

Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia

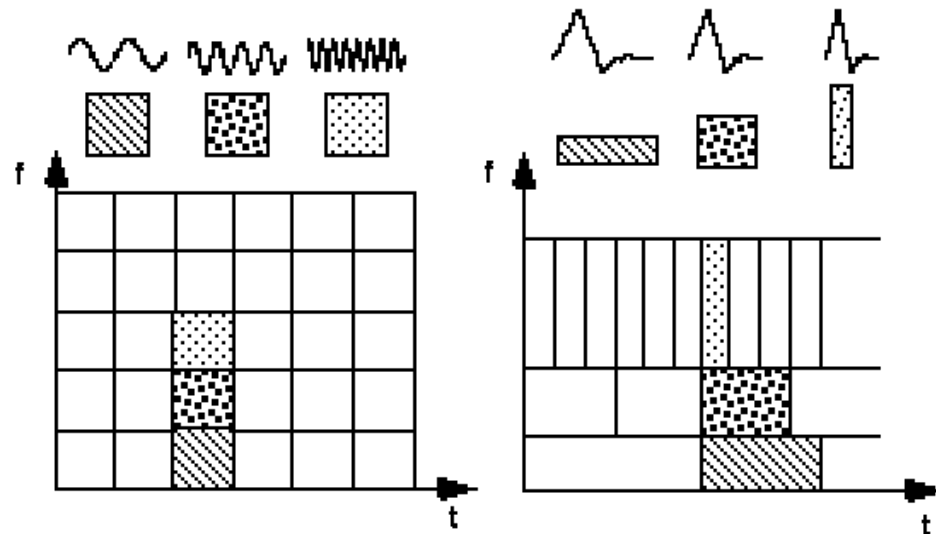
Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii.

- *Fourierova transformácia* rozkladá signál na frekvenčné komponenty. Neposkytuje informáciu, **kedy** signál vykazuje dané frekvenčné charakteristiky (jej bázové funkcie rovnomerne prekrývajú celú časovú os)
- Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform)*, Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.

Každý signál môže byť znázornený v *časovo-frekvenčnej rovine*, ktorá charakterizuje rozdelenie napr. energie signálu v čase a frekvencii.



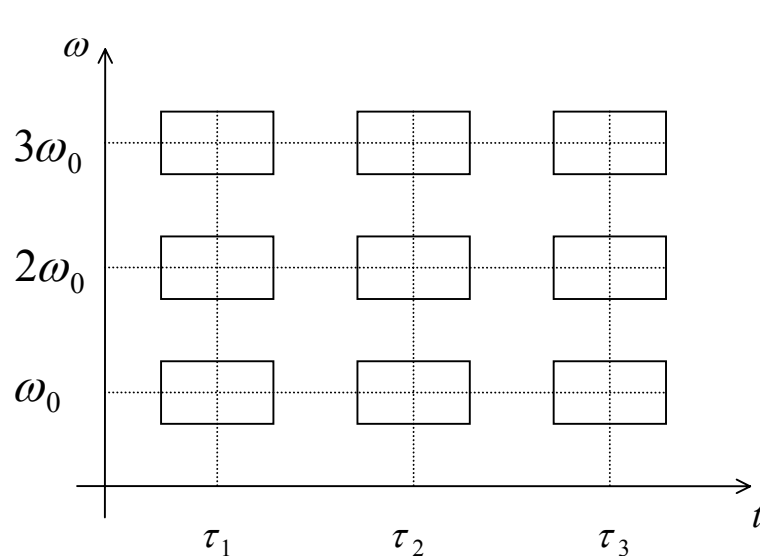
Znázornenie signálov v časovo-frekvenčnej rovine

Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú funkciu $x(t)$ a jej fourierovu transformáciu $X(\omega)$ je dané *časovo – frekvenčným oknom*. Jeho stred je v bode $S = (t_0, \omega_0)$, a veľkosti strán sú $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$. Platí:

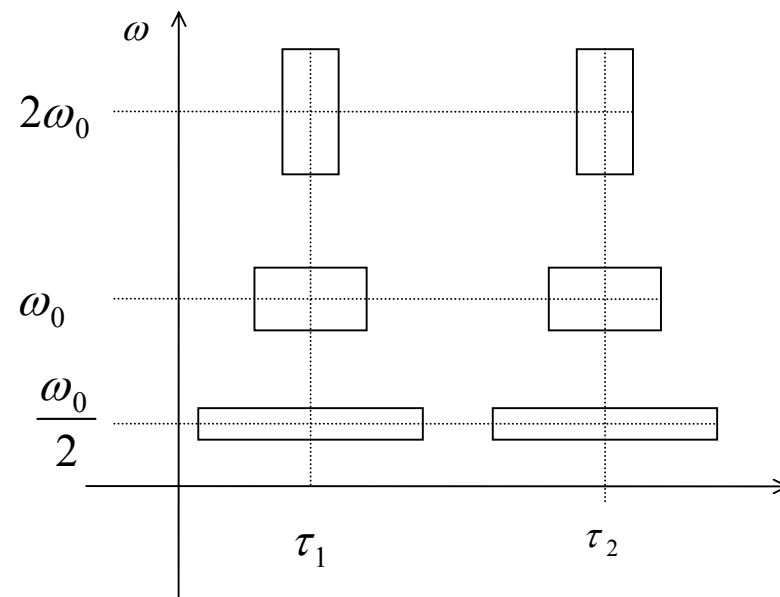
Princíp neurčitosti:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4$$

Rovnosť platí, ak $x(t)$ je Gaussova funkcia $x(t) = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha t^2}$.



a)

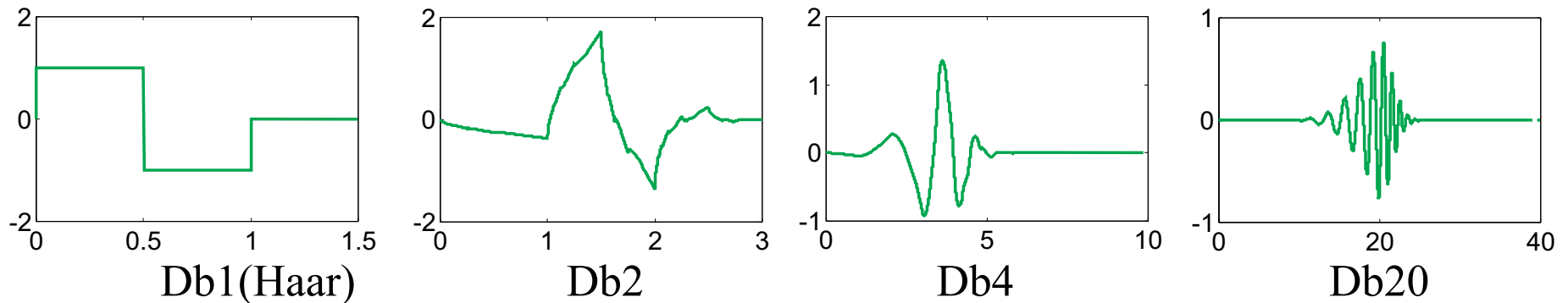


b)

Časovo - frekvenčná rovina s príkladom rozloženia časovo - frekvenčných okien pre a) STFT b) Waveletovú transformáciu

Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom *prototypovej funkcie (základného waveletu)* $\psi(t)$

Príklady základných waveletov $\psi(t)$ z rodiny ortogonálnych Daubechies waveletov:



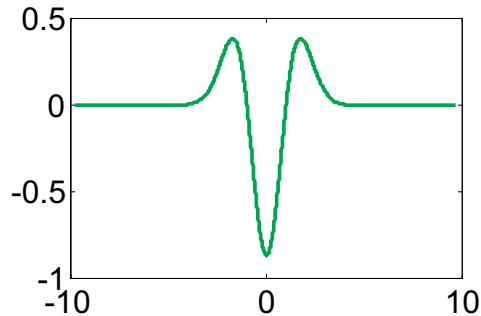
Spojité waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ vzťahom

$$SWT_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$

Funkcie $\psi_{a,b}(t)$ sú definované zo *základného waveletu* $\psi(t)$ pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu* a, b nasledovne:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

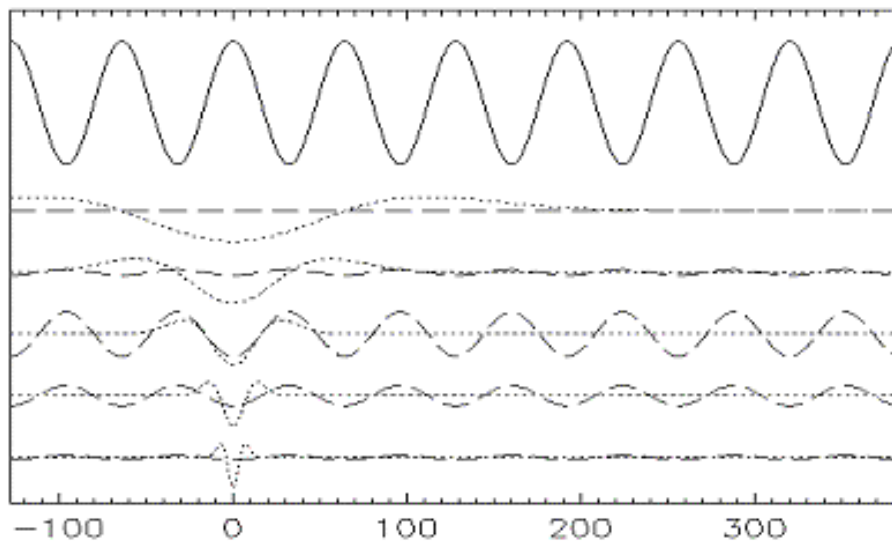
Príklad



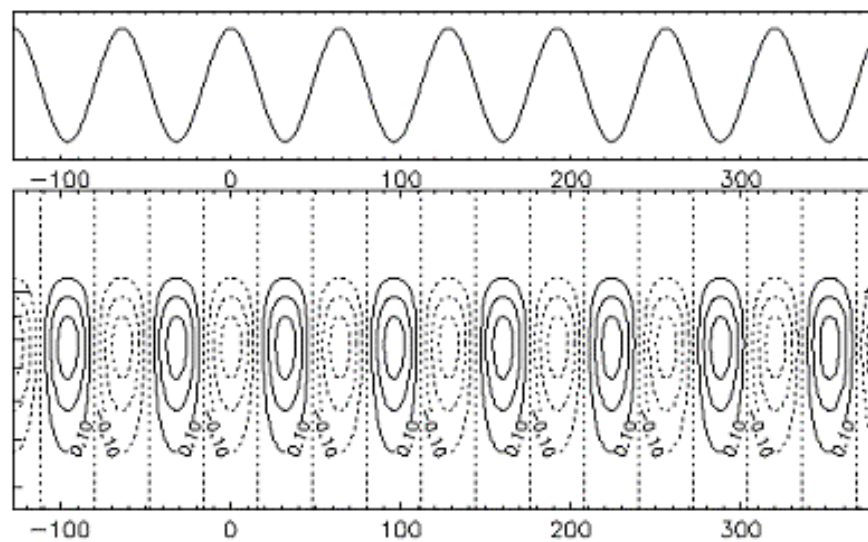
Wavelet "Mexický klobúk" (obrátená verzia)

$$\psi_{mex}(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Analýza signálu $f(t) = \cos(t/10)$ pomocou $\psi_{mex}(t)$



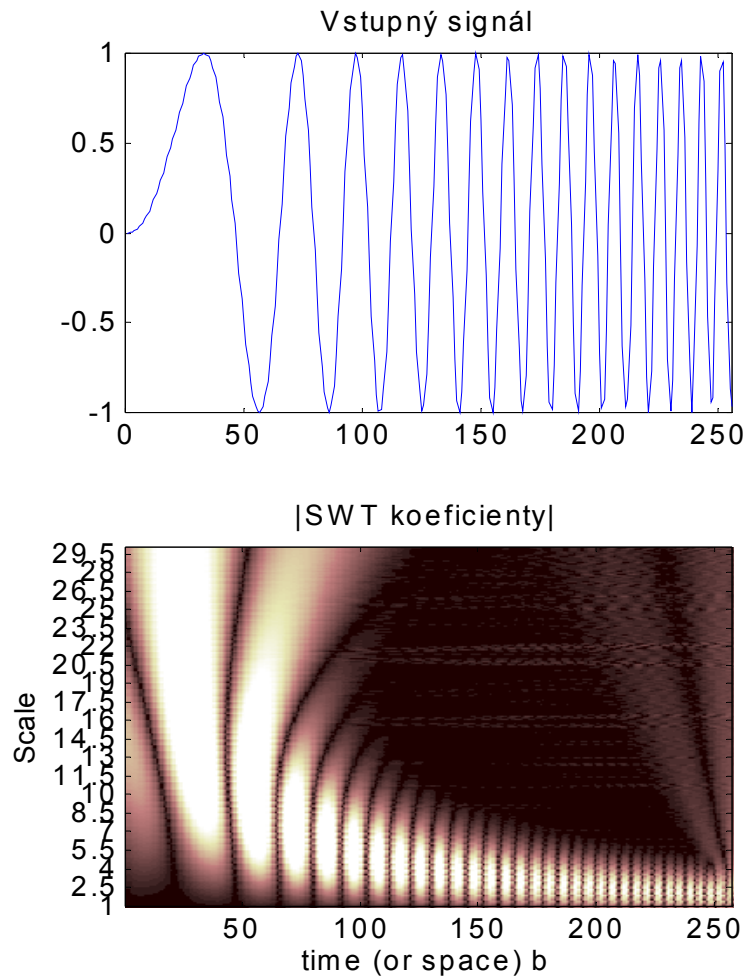
a) Zhoda $f(t)$ s $\psi_{mex}(t)$ s meniacou sa mierkou
(výsledok znázornený bodkovane)



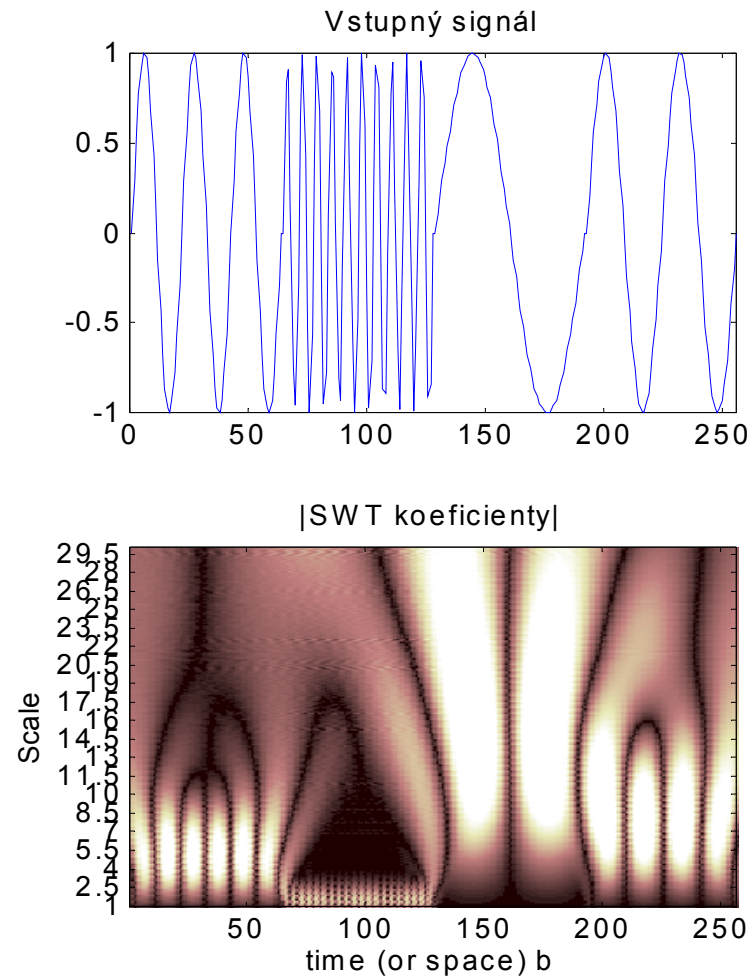
b) Znáznorená výsledná SWT

$$SWT(k, \tau) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{mex}[k(t - \tau)] dt$$

Príklady škálogramov pre SWT, použitý wavelet: $\psi_{mex}(t)$



a) $f(t) = \sin(t^2)$



a) $f(t)$ je kombináciou $\sin(3t, 10t, 1t, 2t)$

Základné charakteristiky waveletov

- 1) Vlastnosť *kompaktnej podpory* na intervale $\langle a, b \rangle$ vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale, mimo neho je funkčná hodnota nulová. Hovoríme, že je na danom intervale *podporovaný*.
- 2) *Počet nulových momentov*. *K-ty moment* $\psi(t)$ definujeme ako $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t \rightarrow \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých $K-1$ momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. $K-1$ stupňa, pre wavelety $\psi_{a,b}(t)$ podporované v tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a,b)$ nulové.
- 3) *Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje *mieru hladkosti funkcie* $f(t)$. Je to také maximálne číslo r pre ktoré platí $|F(\omega)| \leq c/(1+|\omega|^{r+1})$, $\omega \in R$. Potom $f(t)$ je $r-1$ krát spojite diferencovateľná, r -tá derivácia môže byť nespojitá.

Waveletové rady

Redundancia SWT (oba parametre a , b sú spojité) sa dá odstrániť *vzorkovaním* a , b . (tak, aby bola pomocou σ_{ab_t} pri danej mierke a “pokrytá” celá časová os). Potom hovoríme o *waveletových radoch (WR)*.

- $a = a_0^m$.
- $b = nb_0 a_0^m$

Najbežnejšia sa redundancia reprezentácie vo waveletových rámcoch odstraňuje voľbou vzorkovacej mriežky :

$$a_0 = 2, b_0 = 1$$

Potom platí :

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$$

funkciu $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadický wavelet* a vzťahmi (WF):

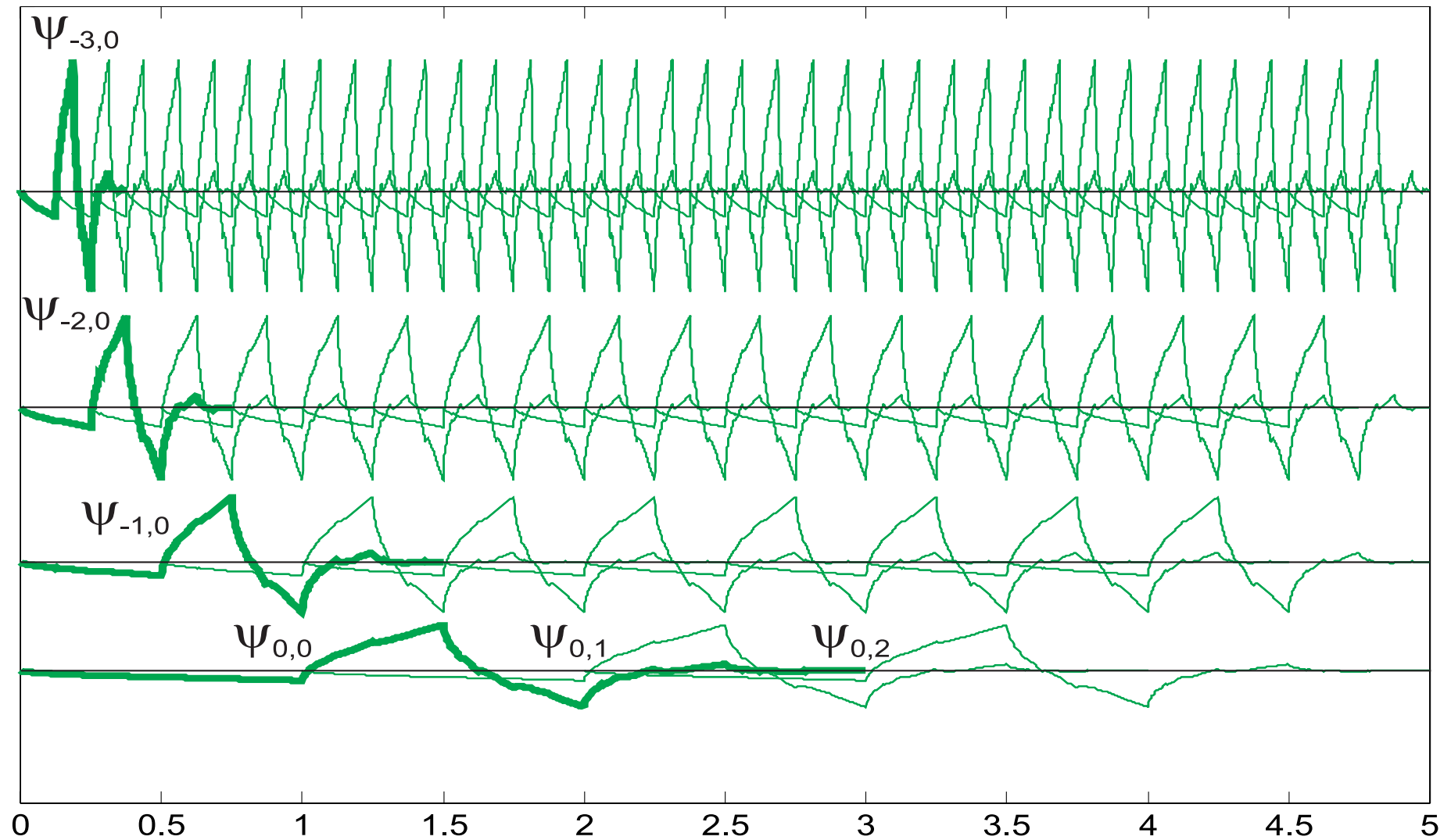
$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \quad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \quad m, n \in Z$$

sú definované *waveletové rady (WR)*.

Pre ortonormálne wavelety platí $\tilde{\psi} \equiv \psi^$ a*

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j, k, l, m \in Z$$

čo charakterizuje ortogonalitu v rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

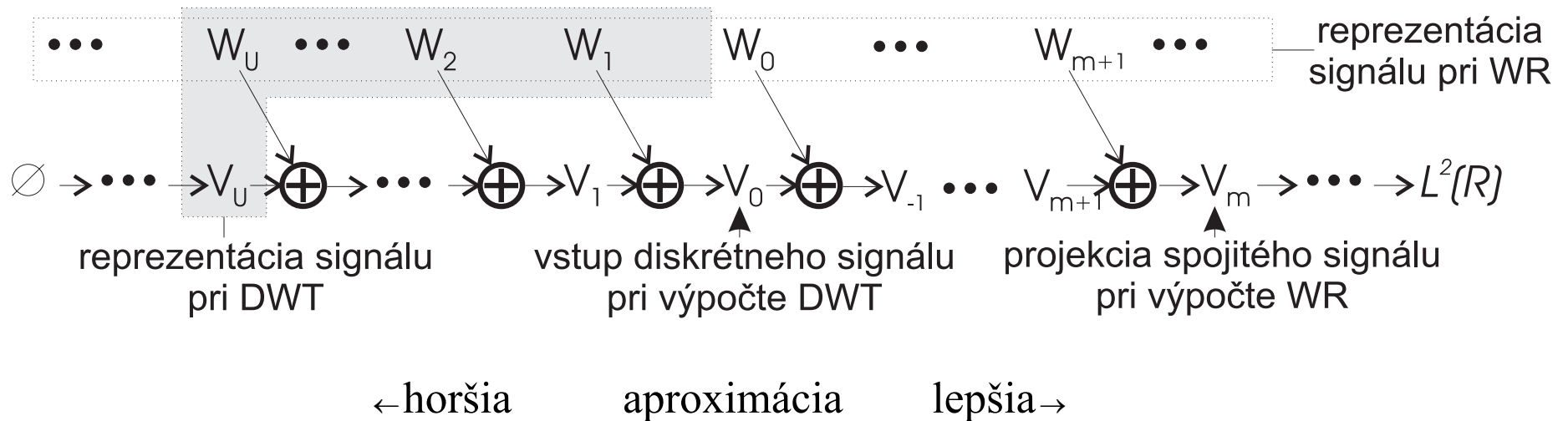


Poloha báзовých funkcií(odvodených od Db2) v dyadických waveletových radoch

Ako sme schopní waveletovými radmi reprezentovať ľubovoľný signál z $L^2(\mathbb{R})$?

→ Koncept *analýzy viacúrovňovým rozlíšením* (MRA).

Signál rozkladáme do systému hierarchických podpriestorov, pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále:

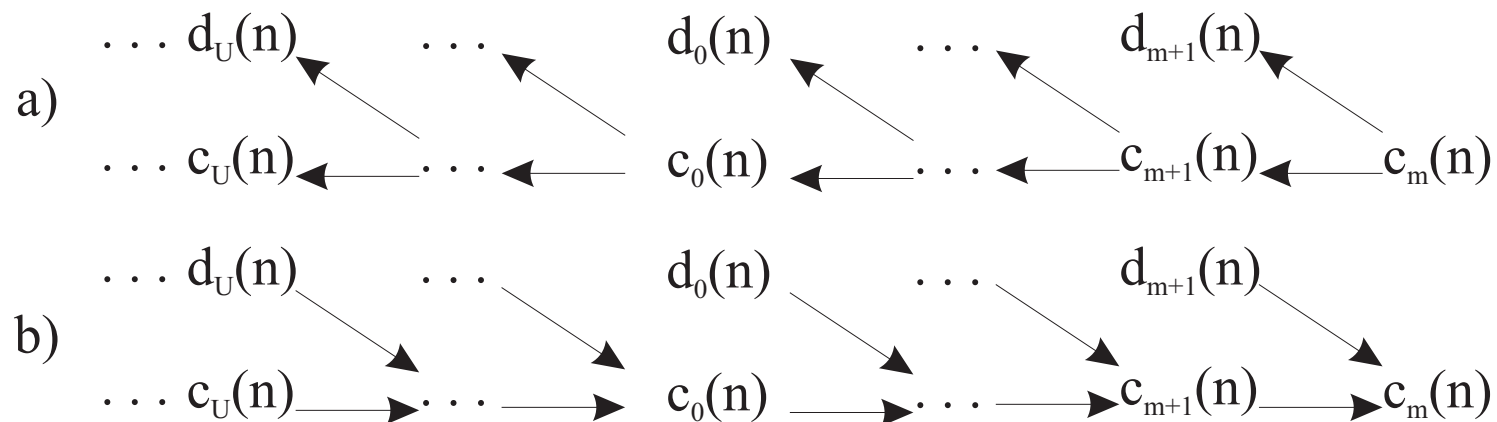


bázou W_m je $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), n \in \mathbb{Z}\}$

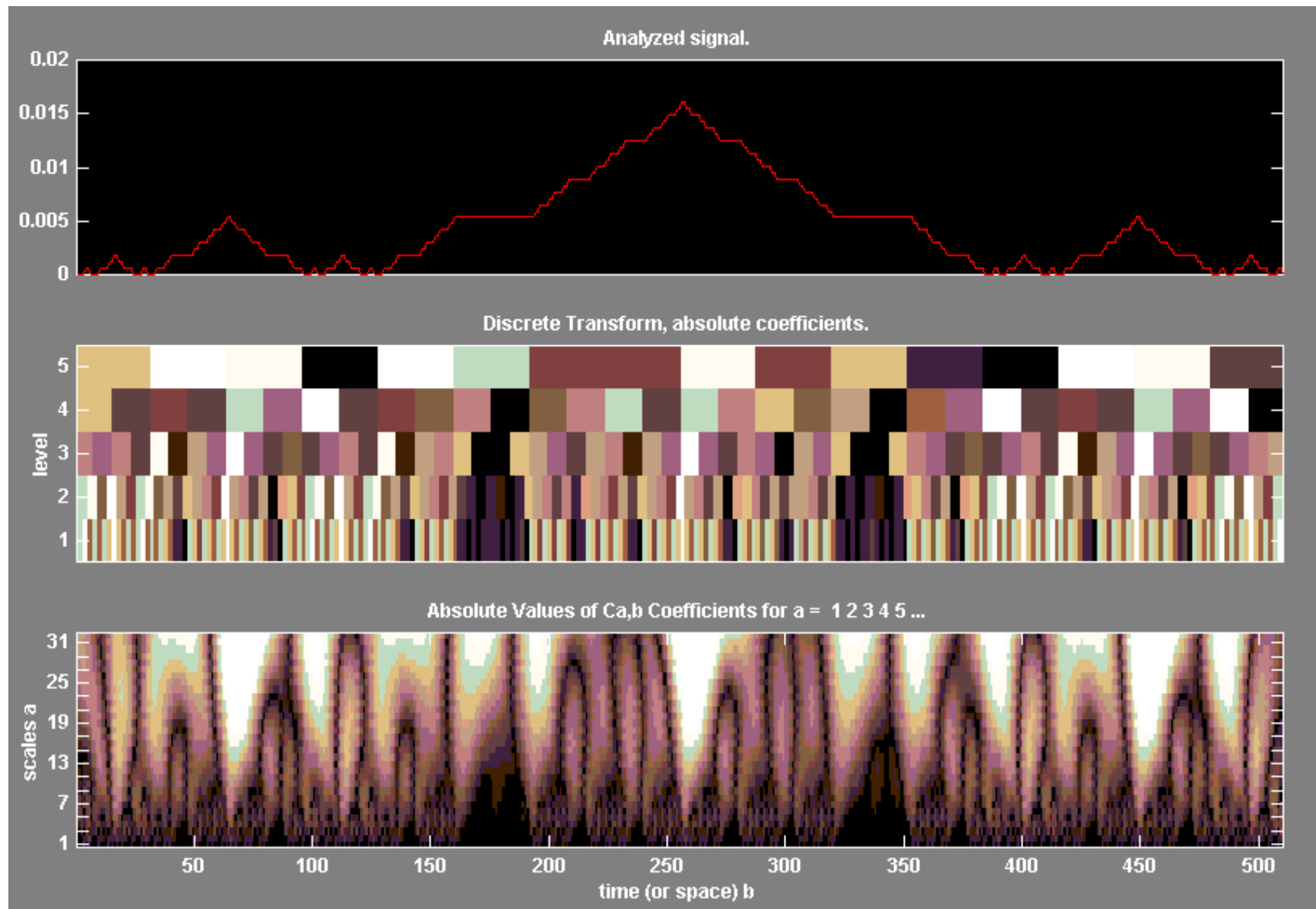
Výpočet waveletových radov

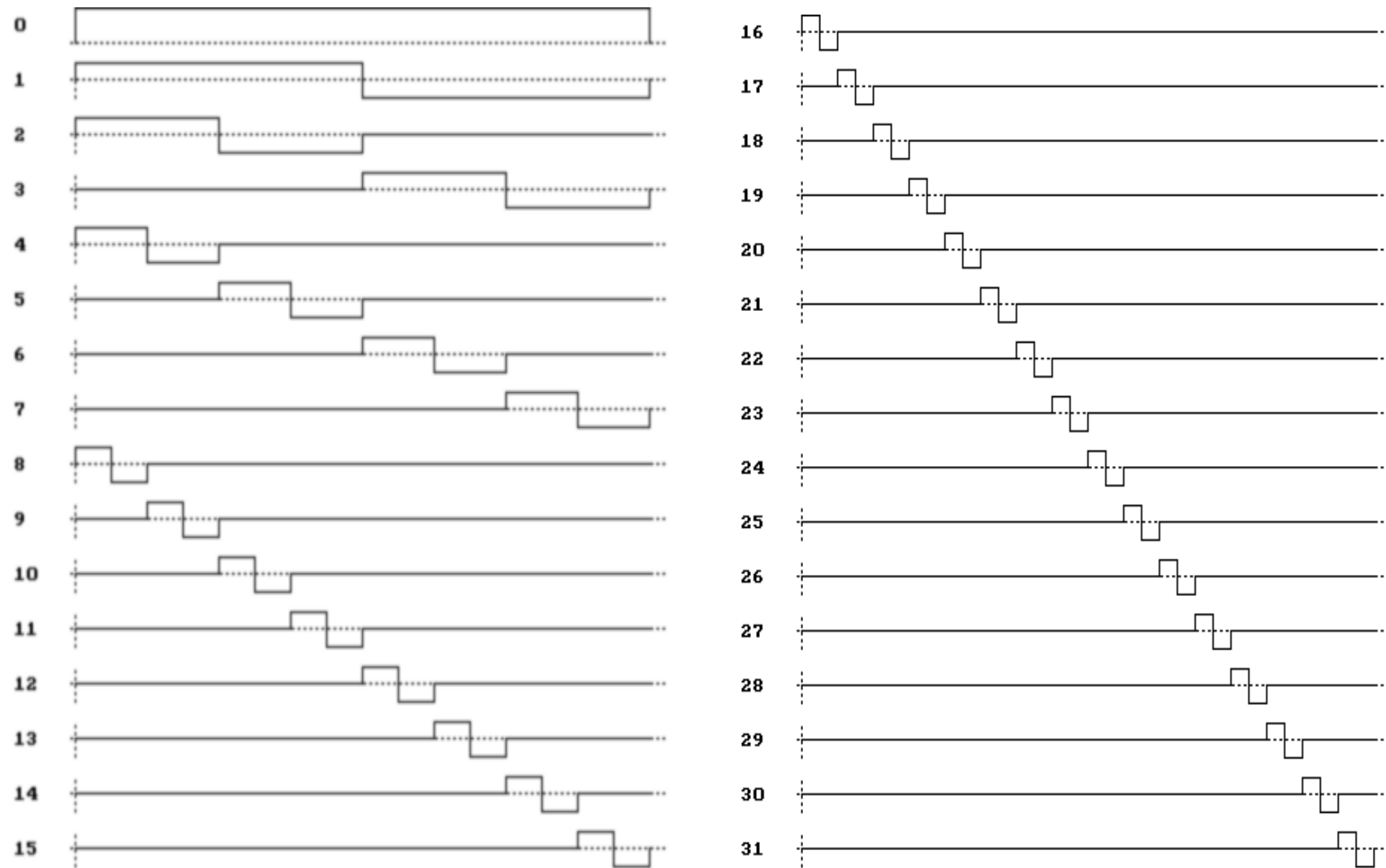
Pri výpočte *waveletových radov* z $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ môžeme zvoliť počiatocné V_m tak, aby $f(t) \in V_m$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j:

- 1) začneme s projekciou do V_m : $c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{n,m}(t) \rangle$
- 2) pokračujeme v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahu na výpočet rozkladu, často iba po želanú úroveň rozkladu (napr. U).

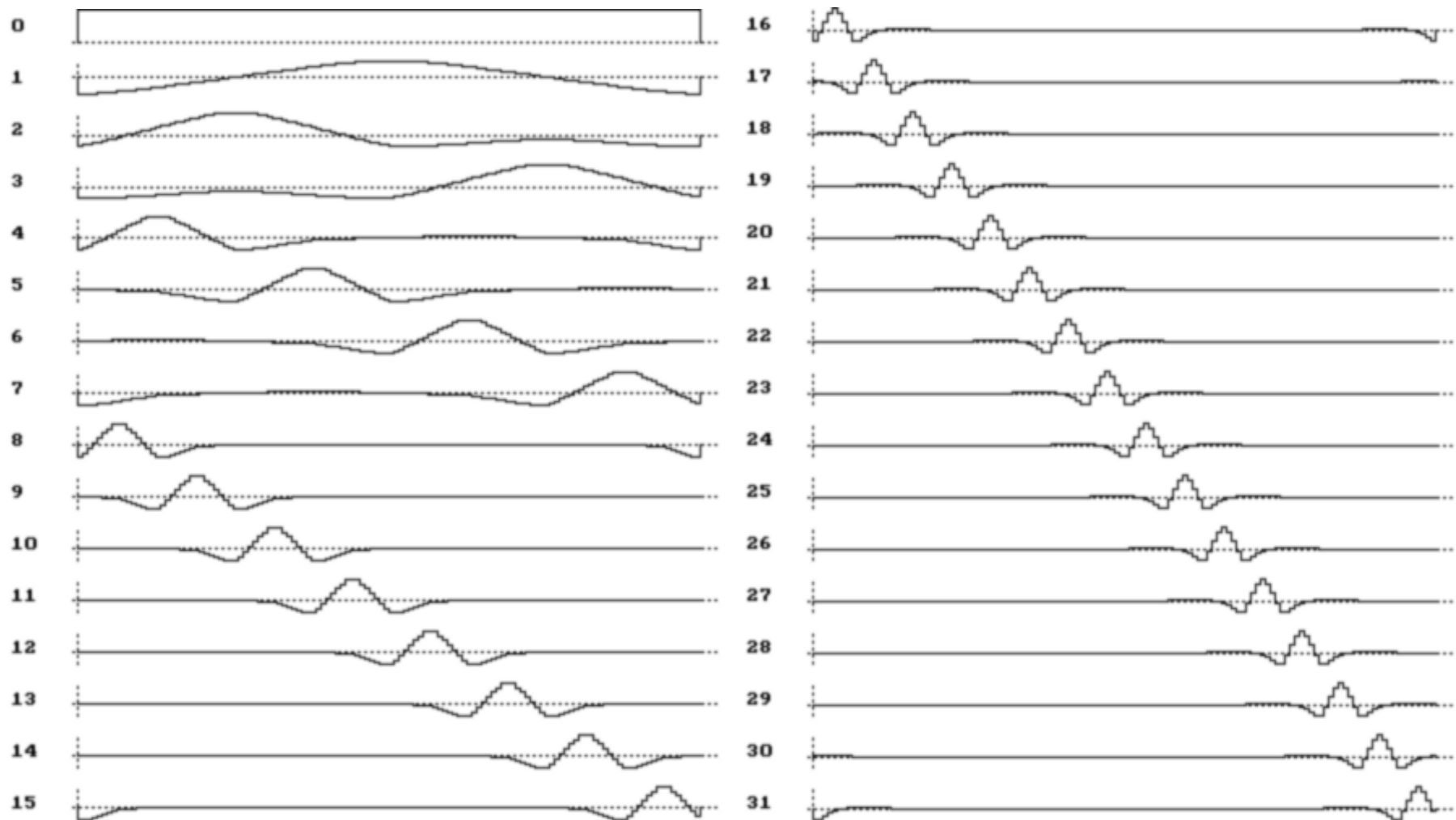


Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT





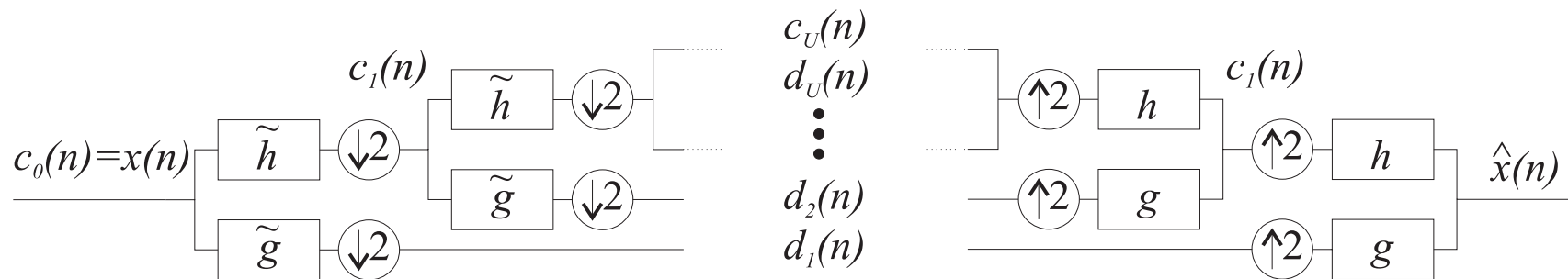
Bázové funkcie diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=32$ pre Haarov wavelet



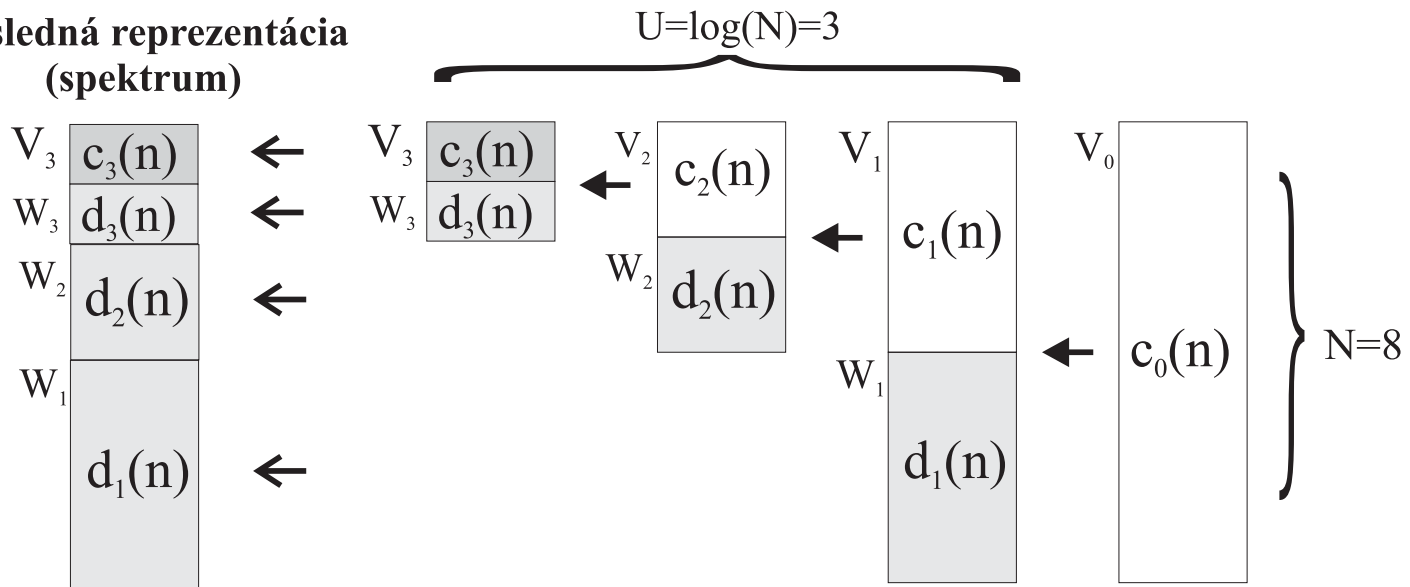
Prvých 32 bázových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

Dyadická DWT = Iterovaná 2-pásmová Banka filtrov

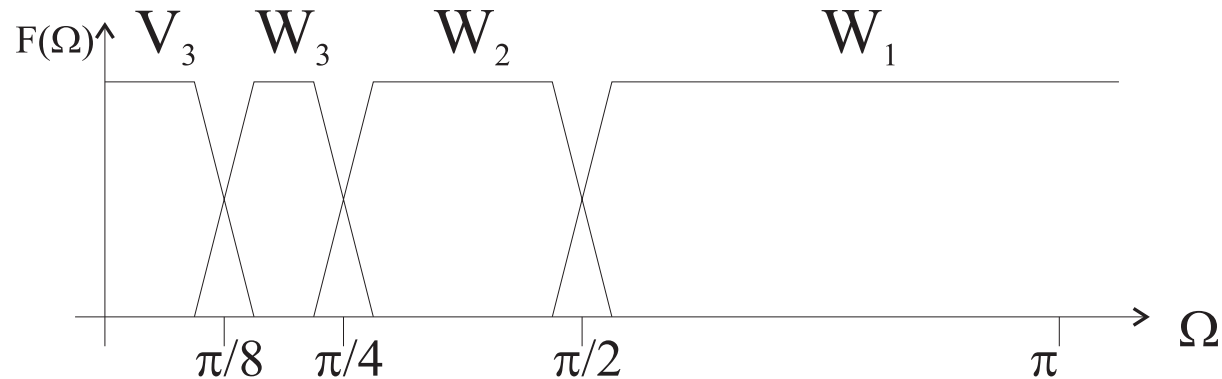
Realizácia výpočtu pomocou bánk filtrov (rozklad a následná rekonštrukcia):



Výsledná reprezentácia
(spektrum)



Výpočet koeficientov pri DWT a veľkosti vstupného vektora 8.

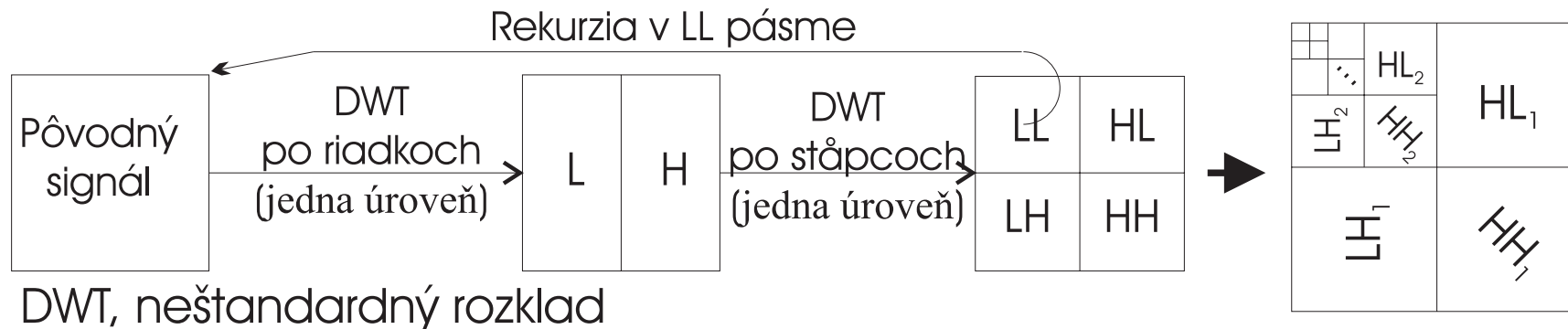


Označme diskretný vstup pre DWT ako $f(n)$. Na príklade jeho DTFT $f(\Omega)$ je znázornené, ktoré časti spektra budú vyjadrené v ktorých podpriestoroch.

Základné riešenia 2D DWT

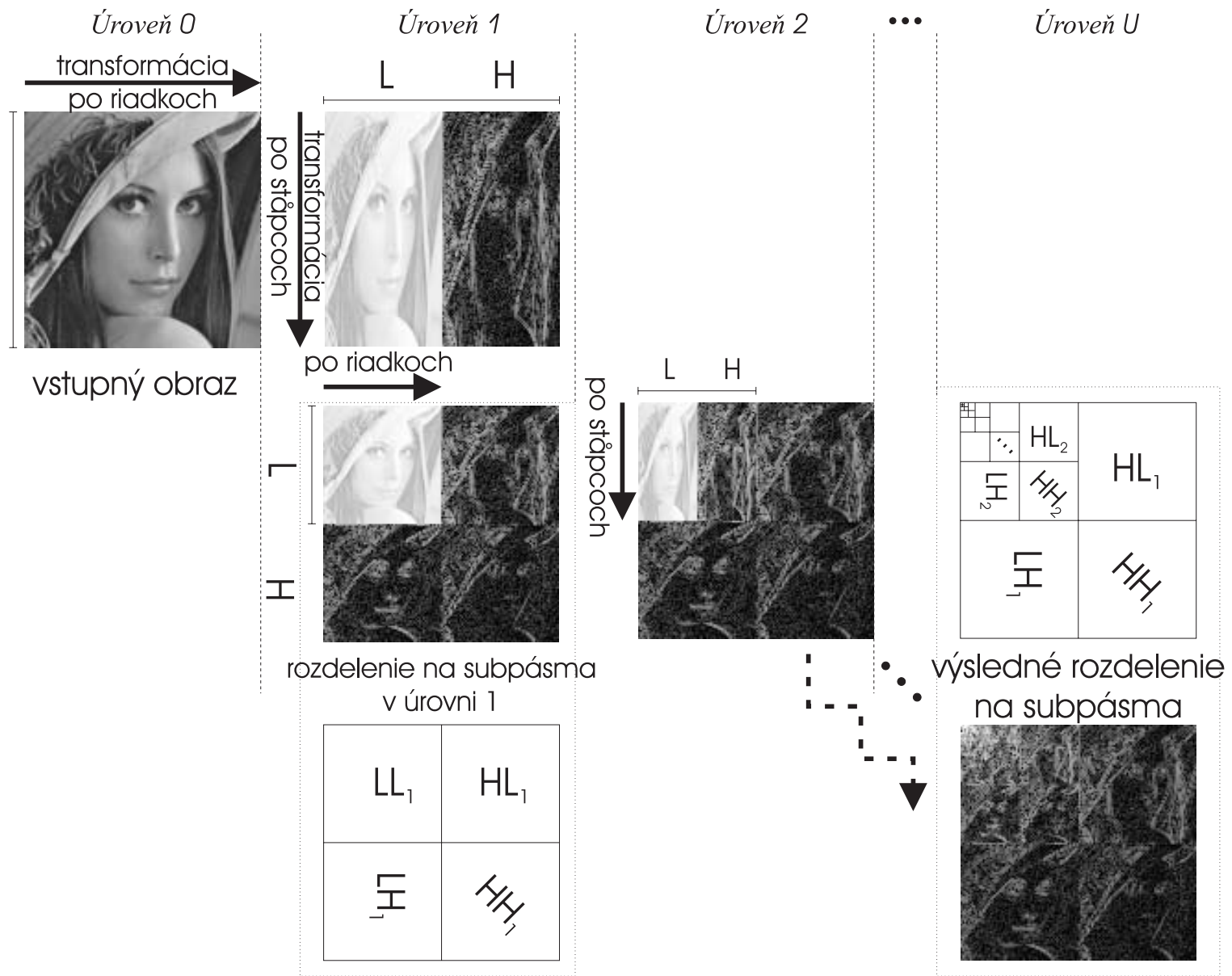


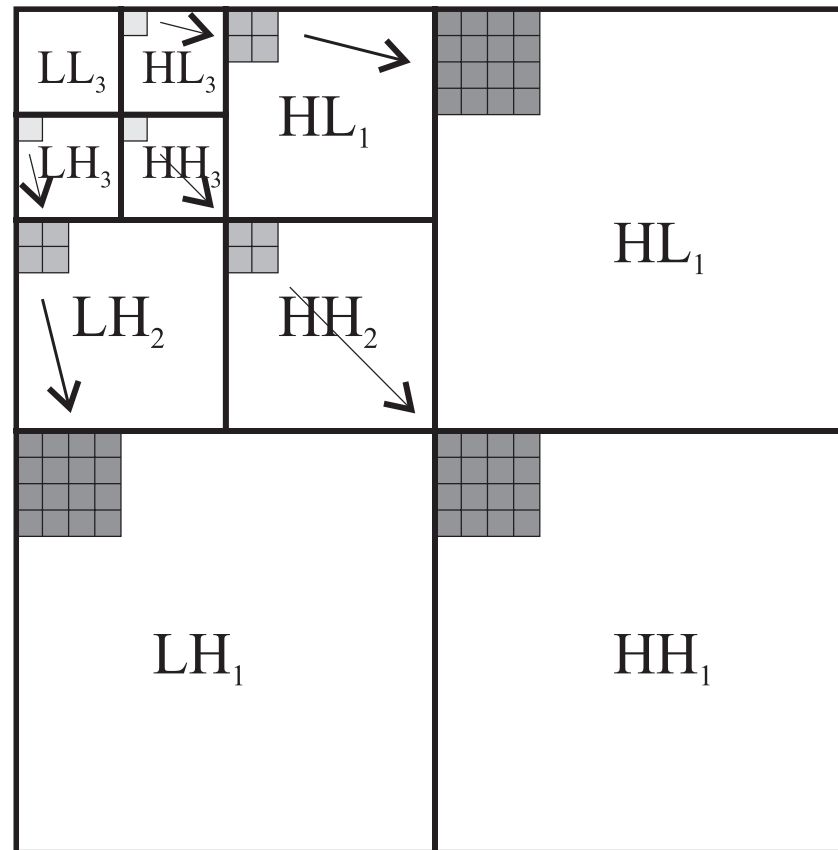
Rozdelenie spektra do subpásiem



Výhody DWT s neštandardným (NS) rozkladom:

- menší počet potrebných operácií oproti štandardnému rozkladu
- lepšia reprezentácia signálu v priestore.





Zobrazenie priestorových závislostí v NS DWT spektre 2D signálu

Aplikácie waveletov

Spojité/diskrétné signály všeobecne

- detekcia diskontinuit (aj v deriváciách)
- zistenie charakteru signálu (škálogramy)
- odstraňovanie šumu
- kompresia signálov

Audio aplikácie:

- kompresia zvuku waveletovými paketmi
- audio broadcasting
- odstraňovanie šumu
- watermarking

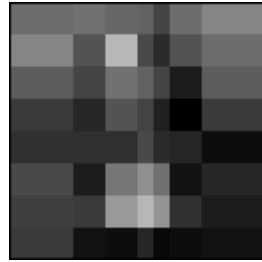
Spracovanie obrazu & videa

- kompresia statického obrazu a sekvencií obrazov
 - > JPEG 2000, Motion Jpeg 2000
- odstraňovanie šumu
- počítačová grafika
- watermarking

Prenosové systémy

- multiplexery a demultiplexery na báze bánk filtrov

Aplikácie waveletov v počítačovej Grafike

Obrazy

20 koeficientov



200 koeficientov



16,000 koeficientov

Krivky

úroveň 3.1



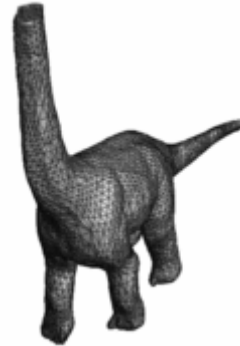
úroveň 5.4



úroveň 8.0

Povrchy

229 trojuholníkov



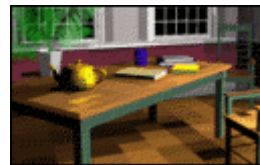
2,000 trojuholníkov



10,000 trojuholníkov

Simulácie

bez detailov



6 x detaily



finálna podoba

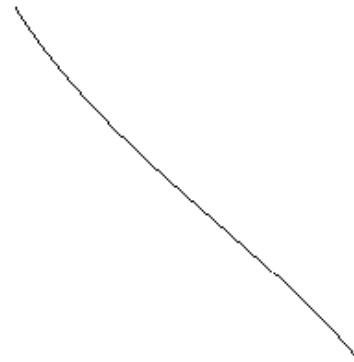
Manipulácie s krivkami

I) zmena charakteru bez zmien detailu



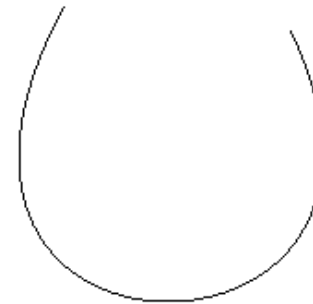
(a)

Originál



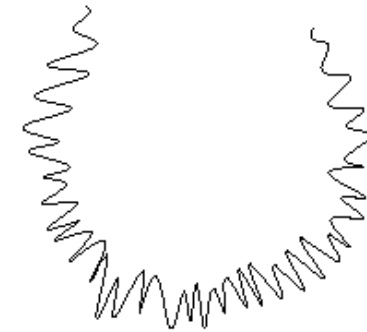
(b)

Extrahovaný charakter



(c)

Zmena



(d)

Spätné pridanie detailov

II) zmiana detajlu bez zmian charakteru



Manipulácie z povrchmi na rôznych úrovniach detailu(rozlíšenia)



(a)

Originál



(b)

Zmena v HP časti



(c)

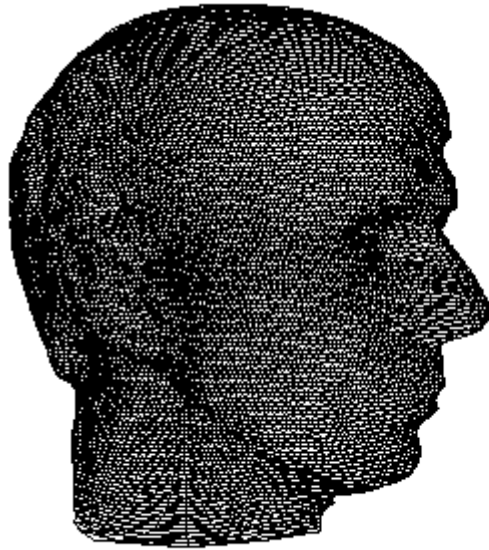
...



(d)

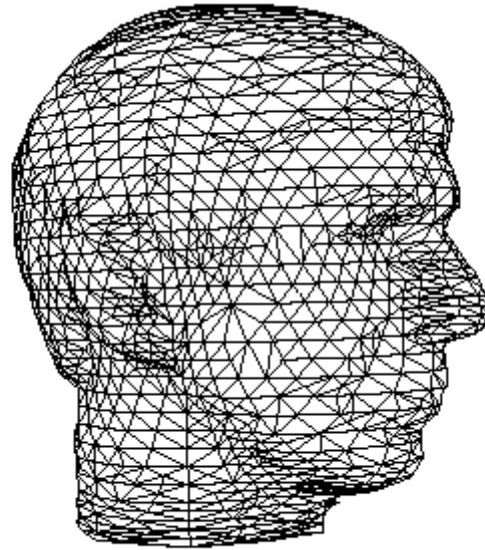
Zmena v DP časti

Aproximácia povrchu pomocou waveletov definovaných na danom povrchu



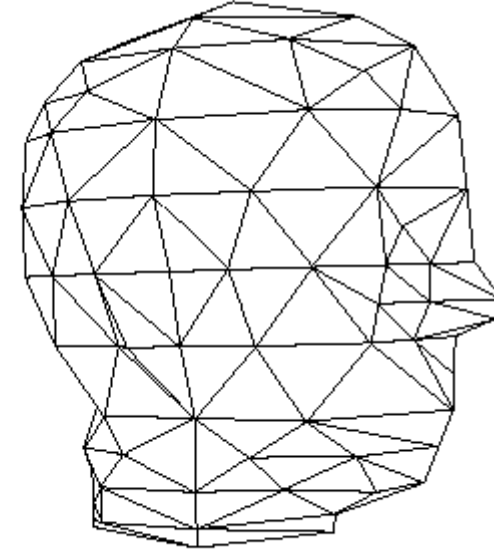
(a)

Originál



(b)

stredná aproximácia



(c)

hrubá aproximácia