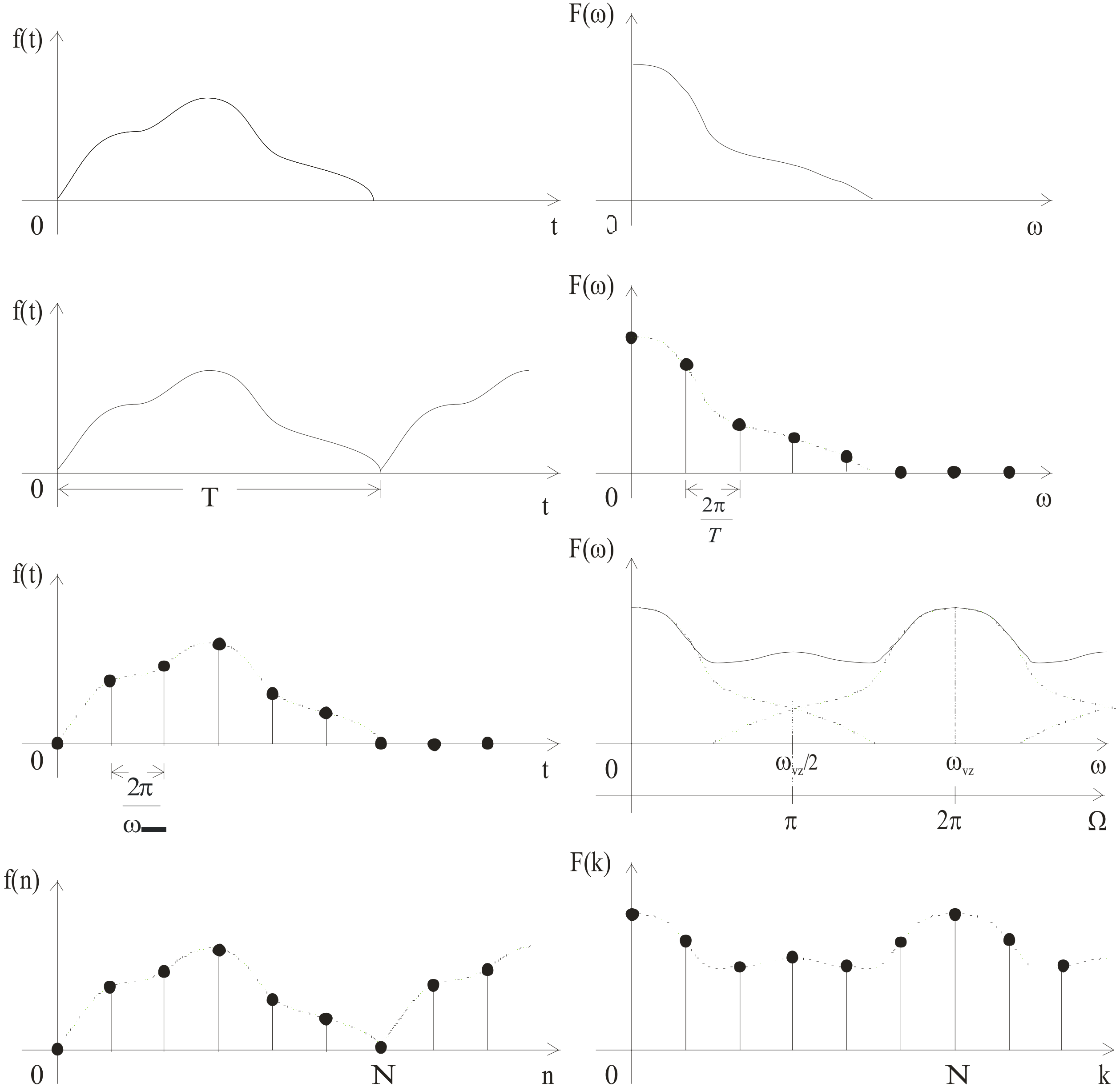
# Fourierova transformácia a jej druhy




**a)CTFT(Continuous Time Fourier Transform)**

$$F(\omega)=\int_t f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_\omega F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

**b) CTFS (Continuous Time Fourier Series)**

$$F(k)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt$$

$$f(t)=\sum_k F(k)e^{j2\pi kt/T}$$

**c) DTFT (Discrete TimeFourier Trasform)**

$$F(\Omega)=\sum_n f(n)e^{-j\Omega n} \qquad \Omega=2\pi\omega/\omega_{vz}$$

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

**d) DTFS (Discrete Time Fourier Series)**

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-nk}$$

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(k)e^{j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{N-1} F(k)W_N^{nk}$$

$$W_N=e^{j2\pi/N}$$

# Reprezentácia signálu v čase a frekvencii

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii.

- Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform),* Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

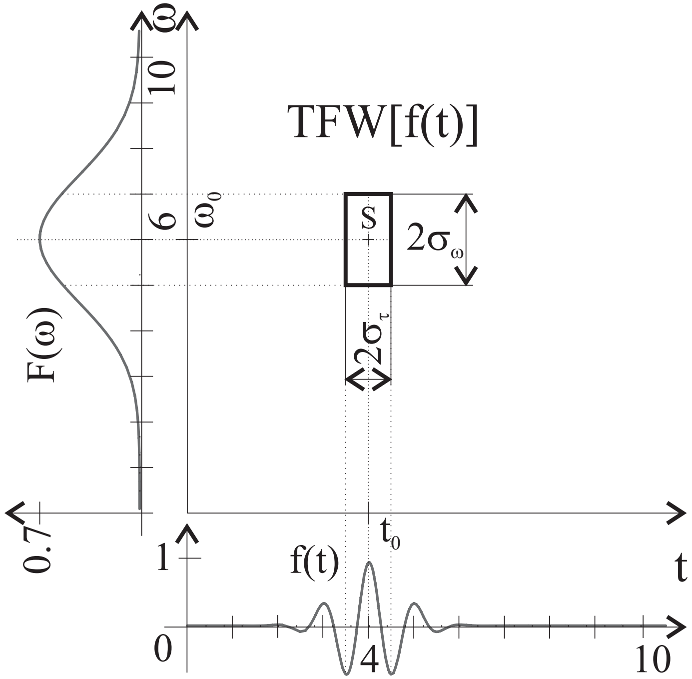
$$F(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-j\omega t}dt=\left\langle f(t)g(t-\tau),e^{j\omega t}\right\rangle$$

  ,kde $g(t)$ je *oknová funkcia* a $f(t)$ vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*.

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.
- Nadbytočnosť STFT môžeme odstrániť vzorkovaním

Každý signál môže byť znázornený v *časovo-frekvenčnej rovine(TF rovina)*, ktorá charakterizuje rozdelenie napr. energie signálu v čase a frekvencii:




$$x(t) = e^{-(t-4)^2}\cos(6(t-4))$$

Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú funkciu $x(t)$ a jej fourierovu transformáciu $X(\omega)$ je dané *časovo – frekvenčným oknom (TF okno)*. Jeho stred je v bode $S=(t_0,\omega_0)$, a veľkosti strán sú $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$. ($\omega_0$ sa nazýva stredná frekvencia signálu). Zobrazuje sa v tzv. *TF rovine*.

Platí:

$$t_0 = \|x(t)\|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2\,dt \qquad \omega_0 = \|X(\omega)\|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\omega|X(\omega)|^2\,d\omega \qquad \text{(1.moment)}$$

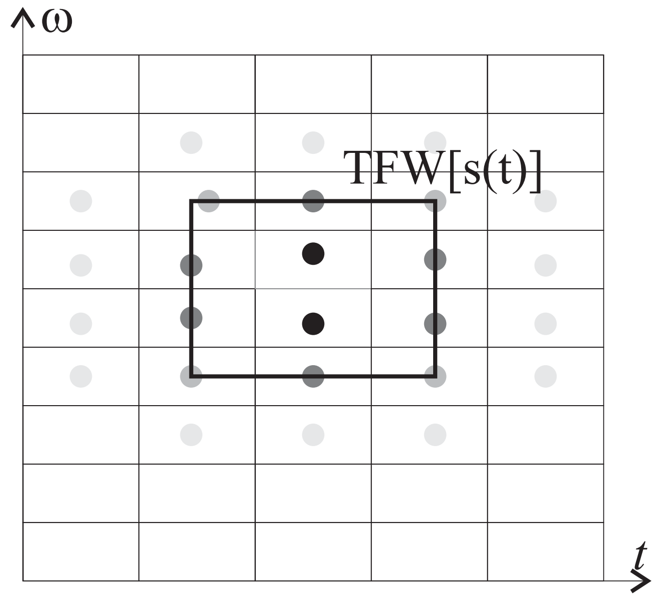
$$\sigma_t^2 = \|x(t)\|^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}(t-t_0)^2|x(t)|^2\,dt \qquad \sigma_\omega^2 = \|X(\omega)\|^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_0)^2|X(\omega)|^2\,d\omega \qquad \text{(2.moment)}$$

Rôzne $\tau, \omega$ pri STFT zodpovedajú posunom základného TF okna v čase a frekvencii

**➔TF okno nám hovorí o tom aké drobné detaily sme schopní v signále sledovať.**

**➔Hranice okna sú definované "štatisticky", t.j. neznamená to, že mimo okna má signal nulové hodnoty**

## <u>TF okno signálu a jeho význam pri určovaní hodnôt signálu v čase a frekvencii</u>

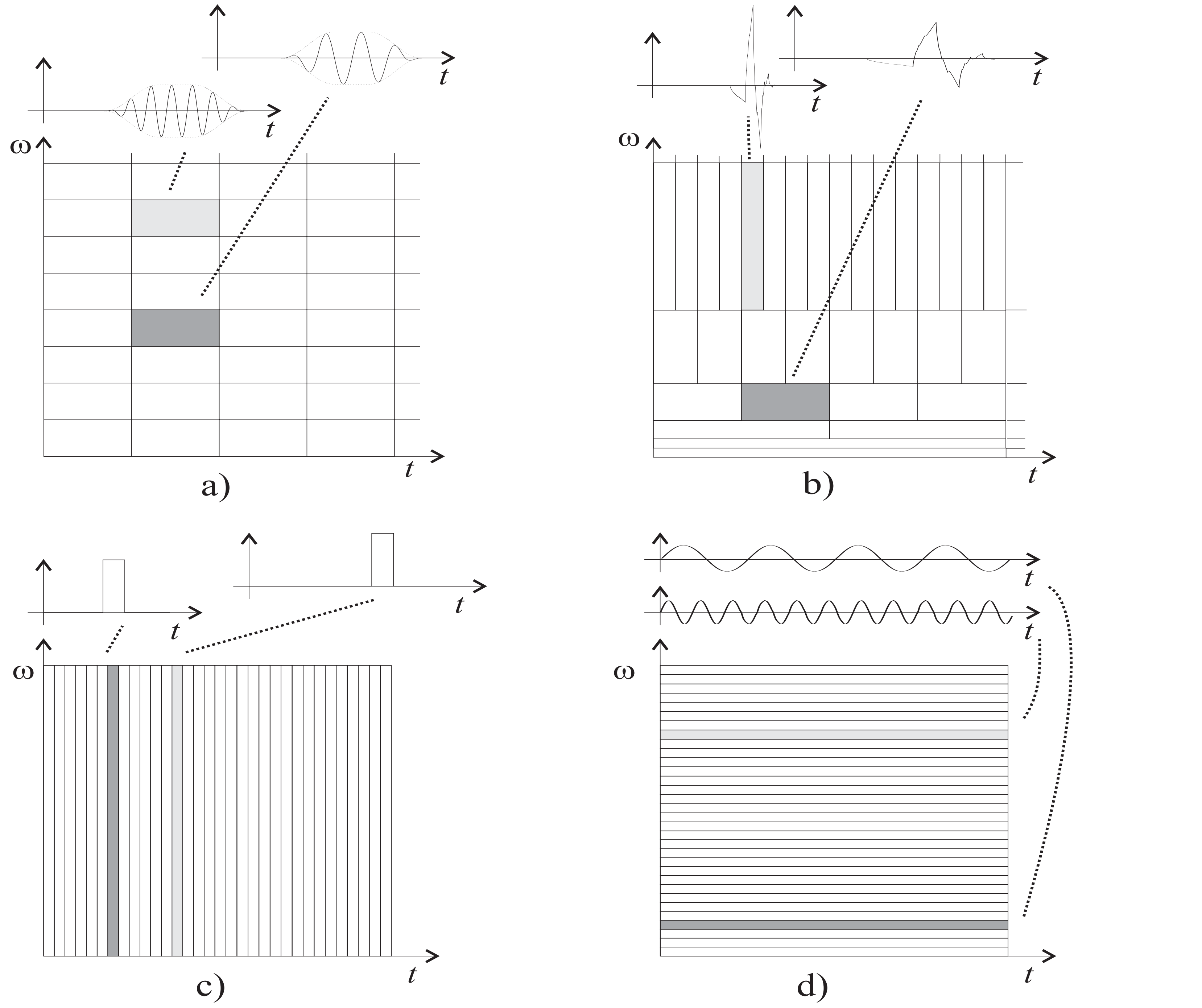



## <u>Princíp neurčitosti:</u>

Pre $x(t)$ idúce k nule rýchlejšie ako $1/\sqrt{t}$ ak $t \to \pm\infty$ platí:

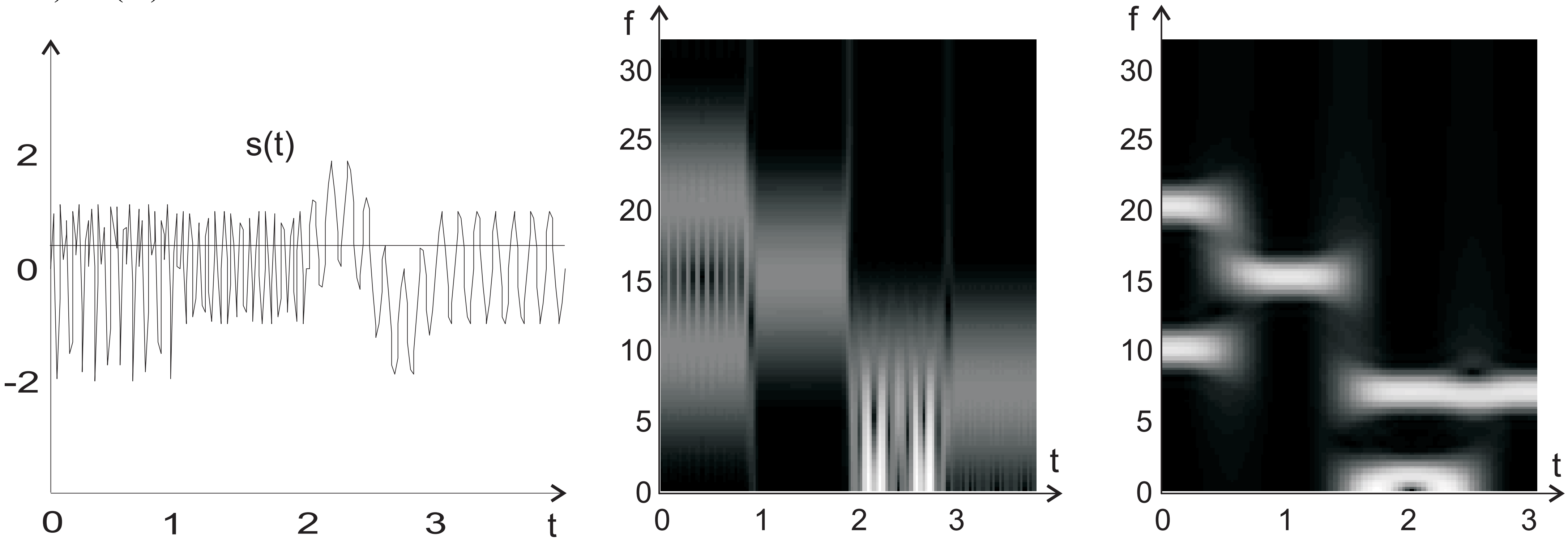
$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\varpi^2 \geq 1/4$$

# Najznámejšie príklady delenia TF roviny pri reprezentácii signálov(znázornené schématicky)



Spektrogram (SPG) signálu = pohľad na TF rovinu so zobrazenými magnitúdami spektrálnych koeficientov STFT(!) v strede TF okien odpovedajúcich bázových funkcií

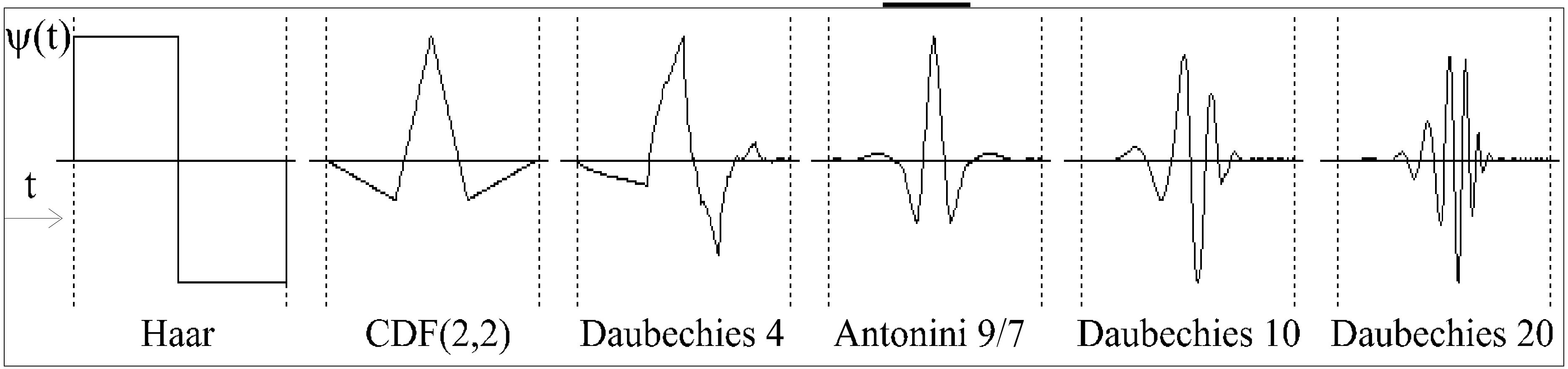
a) Signál zložený zo 4 častí
1) 2sin(5t)sin(15t)
2) sin(15t)
3) sin(t)+sin(7t)
4) sin(7t)




a) b) c)

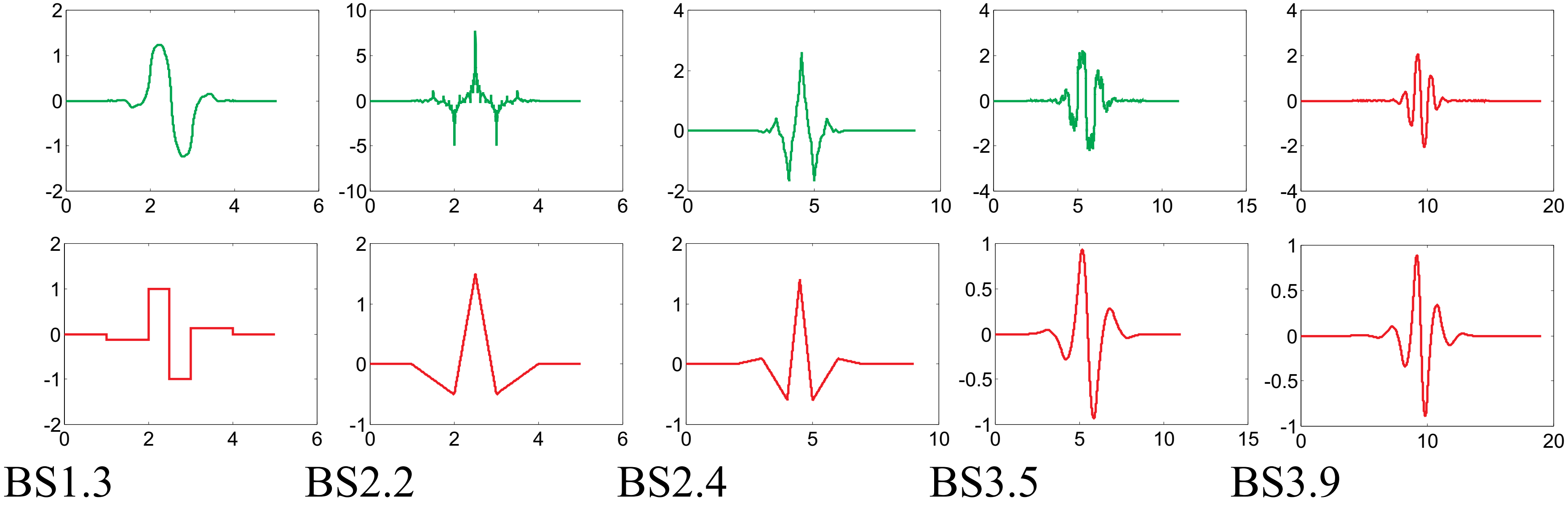
Diskrétne aproximácie spektrogramov (signál s je navzorkovaný, fvz= 64Hz)
b) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti12, prekryv okien 10
c) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti60, prekryv okien 58

***Waveletová transformácia (WT)*** **má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom** ***prototypovej funkcie (základného waveletu)*** $\psi(t)$




*Príklady rôznych druhov základných waveletov*

Príklady základných biortogonalnych spline waveletov ( $\psi(t)$ zelené, $\tilde{\psi}(t)$ červené )



- *Aké podmienky musí spĺňať* $\psi(t)$ ? Uvidíme neskôr

*Spojitá waveletová transformácia (SWT)* funkcie $f(t) \in L^2(R)$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(R) \to L^2(R^2)$ vzťahom

$$SWT_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{a,b}(t)dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \qquad a \in R^+, b \in R$$

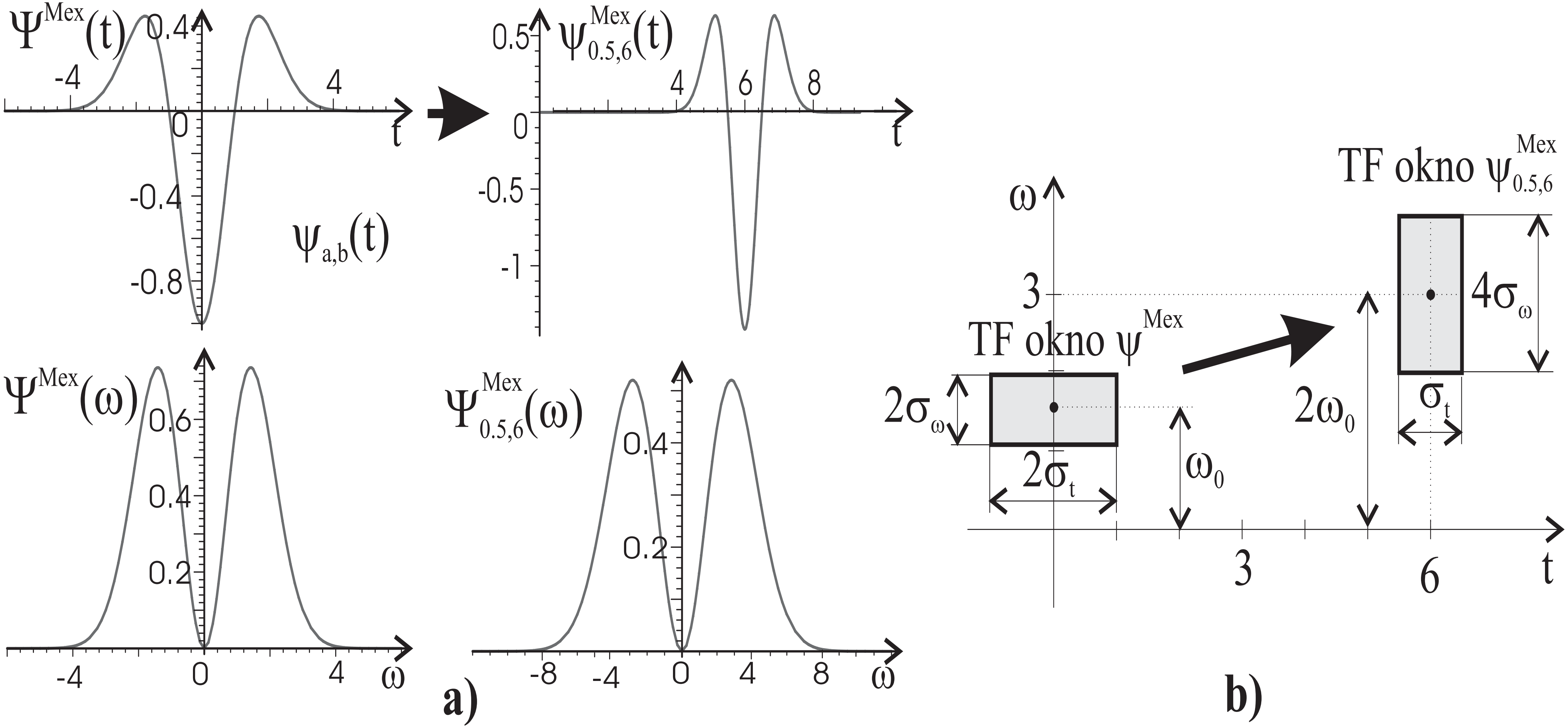
Funkcie $\psi_{a,b}(t)$ sú definované zo *základného waveletu* $\psi(t)$ pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu* $a$ , $b$ nasledovne:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad , \qquad \psi(t) \in L^2(R)$$

SWT v závislosti od parametra $a$ poskytuje pružné časovo - frekvenčné rozlíšenie. Ak *časovo - frekvenčné okno* $\psi(t)$ má rozmery $\sigma_t, \sigma_\varpi$ a stred v bode $S = (t_0, \omega_0)$, potom

$$\sigma_{ab_t} = a\sigma_t \qquad \sigma_{ab_\omega} = \sigma_\omega / a \qquad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0 / a)$$

T.j. obsah okna ostáva konštantne $4\sigma_t\sigma_\omega$ .




Príklad zobrazenia základného waveletu a jeho zmenenej a posunutej verzie,
a) v čase a frekvencii b) v TF rovine

**Príklad:** *Ak funkcia* $f(t)$ *má nenulové hodnoty na intervale* $(t_0, t_1)$, *kde bude nenulová* $f[(t-b)/a]$ *?*

**Riešenie:** *Hľadáme taký interval* $(t_0^*, t_1^*)$, *ktorý sa daným prepisom zobrazí na* $(t_0, t_1)$, *t.j.:* $t_0 = (t_0^* - b)/a$ *a* $t_1 = (t_1^* - b)/a$ *z toho* $t_0^* = at_0 + b$, $t_1^* = at_1 + b$. *Riešením je teda interval* $(at_0 + b, at_1 + b)$.

SWT je *invertovateľná,* ak pre Fourierovu transformáciu $\Psi(\omega)$ základného waveletu platí tzv. ***podmienka prípustnosti***:

$$C_\psi = \int_0^\infty \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty$$

Wavelet je potom ***prípustný*** a platí

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

t.j. $\Psi(\omega)$ má charakter *pásmového priepustu.*

Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} SWT_f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

Pozn.1:Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t.j. $\|\psi(t)\| = 1$.

Pozn.2: Normalizácia $1/\sqrt{a}$ pri výpočte $\psi_{a,b}(t)$ z $\psi(t)$ zabezpečuje $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$.

# Zovšeobecnenie

Pri SWT je možné použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu *rôzne základné wavelety* $\tilde{\psi}(t)$ a $\psi(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\tilde{\psi},\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle f, \tilde{\psi}_{a,b} \right\rangle \psi_{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

Invertovateľnosť je podmienená vzťahom pre výpočet $C_{\tilde{\psi},\psi}$ nasledovne:

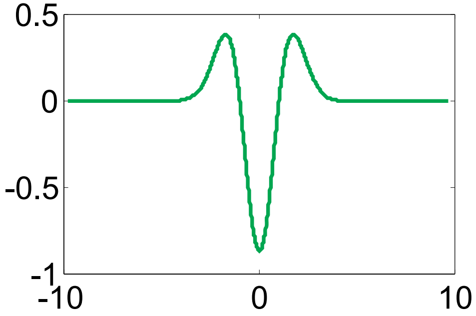
$$C_{\tilde{\psi},\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\tilde{\Psi}(\omega)\right| \left|\Psi(\omega)\right|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

Táto podmienka je postačujúca, základné wavelety nemusia spĺňať žiadne iné podmienky.

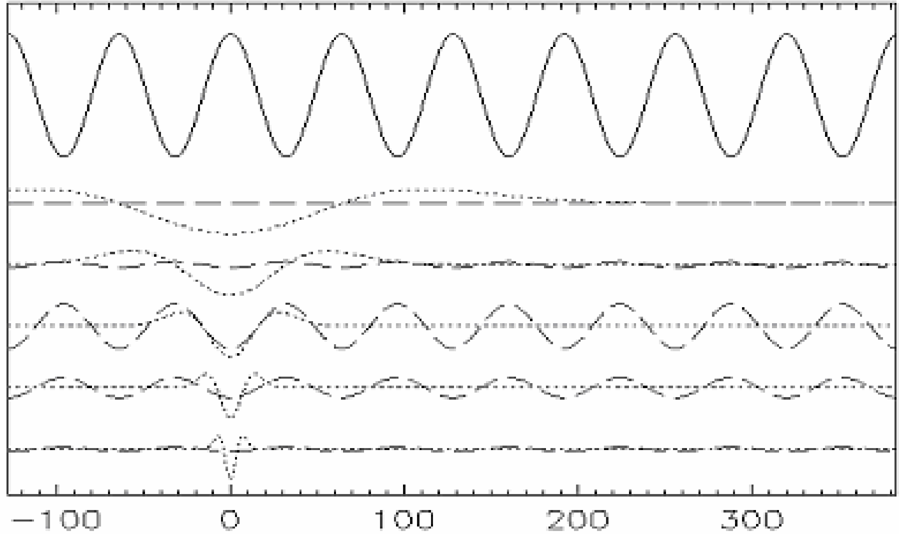
# Príklad

Wavelet "Mexický klobúk" (obrátená verzia)

$$\psi_{mex}(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

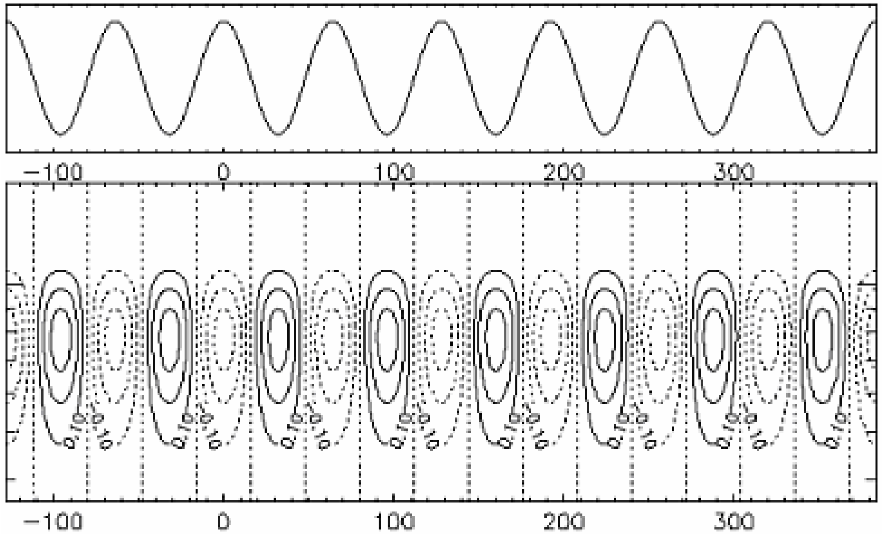



Analýza signálu $f(t) = \cos(t/10)$ pomocou $\psi_{mex}(t)$




a)Zhoda $f(t)$ s $\psi_{mex}(t)$ s meniacou sa mierkou

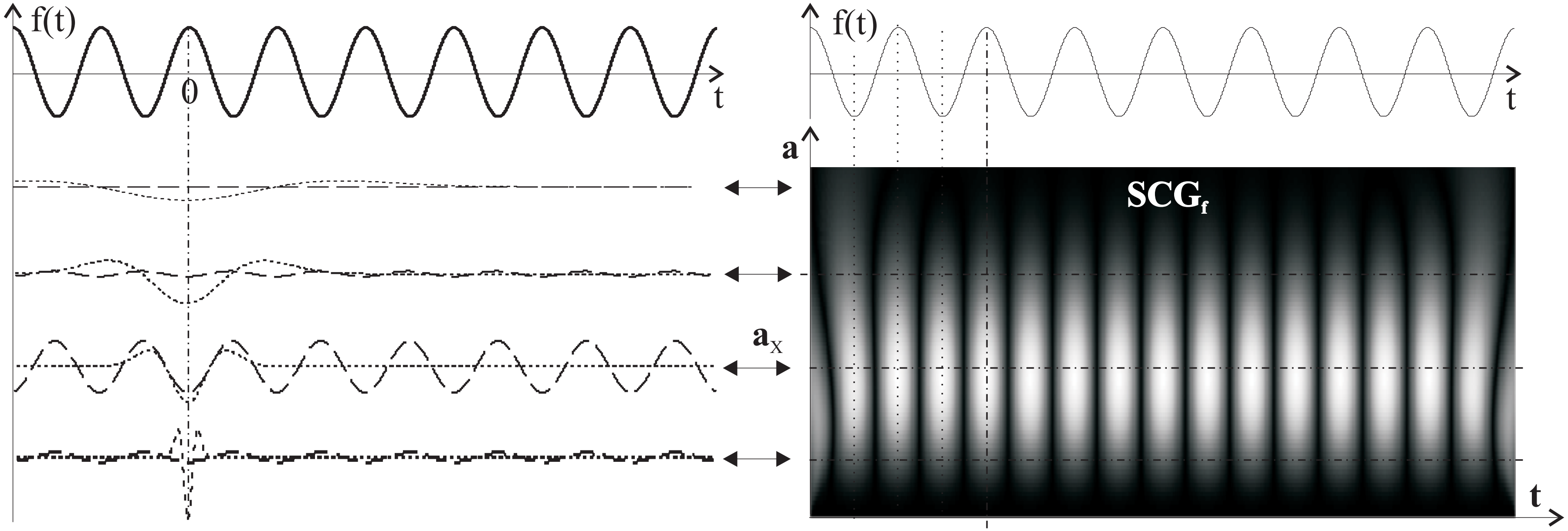
(výsledok znázornený bodkovane)




b)Znázornená výsledná SWT

$$SWT(k,\tau) = \sqrt{k}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{mex}[k(t-\tau)]dt$$

Ako štandardne znázorniť výsledky ➔ škálogram (SCG)

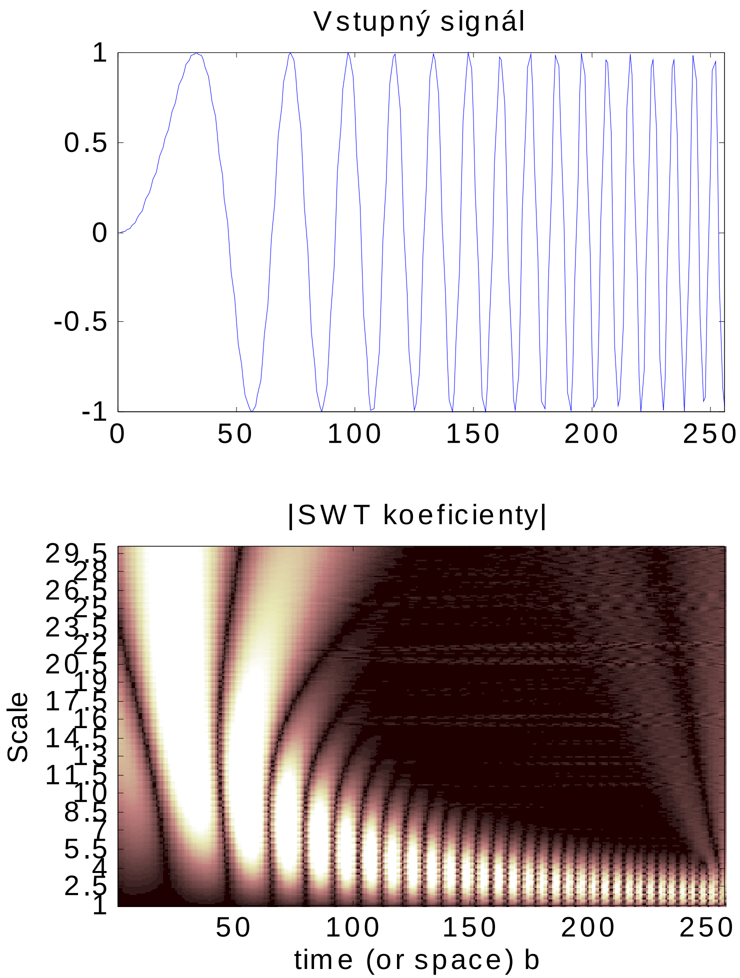



<u>Aký je vzťah medzi od spektrogramom a škálogramom ?</u>

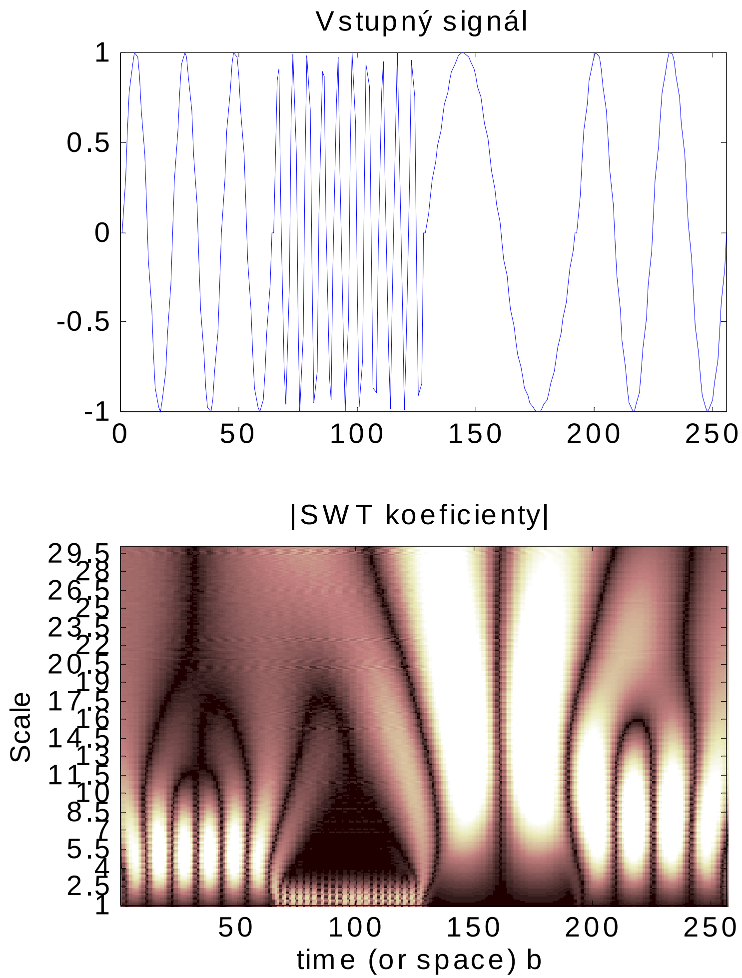
*TF(timefrequency) rovina → TS(time-scale) rovina*

➔ Prepočet súradníc (t, a) na (t, $\omega$) je triviálny, treba si uvedomiť', že súradnici a = 1 zodpoveda $\omega_0$ t. j. stredná frekvencia základného waveletu.

Príklady škálogramov SWT, použitý wavelet: $\psi_{mex}(t)$




a) $f(t) = \sin(t^2)$




a) $f(t)$ je kombináciou *sin(3t,10t,1t,2t)*

-