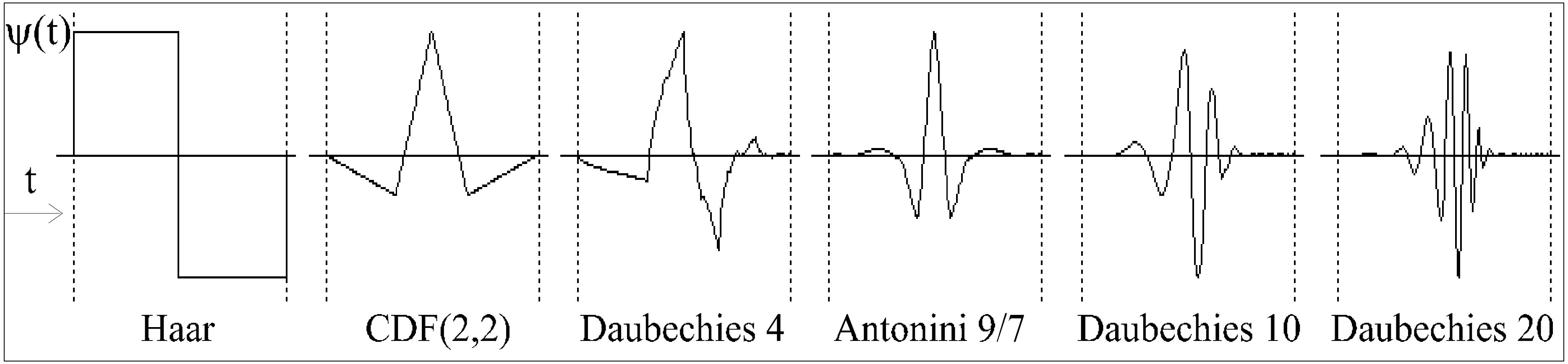
# Opakovanie z prednášky 1

## Wavelet, čo to je?




## *Separabilné Hilbertove priestory*

**Komplexné / reálne priestory**

### Priestor $l^2(Z)$

### Priestor $L^2(R)$

# Ortonormálne bázy

Množina $B = \{b_i\}$ je *ortonormálny systém* v priestore $E$.ak

$$\forall b_i, b_j \in B; \ \langle b_i, b_j \rangle = \delta(i-j)$$

$B = \{b_i\}$ je bázou priestoru $E$ , ak všetky $y \in E$ môžeme vyjadriť

$$y = \sum_k \alpha_k b_k$$

kde $\alpha_k$ sú *spektrálne koeficienty*

$$\alpha_k = \langle b_k, y \rangle .$$

# Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{b_i\}$ a $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ sú bázami priestoru $E$. Tieto bázy sú navzájom *duálne* resp. *biortogonálne*, ak:

a) ich bázová vektory sá *navzájom ortogonálne*, t. j. *biortogonálne*:

$$\forall i, j \in Z ; \ \langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i-j)$$

b) existujú kladné konečné konštanty $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$, že pre $\forall x \in E$ platí:

$$C\|x\|^2 \le \sum_k \left|\langle b_k, x\rangle\right|^2 \le D\|x\|^2 \qquad \tilde{C}\|x\|^2 \le \sum_k \left|\langle \tilde{b}_k, x\rangle\right|^2 \le \tilde{D}\|x\|^2$$

Potom signál $x \in E$ môžeme vyjadriť ako

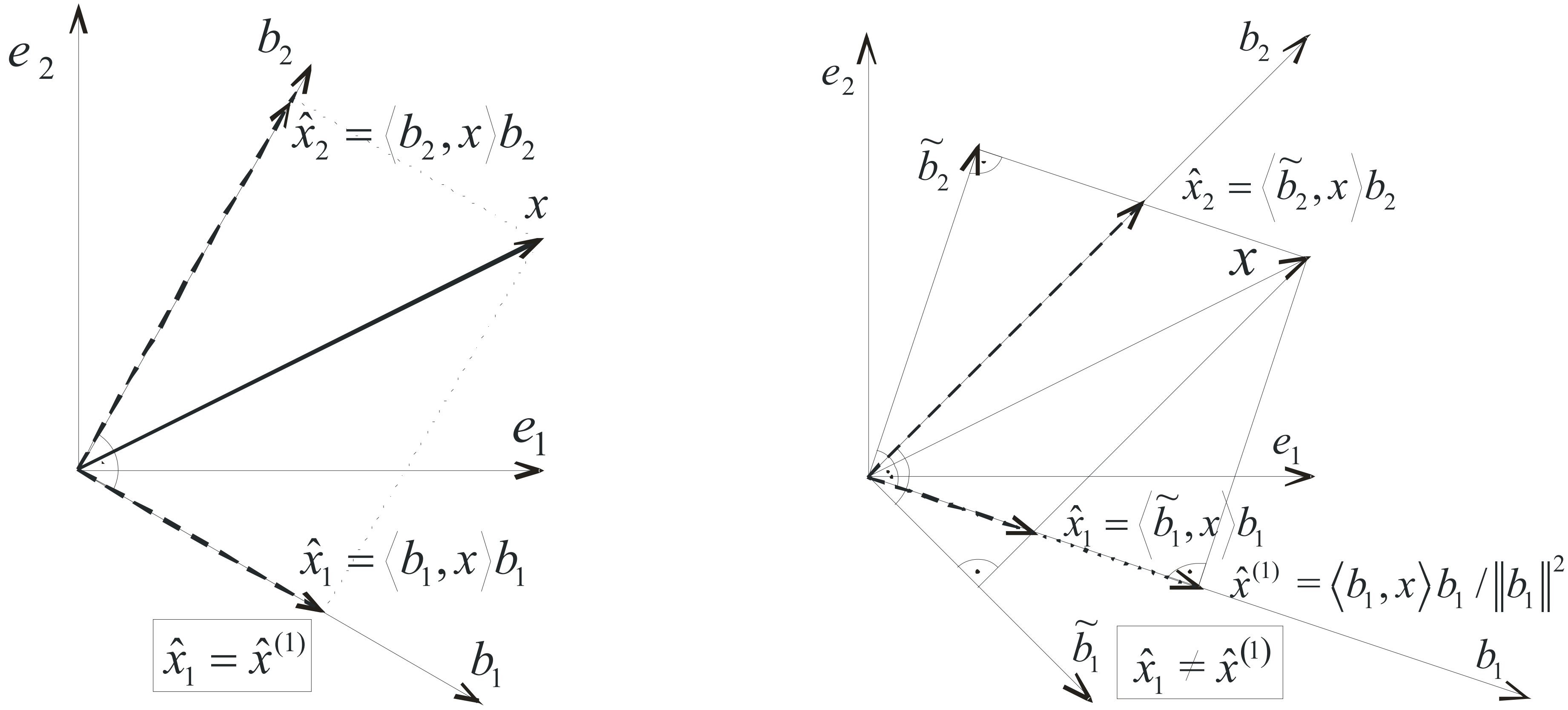
$$x = \sum_k \langle b_k, y \rangle \tilde{b}_k = \sum_k \langle \tilde{b}_k, y \rangle b_k$$

**Postupná aproximácia:**

A) Nech $S_k$ je *ortonormálna* báza $S_k$. Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S ako $\hat{x}^{(k)} = \sum_i \langle s_i, x \rangle s_i$. Keďže $s_i$ sú vzájomne ortogonálne (stačí aby báza $S_k$ bola ortogonálna), zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie v zmysle najmenších štvorcov. *Platí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j.:

$$\hat{s}^{(k+1)} = \hat{s}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x \rangle s_{k+1} \quad .$$

B) Keď $S_k$, báza $S_k$ nie je ortogonálna, *neplatí vlastnosť postupnej aproximácie, t.j. aproximáciu v* $S_{k-1}$ nemôžeme priamo použiť, je nutné celú aproximáciu prepočítať znovu.




a) Ortonormálna báza $B$

$$B = \{b_1, b_2\} = \left\{\left(\sqrt{3}/2, 0.5\right), \left(0.5, \sqrt{3}/2\right)\right\}$$

b) $B$ je neortogonálna

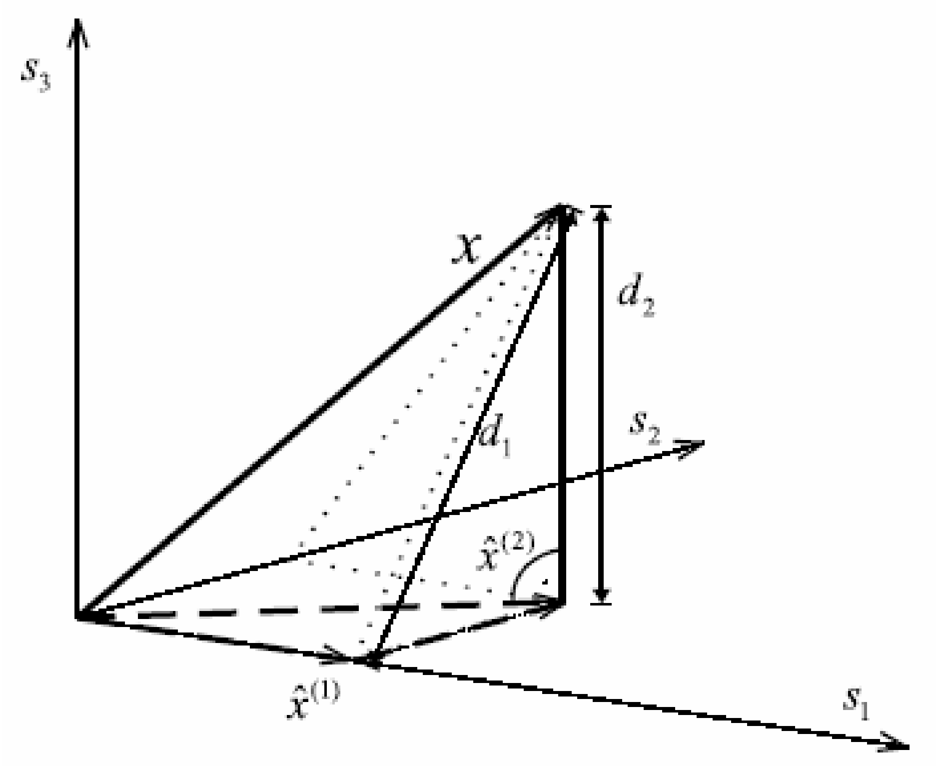
$$B = \{b_1, b_2\} = \{(1.5, -0.5), (1,1)\}$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{(0.5, -0.5), (0.25, 0.75)\}$$

Príklad reprezentácie signálu v $x = \{1, 0.5\}$ $E = R^2$ v báze $B$: a) $B$ je ortonormálna b) $B$ je neortogonálna

**<u>Príklad Postupnej aproximácie v troch rozmeroch:</u>**

Aproximujme $x \in E$ v uzavretom podpriestore $S_k$ s bázou $S_k = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}$.




Projekcia vektora $x \in R^3$ do podpriestoru $S_2 \subset R^3$ daného ako $L(\{s_1, s_2\})$.

Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do $S_k$ ako $\hat{x}^{(k)}$.

# Zmena súradníc pri prechode k inej báze v $C^n$.

*Doprednou transformáciou* signálu $x(n) = x(I) = \overline{x} \in C^n$ potom budeme rozumieť zmenu vektora $\overline{x}$ na vektor $\overline{y} = \overline{x}(B)$. Označme $T = P_{IB}^{-1} = B^{-1}$:

$$\overline{y} = T\overline{x}$$

, kde

- T je *transformačná matica*
- vektor $\overline{y}$ predstavuje *spektrum*
- jeho zložky $y_i$ sú *spektrálne koeficienty*,

Vidíme, že pri doprednej transformácii robíme skalárne súčiny $\overline{x}$ s riadkami matice $B^{-1}$.

# Doplnok prednášky 1

**Interpretácia:**

*Všeobecný prípad*

$T = B^{-1}$ - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupného vektora s jednotlivými riadkami matice T, t.j. bazovými vektormi, "novej", duálnej bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$. Keďže jej vektory sú v riadkoch matice T, platí $T = \tilde{B}^T$. T.j. platí:

$$B^{-1} = \tilde{B}^T$$

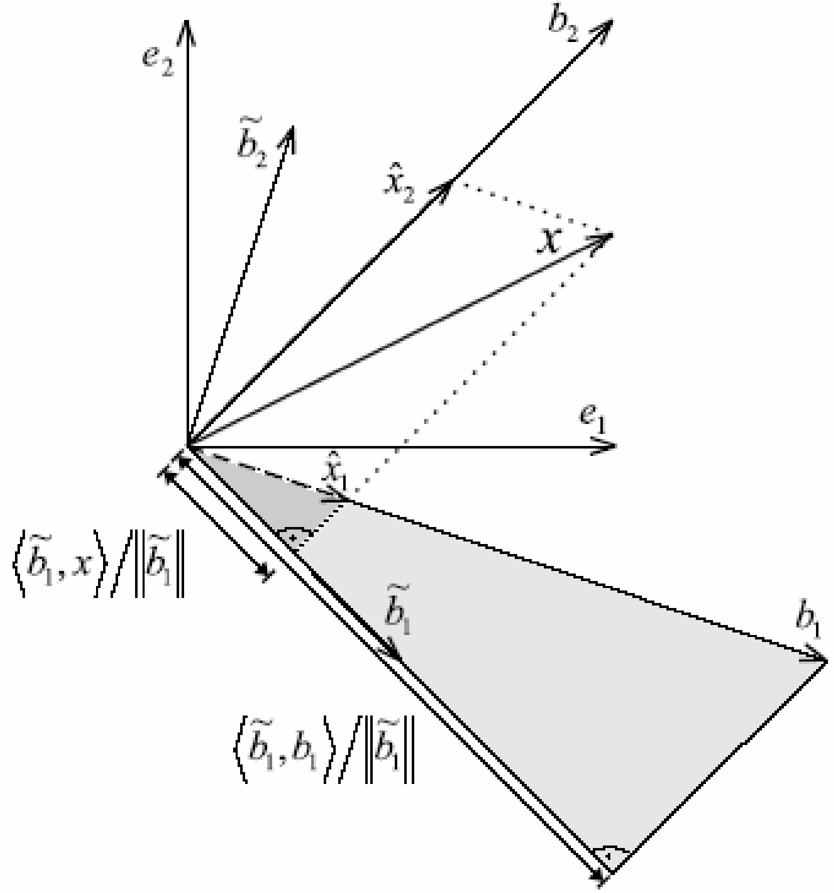
*Ortonormálny prípad:*

$T = B^{-1} = B^{*T}$ - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupného vektora s jednotlivými riadkami matice T, t.j. bazovými vektormi bázy B, ktoré sa transponovali a skonjugovali.
V ortonormálnom prípade $\tilde{B} = B^*$.

**Teda platí:**

***Súradnice vektora $\bar{x}$ vo vektorovom priestore s bázou $B = \{b_i\}$, získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ duálnej k báze B.***

# Analýza všeobecného – „biortogonálneho“ prípadu




Vektor $x$ z bázy $B = \{b_i\}$ rekonštruujeme ako

$$x = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, \quad \text{kde } x(B) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

- Ako získať $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ ?
- Pomôže nám ortogonálna projekcia do $B = \{b_i\}$ ?
- Počítajme $\hat{x}_1$. Zvoľme ľubovoľné $\tilde{b}_1$, o ktorom si myslí že projekcia doňho nám pomôže
- Vidíme, že $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$
- Vieme, že $\hat{x}_1 = \alpha_1 b_1 = \|\hat{x}_1\| . \dfrac{b_1}{\|b_1\|}$
- Do $\tilde{b}_1$ spravme projekciu $x$ a aj $b_1$. Zpodobnosti znázornených trojuholníkov dostávame:

$$\frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle / \|\tilde{b}_1\|}{\|\hat{x}_1\|} = \frac{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle / \|\tilde{b}_1\|}{\|b_1\|} \rightarrow \|\hat{x}_1\| = \frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle \|b_1\|}{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle} \rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle b_1}{\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle} \ ! \rightarrow \hat{x}_1 = \langle \tilde{b}_1, \hat{x}_1 \rangle b_1$$

Vidíme, že potrebujeme také $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$, pre ktoré $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$ a $\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle = 1$, t.j. $\tilde{b}_1$ má vhodnú veľkosť.

Analogicky pri výpočte $\hat{x}_2$ dostaneme $\langle \tilde{b}_1, b_2 \rangle = 0$ a $\langle \tilde{b}_1, b_1 \rangle = 1$

**T.j. platí** $\forall i, j \in Z$ **;** $\langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i - j)$ **, čo je podmienka biortogonality.**

# Rámce

**Definícia:** *Rámcom vo* vektorovom priestore $E$ nazývame neprázdnu podmnožinu $B = \{\psi_i\}$, $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a $\forall f \in E$ existujú kladné konečné konštanty $C, D$ také, že platí:

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left|\left\langle f, \psi_{m,n} \right\rangle\right|^2 \leq D\|f\|^2$$

Rámce:

- nie su nutne lineárne nezávislé množiny
- reprezentácia vektoru pomocou rámcov môže byť redundantná a nejednoznačná
- ak $C = D$, rámec sa nazýva *tesný* a naviac ak $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom $C$ udáva mieru redundancie rámca oproti báze (ak $C$=2, potebujeme 2x viac vektorov na vyjadrenie $f$ ).
- ak $C = D = 1$, $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* E

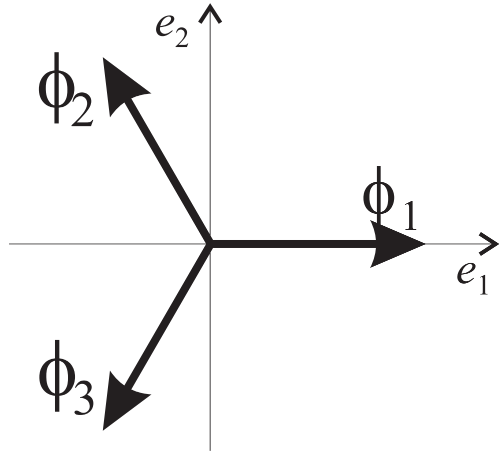
K danému rámcu existuje viacero „doplnkových“ rámcov $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$, takých, že dvojica {rámec, doplnkový rámec} nám umožňuje signál reprezentovať aj zrekonštruovať. Možností na voľbu $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ je viacero. Štandardná voľba je tzv. *duálny rámec*:

$$D^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left|\left\langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \right\rangle\right|^2 \leq C^{-1}\|f\|^2 \quad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Pre transformáciu do/z rámca platí:

$$d_i = \left\langle f, \psi_i \right\rangle \qquad \bar{d} = \Psi^T \bar{f} \qquad \text{dopredná}$$

$$f = \sum_i d_i \tilde{\psi}_i \qquad \bar{f} = \tilde{\Psi} \bar{d} \qquad \text{spätná}$$




**Príklad 1:** Označme jednotkové vektory v rovine v smere x a y ako $e_1$ a $e_2$. Definujme vektory $\phi_1 = e_1$, $\phi_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$, $\phi_2 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$. Zistite, či množina $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ je tesný rámec v rovine (t. j. v priestore $R^2$). Ak áno, zistite jeho nadbytočnosť.

**Riešenie:**

1) $A\|f\|^2 \leq \sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$, aké sú A a B ? Rozpísaním na zložky a úpravami zisíme, že $\sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 = \frac{3}{2}\|f\|^2$. Zároveň platí $\|\phi_i\| = 1$. T.j. nadbytočnosť je 3/2.

2) Zostrojme rámcovú maticu $\mathbf{\Phi} = (\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \overline{\phi}_3)$; $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T = \frac{3}{2}\mathbf{I}_2$. T.j. nadbytočnosť je 3/2

**Príklad 2:** K rámcu $\Phi$ nájdite duálny rámec $\tilde{\Phi}$ a overte vzťahy pre doprednú a spätnú transformáciu

**Riešenie:**

Pre duálny rámec platí: $B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_i \left|\left\langle f,\tilde{\phi}_i\right\rangle\right|^2 \le A^{-1}\|f\|^2$. T.j. v našom prípade (A=B=3/2)

$\sum_i \left|\left\langle f,\tilde{\phi}_i\right\rangle\right|^2 = \frac{2}{3}\|f\|^2$. Vieme, že $\sum_i \left|\left\langle f,\phi_i\right\rangle\right|^2 = \frac{3}{2}\|f\|^2$. T.j. $\sum_i \left|\left\langle f,\phi_i\right\rangle\right|^2 = \frac{9}{4}\sum_i \left|\left\langle f,\tilde{\phi}_i\right\rangle\right|^2$. Vidíme že voľbou $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{3}\phi_i$ rovnosť zabezpečíme. T.j. $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \frac{2}{3}\mathbf{\Phi}$.

Pre transformáciu do/z rámca platí:

$$d_i = \left\langle f,\phi_i\right\rangle \qquad \overline{d} = \mathbf{\Phi}^T\overline{f} \qquad \text{dopredná}$$

$$f = \sum_i d_i\tilde{\phi}_i \qquad \overline{f} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\overline{d} \qquad \text{spätná}$$

T.j. po doprednej a spätnej transformácii dostaneme pôvodný signál:

$$\overline{f} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\overline{d} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\left(\mathbf{\Phi}^T\overline{f}\right) = \left(\tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}^T\right)\overline{f} = \left(\tfrac{2}{3}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T\right)\overline{f} = \left(\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{3}{2}\mathbf{I}\right)\right)\overline{f} = \overline{f}$$

Poznámka: Z $\tilde{\mathbf{\Phi}}\tilde{\mathbf{\Phi}}^T = \frac{2}{3}\mathbf{I}_2$ nevyplýva, že nadbytočnosť je 2/3 (t.j."nedostatočnosť"), lebo $\left\|\tilde{\phi}_i\right\| \ne 1$.

**Príklad 3:** Na základe predchádzajúceho príkladu ukážte, že môže existovať viacero rôznych reprezentácií jedného vektoru $f \in R^2$ v rámci $\tilde{\Phi}$.

**Riešenie:** Podľa predchádzajúceho príkladu platí $f = \sum_i \langle \phi_i, f \rangle \tilde{\phi}_i$, kde $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{3}\phi_i$. Zároveň platí $\sum_i \phi_i = 0 = \sum_i \tilde{\phi}_i$. Ak chceme novú reprezentáciu, musíme na doprednú transformáciu použiť iný nový $\Phi$. Zvoľme napr.:

$$\phi_{new_i} = \phi_i + x, \qquad x = (\alpha, \beta), \; x \in R^2$$

T.j. situáciu, keď ľubovoľný vektor $x$ pričítame ku každému rámcovému vektoru. Potom

$$d_{new_i} = \left\langle f, \phi_{new_i} \right\rangle = \left\langle f, \phi_i + x \right\rangle = \left\langle f, \phi_i \right\rangle + \left\langle f, x \right\rangle$$

má samozrejme iné hodnoty (posunuté o $\langle f, x \rangle$) . Pre rekonštrukciu platí:

$$\hat{f} = \sum_i d_i \tilde{\phi}_i = \sum_i \left( \left\langle f, \phi_i \right\rangle + \left\langle f, x \right\rangle \right) \tilde{\phi}_i = \sum_i \left( \left\langle f, \phi_i \right\rangle \right) \tilde{\phi}_i + \left\langle f, x \right\rangle \overbrace{\sum_i \tilde{\phi}_i}^{0} = \sum_i \left( \left\langle f, \phi_i \right\rangle \right) \tilde{\phi}_i \, .$$

T.j. vidíme, že $\hat{f} = f$, t.j. dostávame znovu pôvodný signal.