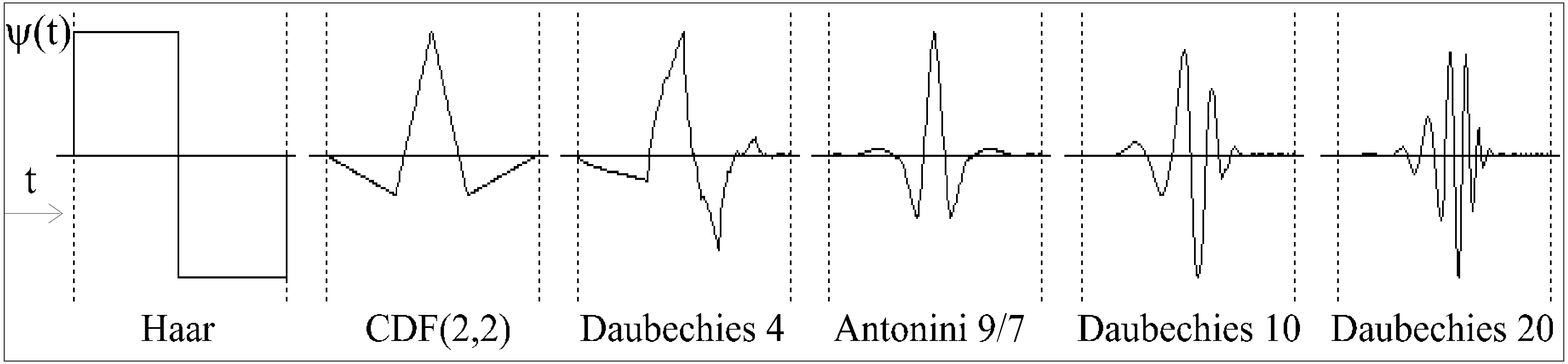
Wavelet, čo to je?

(fr. ***ondelette*** = vlnka, angl. ***wavelet***)

➔ predstavte si ho ako vlnový balík
(= v praxi je to čosi medzi ***Dirakovým impulzom*** a ***vlnou***)



Waveletová transformácia (*WT*)

- ➔ funkcie, pomocou ktorých signál transformujeme a potom spätne skladáme sú „***vlnky***"
- ➔ vysoko efektívny prostriedok analýze a spracovaní signálov. Oproti ***DFT*** a ***DCT*** špecifická v tom, že umožňuje oveľa lepšie v ***spektre*** signálu zachytiť jeho ***časovo-frekvenčné*** vlastnosti.

Reprezentácia signálov

- ➔ poznáte reprezentáciu signálov ***v čase***, ***vo frekvencii*** (FT)
- ➔ wavelety umožňujú flexibilnú a cielenú reprezentáciu *niekde medzi*.

Historické korene

- Prvý "wavelet" skonštruoval I.Haar v r. 1910 pri konštrukcii alternatívneho ortonormálneho systému k Fourierovmu
- teórie Littlewood-Paleyho, **harmonická analýza**, atomická dekompozícia a **teória rámcov**
- Objavenie tesných vzťahov medzi **bankami filtrov** a waveletovými bázami. - S.Mallat, 1985

Aplikácie waveletov

- Analýza signálov (spojitých, disktrétnych, fyzikálne veličiny, zvuk, obraz, ...)
- Filtrácia (napr. kôli odstraňovaniu šumu, ...)
- Kompresia (obraz, zvuk, video)
- Počítačová grafika (interpolácie, aproximácie, vyhladzovanie, modelovanie ...)
- Spotrebná elektronika
- ...

Implementácie

PC
DSP
FPGA

Telekomunikácie

WT & audio signály

efektívny prostriedok pri časovo-frekvenčnej analýze a to formou SWT (spojitej waveletovej transformácie)
watermarking (označovanie) audiosignálov
potláčanie šumu v signále
škálovatelné riešenia na internetovú telefóniu
waveletová syntéza zvuku

WT & obraz & video

JPEG 2000 pre kompresiu a prenos statického obrazu
watermarking statického obrazu a videa
Kompresia videa (zatial neštandardizované)

Oblasti, v ktorých sa budeme pohybovať a ktoré sa budú prelínať

A) Lineárna algebra ➔ [vektory, priestory, transformácie, matice]
Hilbertove priestory ➔ [priestory funkcii, hierarchie priestorov]
Signály v čase a frekvencii

B) Fourierova analýza (spojitá, diskrétna) ➔ [rôzne druhy FT, STFT]
Signály v čase a frekvencii

C) Diskrétne signály a Z transformácia
Impulzové charakteristiky
Filtre a banky filtrov

D) Diskrétne transformácie v maticovom tvare
Ich spojenie a realizácia bankami filtrov

Demo MATLABU

A) Hilbertove priestory a rozklady signálov

(Skripta: dodatky, str.117)

Definícia 6.1: *Vektorový priestor* E nad komplexnými C alebo reálnymi číslami R je množina vektorov E spolu s operáciou sčítania a skalárneho násobenia, pre ktoré $(E,+,.)$ je *lineárny priestor* nad poľom C alebo R.

Definícia 6.2: *Podpriestor vektorového priestoru* E je taká podmnožina $M \subset E$, pre ktorú platí:

1) $\forall x, y \in M;\ x + y \in M$

2) $\forall x \in M$ a pre $\alpha \in C$ alebo $\alpha \in R$ platí, že $\alpha x \in M$

Definícia 6.3: *Lineárny obal* $L(M)$ množiny $M \subset E$ s prvkami x_i je *podpriestorom E a platí*

$$L(M) = \left\{ \sum_i \alpha_i x_i \,; \alpha_i \in C \, alebo \, R, x_i \in M \right\}$$

Definícia 6.4: *Bázou* vektorového priestoru E nazývame neprázdnu podmnožinu $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = E$ a B je množina lineárne nezávislých vektorov.

Definícia 6.5: *Hilbertov priestor* E je vektorový priestor E, ktorý je *úplný* a na ktorom je definovaný *skalárny súčin* ktorý označujeme $\langle \, , \rangle$

Definícia 6.6: *Veľkosť vektora* x (označujeme $\|x\|$) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčinom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definícia 6.7: Nech E je Hilbertov priestor, potom
a) prvky $x, y \in E$ sú *ortogonálne*($x \perp y$) ak $\langle x, y \rangle = 0$
b) Prvok x je *ortogoálny* na $M \subset E$, ak $\forall y \in M$ platí $x \perp y$
c) Podpriestory $M_1, M_2 \subset E$ sa nazývajú *ortogonálne* ak $\forall x \in M_1$, $\forall y \in M_2$ platí $x \perp y$

Definícia 6.8: Nech M_i sú podpriestory Hilbertovho priestoru E. Ak každý vektor $x \in E$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ pričom $x_i \in M_i$, potom E je *priamou sumou porpiestorov* M_i . Píšeme $E = M_1 \oplus M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$

Definícia 6.9: Nech M je podpriestor Hilbertovho priestoru E. Potom *ortogonálny doplnok* k M v E je množina $M^{\perp} = \{x \in E ; x \perp M\}$.

Veta 1.1: Nech podpriestor $M \subset E$ je uzavretý. Potom pre daný vektor $z \in E$ existuje $x \in M$ a $y \in M^{\perp}$ také, že $z = x + y$. T.j. platí: $E = M \oplus M^{\perp}$.

Separabilné Hilbertove priestory

Komplexné / reálne priestory

Komplexný priestor C^n je množina všetkých n-tíc $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s **konečnými hodnotami** x_i na množine C. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^* \qquad x, y \in C^n$$

Analogická definícia platí aj pre R^n. Kvôli jednoznačnosti budeme používať aj klasickú notáciu $\bar{x} = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n)^T$.

Priestor *l*²*(Z)*

Vektormi x v priestore $l^2(Z)$ sú sekvencie $x(n) \in C$, $n \in Z$, s konečnou energiou $\|x\| < \infty$. Zvyčajne reprezentujú signály distkrétne v čase. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n)^* \qquad x, y \in l_2(Z)$$

Priestor $L^2(R)$

Vektormi x v priestore $L^2(R)$ sú funkcie $x(t) \in C$, $t \in R$, ktoré sú po štvorcoch integrovateľné, t.j. $\|x\| < \infty$. *Skalárny súčin* je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t \in R} x(t) y(t)^* \, dt \qquad\qquad x, y \in L_2(R)$$

Pozn.: Analogicky pre funkcie n premenných môžeme definovať priestory $L_2(R^n)$

Ortonormálne bázy

Množina $B = \{b_i\}$ je *ortonormálny systém* v priestore E.ak

$$\forall b_i, b_j \in B; \; \langle b_i, b_j \rangle = \delta(i-j)$$

$B = \{b_i\}$ je bázou priestoru E , ak všetky $y \in E$ môžeme vyjadriť

$$y = \sum_k \alpha_k b_k$$

kde α_k sú *spektrálne koeficienty*

$$\alpha_k = \langle b_k, y \rangle .$$

Pre takýto systém platí *Parsevalova rovnosť*

$$\|y\|^2 = \sum_i \left| \langle b_i, y \rangle \right|^2 \qquad \forall y \in E$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{b_i\}$ a $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ sú bázami priestoru E. Tieto bázy sú navzájom *duálne* resp. *biortogonálne*, ak:

a) ich bázová vektory sá *navzájom ortogonálne*, t. j. *biortogonálne*:

$$\forall i, j \in Z \; ; \; \left\langle b_i, \tilde{b}_j \right\rangle = \delta(i-j)$$

b) existujú kladné konečné konštanty $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$, že pre $\forall x \in E$ platí:

$$C\|x\|^2 \le \sum_k \left|\langle b_k, x\rangle\right|^2 \le D\|x\|^2 \qquad \tilde{C}\|x\|^2 \le \sum_k \left|\langle \tilde{b}_k, x\rangle\right|^2 \le \tilde{D}\|x\|^2$$

Potom signál $x \in E$ môžeme vyjadriť ako

$$x = \sum_k \langle b_k, y\rangle \tilde{b}_k = \sum_k \langle \tilde{b}_k, y\rangle b_k$$

Parsevalova rovnosť má tvar:

$$\|y\|^2 = \sum_k \langle b_k, y\rangle^* \langle \tilde{b}_k, y\rangle \qquad \forall x \in E$$

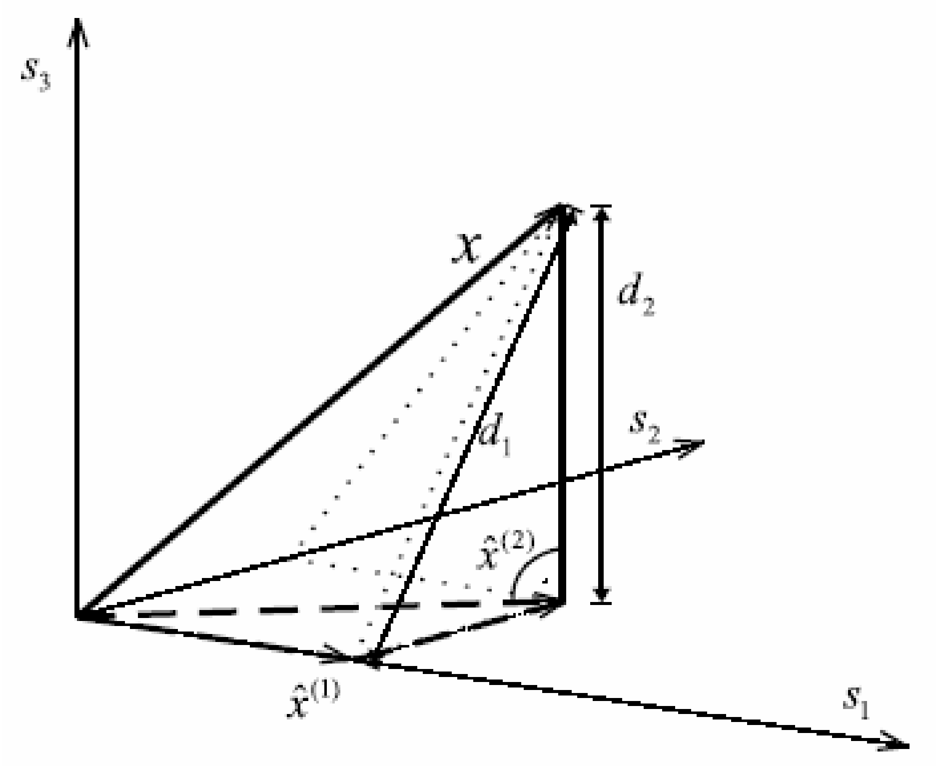
Ortogonálna projekcia a aproximácia signálu

Definícia: *Ortogonálna projekcia(priemet)* vektora x do vektora s je zložka vektora x v smere vektora s nazývaná x_s s veľkosťou:

$$\|x_s\| = \langle x, s\rangle / \|s\|^2 \, s = x_{s_1} s \;.$$

Skalár x_{s_1} *nazývame súradnicou vektora* x *vo vektore* s.

Aproximujme $x \in E$ v uzavretom podpriestore S_k s bázou $S_k = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}$.



Projekcia vektora $x \in R^3$ do podpriestoru $S_2 \subset R^3$ daného ako $L(\{s_1, s_2\})$.

Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S_k ako $\hat{x}^{(k)}$.

Platí $(x - \hat{x}) \perp S_k$ a zároveň

$$\|x - \hat{x}\| = \min \|x - s\| \qquad \forall s \notin S_k$$

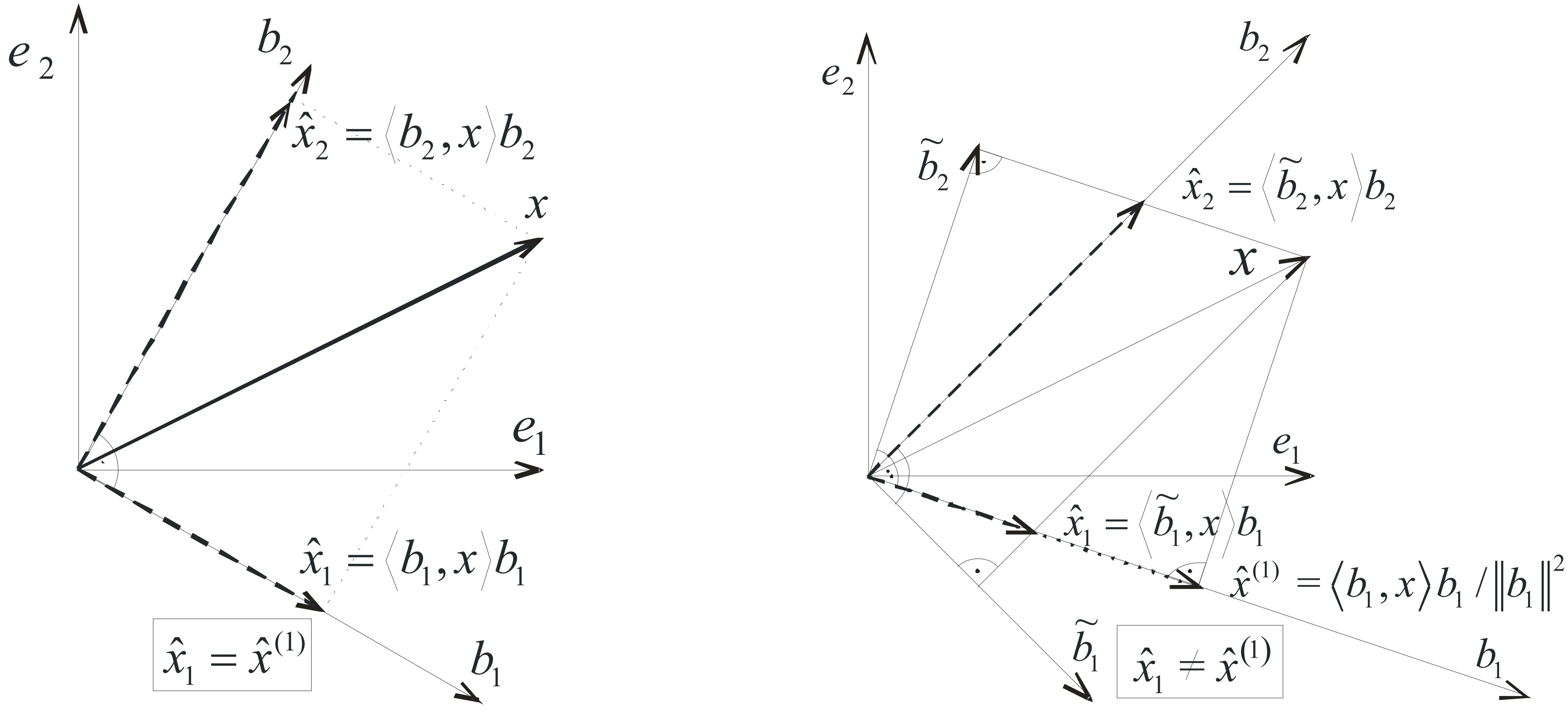
T.j. aproximácia ortogonálnou projekciou je najlepšia v zmysle *najmenších štvorcov*.

Postupná aproximácia:

A) Nech S_k je *ortonormálna* báza S_k. Označme ortogonálnu projekciu $x \in E$ do S ako $\hat{x}^{(k)} = \sum_i \langle s_i, x \rangle s_i$. Keďže s_i sú vzájomne ortogonálne (stačí aby báza S_k bola ortogonálna), zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie v zmysle najmenších štvorcov. *Platí vlastnosť postupnej aproximácie*, t.j.:

$$\hat{s}^{(k+1)} = \hat{s}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x \rangle s_{k+1} \quad .$$

B) Keď S_k, báza S_k nie je ortogonálna, *neplatí vlastnosť postupnej aproximácie, t.j. aproximáciu v* S_{k-1} nemôžeme priamo použiť, je nutné celú aproximáciu prepočítať znovu.



a) Ortonormálna báza B

$$B = \{b_1, b_2\} = \left\{\left(\sqrt{3}/2, 0.5\right), \left(0.5, \sqrt{3}/2\right)\right\}$$

b) B je neortogonálna

$$B = \{b_1, b_2\} = \{(1.5, -0.5), (1,1)\}$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{(0.5, -0.5), (0.25, 0.75)\}$$

Príklad reprezentácie signálu v $x = \{1, 0.5\}$ $E = R^2$ v báze B: a) B je ortonormálna b) B je neortogonálna

Zmena súradníc pri prechode k inej báze v C^n.

Nech $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ a $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ sú bázy Hilbertovho priestoru C^n. Prepísaním do maticovej notácie dostaneme *štvorcové matice* hodnosti n:

$$\mathbf{A}=\left(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\dots,\overline{a}_n\right) \qquad \mathbf{B}=\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\dots,\overline{b}_n\right)$$

kde, $\overline{a}_i=a_i^T$ a $\overline{b}_i=b_i^T$ sú stĺpcové vekory.

Veta: Každý vektor z bázy B môžeme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov bázy A, t.j. platí $B=AP_{AB}$.

Definícia: Maticu P_{AB} nazývame *maticou prechodu* od bázy A k báze B. Analogicky označme P_{BA} maticu prechodu od B k A. Potom platí:

$$P_{BA}=P_{AB}^{-1}.$$

Veta: Nech $\overline{x} \in C^n$ má v báze A súradnice $\overline{x}(A) = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ a v B súradnice $\overline{x}(B) = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$. Potom platí:

$$\overline{x}(B) = P_{AB}^{-1}\overline{x}(A) = P_{BA}\overline{x}(A).$$

V praxi sú naše vstupné vektory reprezentáciou diskrétnych signálov v **čase**. Potom:

$$A = I_n \qquad\qquad P_{AB} = I_n^{-1}B = B$$

, kde I_n je jednotková matica hodnosti *n*.

Doprednou transformáciou signálu $x(n) = x(I) = \overline{x} \in C^n$ potom budeme rozumieť zmenu vektora $\overline{x}$ na vektor $\overline{y} = \overline{x}(B)$. Označme $T = P_{IB}^{-1} = B^{-1}$:

$$\overline{y} = T\overline{x}$$

, kde

- T je *transformačná matica*
- vektor $\overline{y}$ predstavuje *spektrum*
- jeho zložky y_i sú *spektrálne koeficienty*,

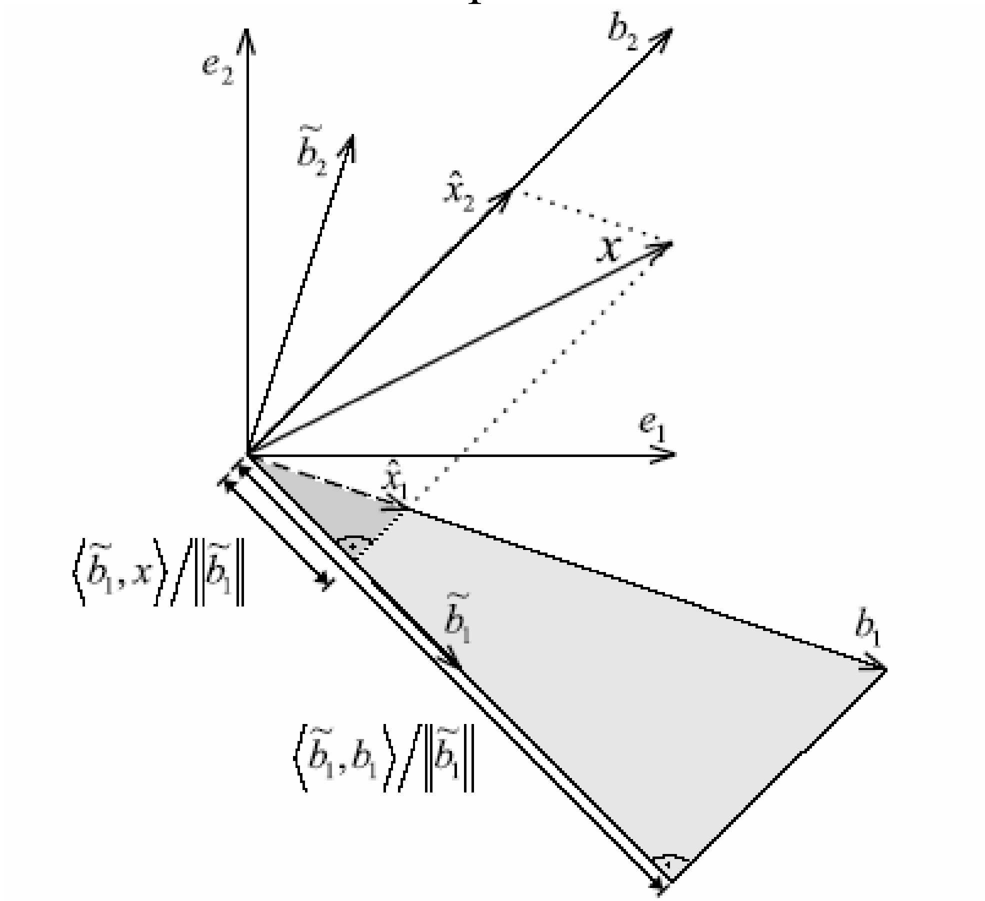
Signál $\overline{x}$ rekonštruujeme *spätnou transformáciou:*

$$\overline{x} = T^{-1}\overline{y} = B\overline{y} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \overline{b}_1 y_1 + \overline{b}_2 y_2 + \dots + \overline{b}_n y_n$$

A) Pre ortonormálne bázy $B = \{b_i\}$, platí $T^{-1} = B$ $T = B^{-1} = B^{*T}$

B) Všeobecný prípad: riadky matice $T = B^{-1}$ predstavujú bázové vektory tzv. duálnej bázy $\widetilde{B} = \{\widetilde{b}_i\}$ „duálnej" k $B = \{b_i\}$

platí $T^{-1} = B$ $T = \widetilde{B}^T$



➔ ***Súradnice vektora $\bar{x}$ vo vektorovom priestore s bázou $B = \{b_i\}$, získame jeho ortogonálnou projekciou do vektorov bázy $\widetilde{B} = \{\widetilde{b}_i\}$ duálnej k báze B.***

Interpretácia:

Ortogonálny prípad:

$T = B^{-1} = B^{*T}$ - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupného vektora s jednotlivými riadkami matice T, t.j. bazovými vektormi bázy B, ktoré sa transponovali a skonjugovali.

Všeobecný prípad (biortogonálny):

$T = B^{-1}$ - pri transformácii vykonávame skalárne súčiny vstupnéhoo vektora s jednotlivými riadkami matice T, t.j. bazovými vektormi, "novej", duálnej bázy $\widetilde{B} = \{\widetilde{b}_i\}$. Keďže jej vektory sú v riadkoch matice T, platí $T = \widetilde{B}^T$.

Základné pojmy

- Pod pojmom *„signál“* rozumieme vektor v niektorom z *Hilbertových priestorov*.
- Signál zvyčajne predstavuje priebeh nejakej meniacej sa veličiny v *časovej oblasti*.
- *Transformáciou* signa´lu sa dostávame do tzv. *transformačnej oblasti*, kde je reprezentovaný tzv. *spektrom*.
- *Spektrum* je tvorené *spektrálnymi koeficienatmi* signálu.
- Najznámejšou transformačnou oblasťou je *Fourierovská* , kde je signá l reprezentovaný *frekvenčným* spektrom.
- *Fourierova transformácia* rozkladá signál iba na frekvenčné zložky. Neposkytuje však informáciu, *kedy* signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky (jej bázové funkcie rovnomerne prekrývajú celú časovú os)
- Ak funkcie, pomocou ktorých sme transformovali sú lineárne závislé, potom netvoria *bázu*, ale všeobecnejšiu množinu *expanzných funkcií.*
- Nadbytočnosť' reprezentácie signálu získanej pomocou množiny expanzných funkcií môžeme odstránit' výberom vhodných spektrálnych koeficientov, tzv. *kritickým vzorkovaním* spektra.