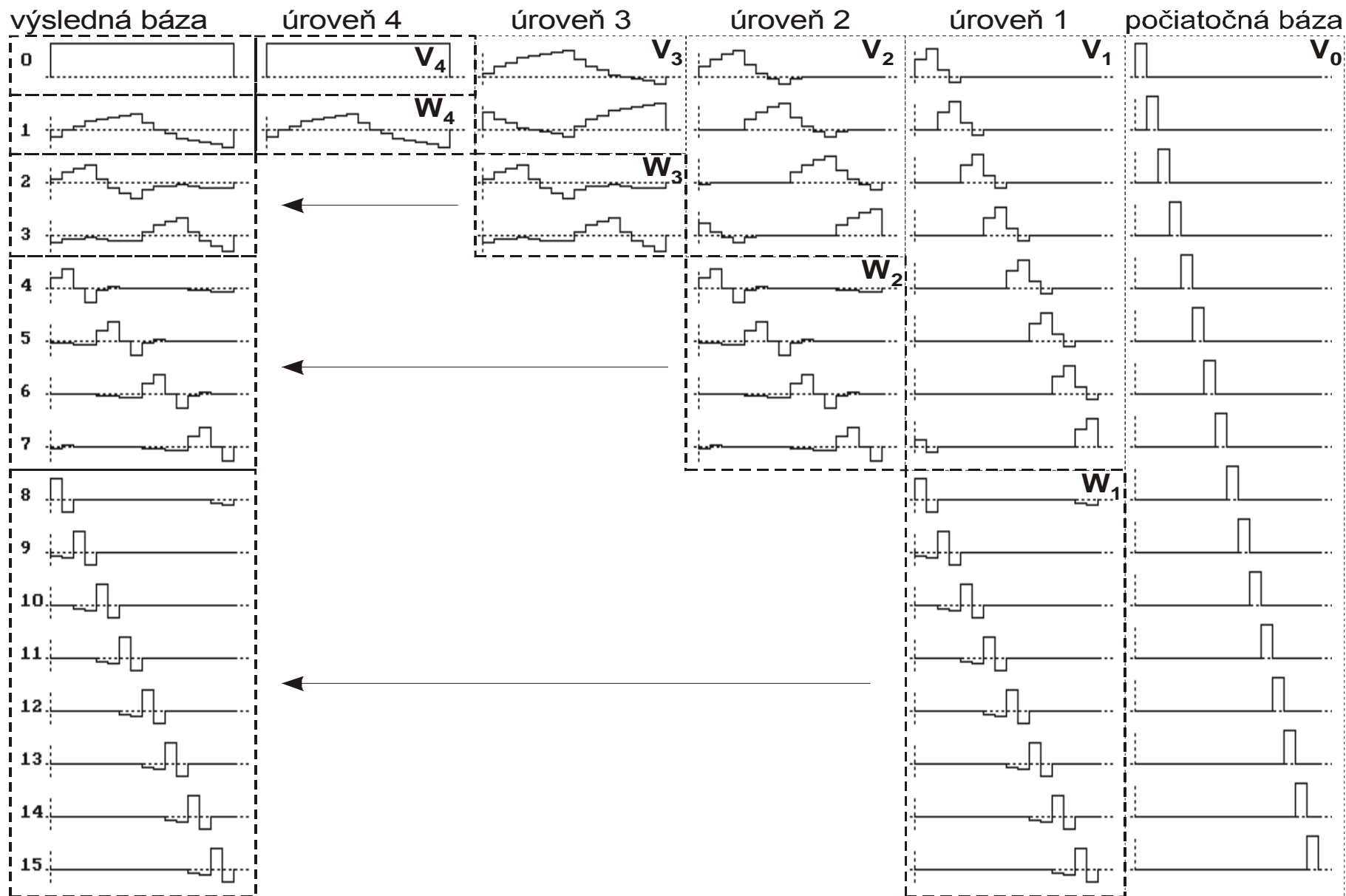


Signal

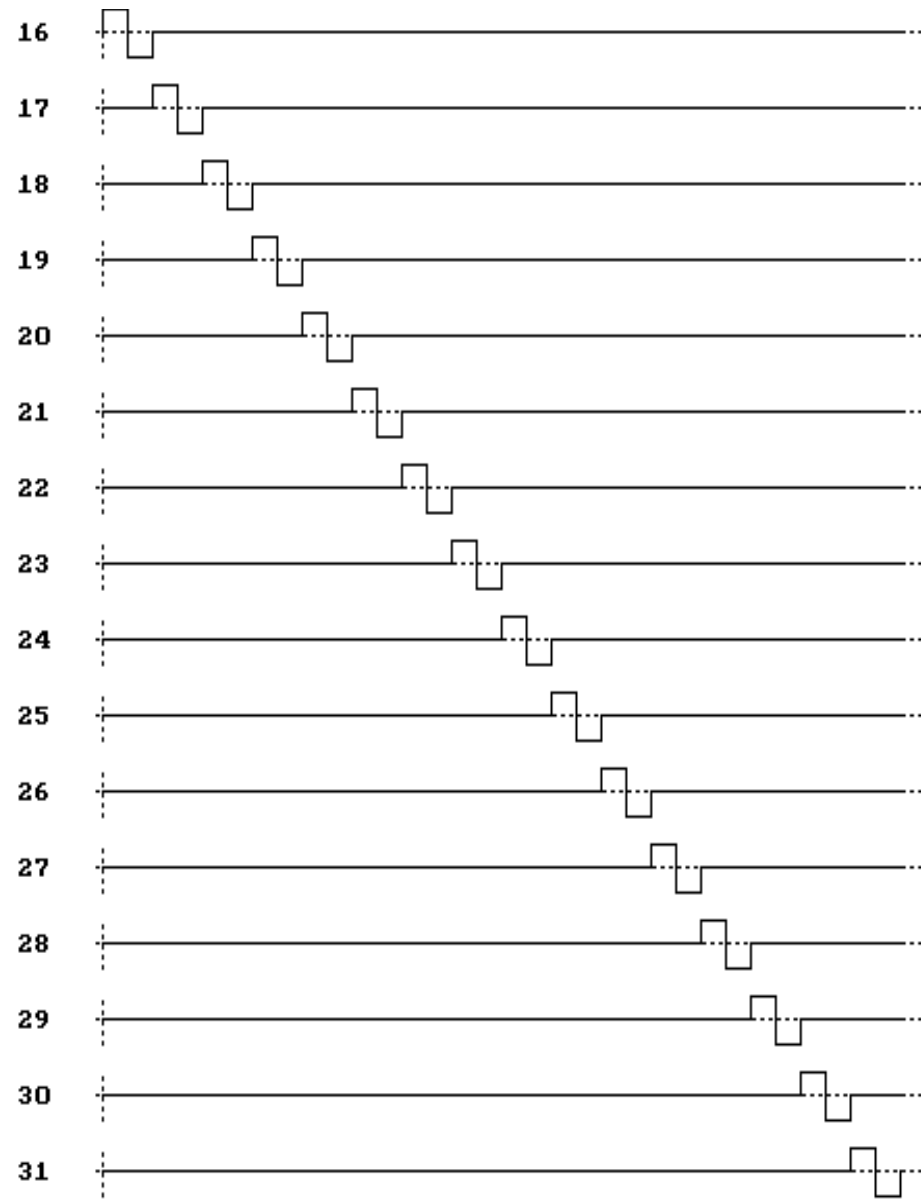
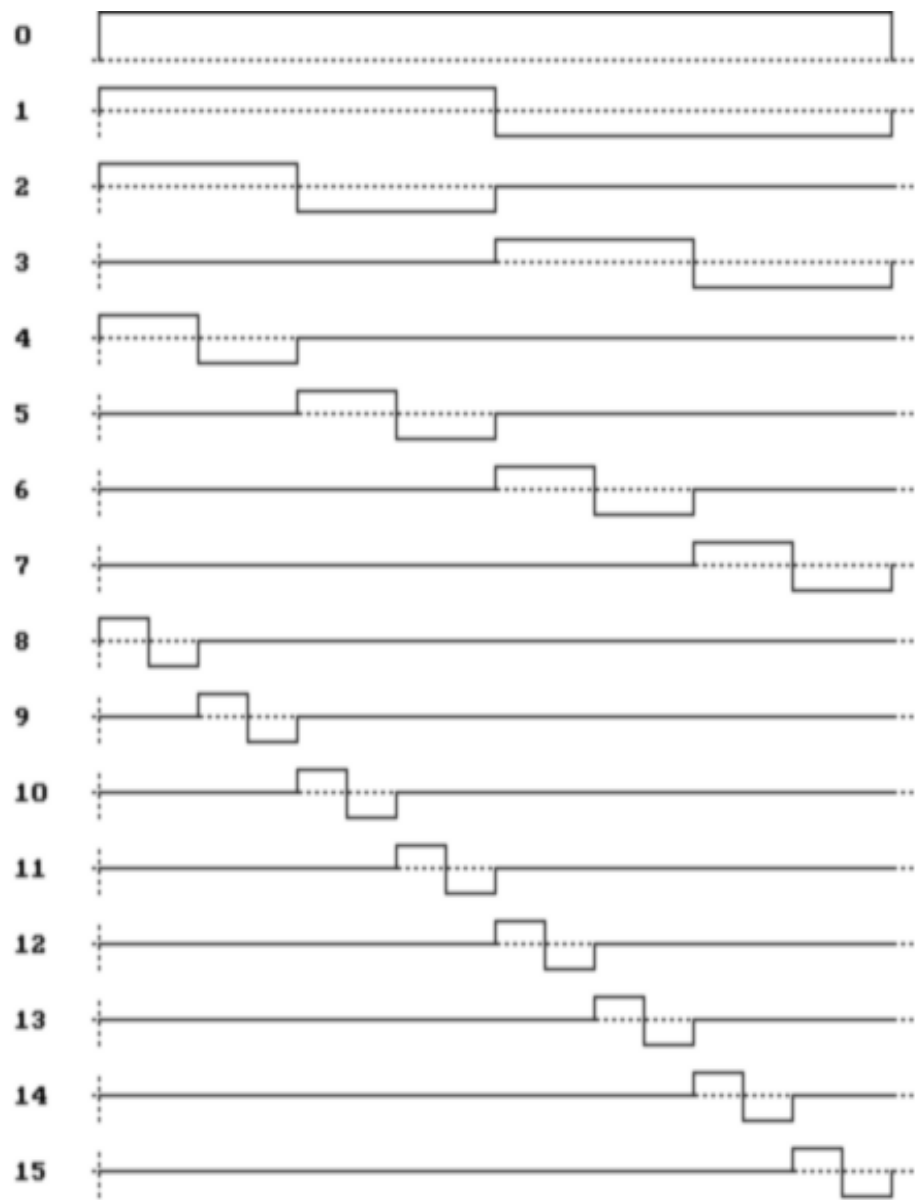


Approximation at level 5 (reconstructed).

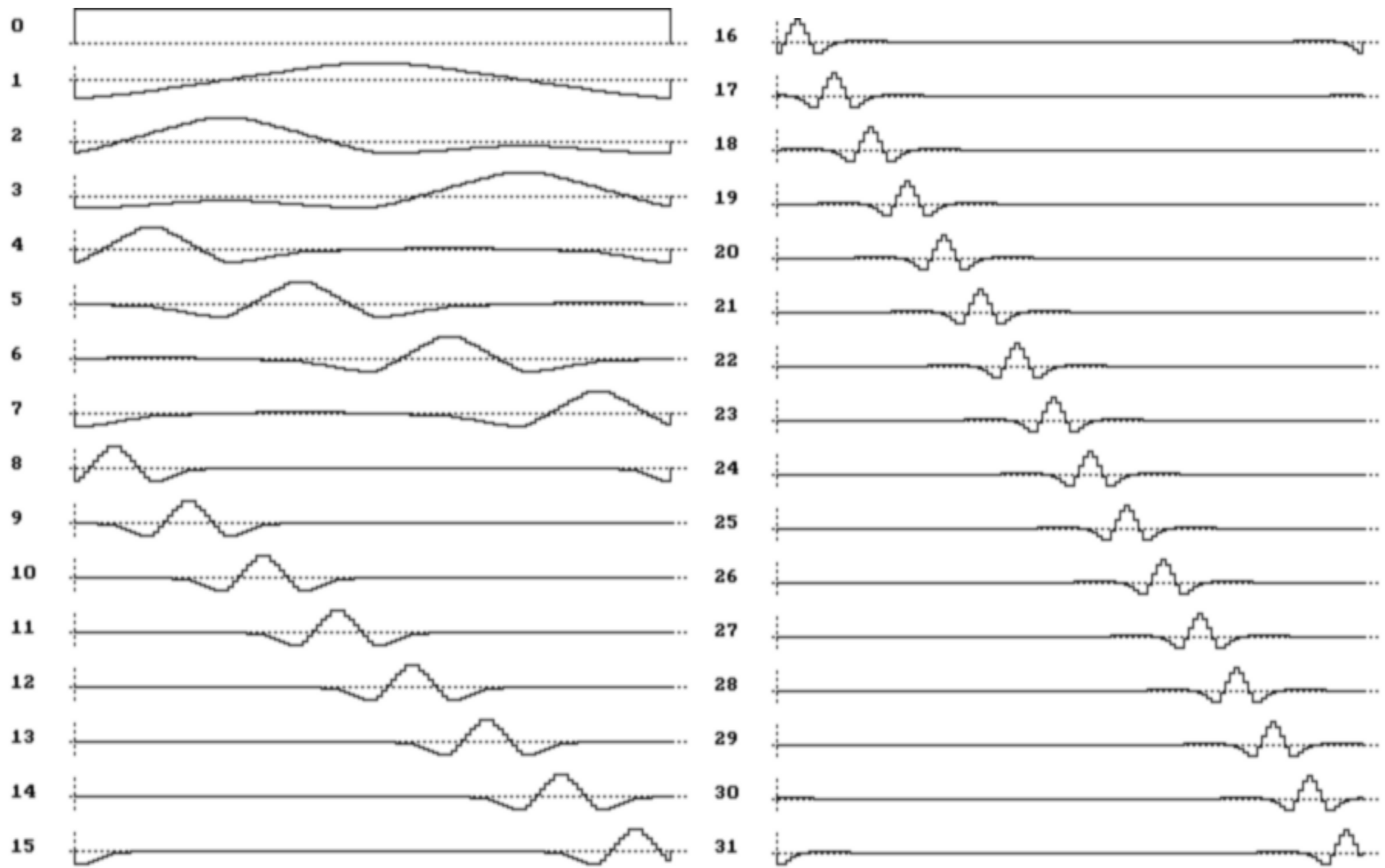




Štruktúra bázy pri ortogónálnej DWT s Db2. Pri vstupe do V_0 je báza tvorená posunmi jednotkových impluzov. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov predstavujú bázové vektory čoraz lepšiu aproximáciu waveletov.



Bázové funkcie diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=32$ pre Haarov wavelet



Prvých 32 bázových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet