Komplementárne filtre

Filtre $\widetilde{H}(z)$ a $\widetilde{G}(z)$ nazývame ***komplementárne*** ak pri ich použití v analyzačnej resp. syntetizačnej časti FB je možné dosiahnuť ***úplnú rekonštrukciu***.

Veta1: Keď sú komplementárne $\widetilde{H}(z)$ a $\widetilde{G}(z)$, potom sú komplementárne aj $H(z)$ a $G(z)$.

Veta2: K danému kauzálnemu FIR filtru $\widetilde{H}(z)$ existuje komplementárny filter $\widetilde{G}(z)$ vtedy a len vtedy, ak polyfázové komponenty $\widetilde{H}(z)$ sú nesúdeliteľné.

Dôkaz2: Nutná a postačujúca podmienka na úplnú rekonštrukciu FB je aby determinant ich polyfázovej matice $\widetilde{\mathbf{F}}_p(z)$ bol ***mononóm***. Nesúdeliteľnosť $\widetilde{H}_e(z)$ a $\widetilde{H}_o(z)$ je nutná, ináč by sa ich spoločný faktor vyskytoval v determinante. Postačujúcosť vyplýva s Euklidovho algoritmu:

> Ak máme nesúdeliteľné polynómy *a(z)* a *b(z)*, potom *a(z)p(z) +b(z)q(z)=c(z)* má jednoznačné riešenie. Voľbou $c(z)=z^{-k}$ získané riešenie {*p(z), q(z)*} predstavuje polyfázové komponenty $\widetilde{G}(z)$.

Laurentove polynómy a Euklidov algoritmus na nájdenie ich NSD

Prenosová funkcia $H(z)$ FIR filtra s $h(k)$ je ***Laurentov polynóm*** daný ako:

$$H(z)=\sum_{k=k_b}^{k_e} h(k) z^{-k}$$

, kde k_b a k_e sú najmenšie, resp. najväčšie čísla, pre ktoré $h(k)\neq 0$. ***Stupeň*** $L\{H(z)\}$ Laurentovho polynómu je potom definovyný ako

$$L\{H(z)\}=k_e-k_b$$

t.j. ***mononómy*** z^p vnímané ako Laurentove polynómy majú stupeň 0, pričom ako klasické polynómy majú stupeň p. Platí:

- ***Suma*** dvoch Laurentových polynómov je Laurentov polynóm
- Laurentom polynómje ***invertovateľný*** iba ak je to mononóm
- ***Súčin*** dvoch Laurentových polynómov stupňov m a n je Laurentov polynóm stupňa $m+n$.
- ***Podiel*** dvoch Laurentových polynómov existuje, avšak nie je jednoznačný: T.j. nech $A(z)$ a $B(z)$ sú Laurenové polynómy pričom $L\{A(z)\}\geq L\{B(z)\}$. Potom vždy existuje $Q(z)$ (kvocient) stupňa $L\{Q(z)\}=L\{A(z)\}-L\{B(z)\}$ a $R(z)$ (zvyšok) stupňa $L\{R(z)\}\leq L\{B(z)\}$ taký, že platí:

  $$A(z)=B(z)Q(z)+R(z)$$

  t.j.:

  $$Q(z)=A(z)/B(z) \qquad\qquad R(z)=A(z) \bmod B(z)$$

- Laurentove polynómy $A(z)$ a $B(z)$ nazývame ***nesúdeliteľné*** *ak* $NSD(A(z),B(z))=z^p$ (t.j. NSD je mononóm)

Trénujme delenie ...

Príklad: Nájdite všetky podiely polynómov $A(z) = z^{-1} + 6 + z$ a $B(z) = 6 + 4z$ so zvyškom stupňa 0
Riešenie: Treba nájsť polynóm $Q(z)$ stupňa 1 aby $R(z) = A(z) - B(z)Q(z)$ bol stupňa 0. T.j. $B(z)Q(z)$ sa musí rovnať $A(z)$ v dvoch zložkách:

A) rovnosť pri z^{-1} a z^{0}: $Q(z) = \frac{1}{4}\left(z^{-1} + 5\right)$, $R(z) = -4z$

B) rovnosť pri z^{-1} a z^{1}: $Q(z) = \frac{1}{4}\left(z^{-1} + 1\right)$, $R(z) = 4$

C) rovnosť pri z^{0} a z^{1}: $Q(z) = \frac{1}{4}\left(5z^{-1} + 1\right)$, $R(z) = -4z^{-1}$

Klasický Euklidov algoritmus na nájdenie NSD

Nech $a,b \in N$ pričom $a \geq b$ a $b \neq 0$. Potom ich NSD vypočítame iteračne :

$$a_0 = a\,, \qquad b_0 = b$$
$$a_{i+1} = b_i \qquad b_{i+1} = a_i \bmod b_i$$

Výsledok je $a_n = nsd(a,b)$, kde n je najmenšie číslo pre ktoré $b_n = 0$.

Príklad: Nájdite NSD(50,15).
Riešenie: iteráciou v Euklidovom algoritme dostávame:

i	0	1	2
a_i	50	15	5
b_i	15	5	0

t.j. $nsd(50,15) = a_2 = 5$

Euklidov algoritmus na nájdenie NSD Laurentových polynómov

Nech $A(z)$ a $B(z)$ sú Laurentove polynómy pre ktoré $L\{A(z)\} \geq L\{B(z)\}$ a $B(z) \neq 0$. Označme $A_0(z) = A(z)$, $B_0(z) = B(z)$. Ich NSD vypočítame iteračne ako:

$$A_{i+1}(z) = B_i(z) \qquad B_{i+1}(z) = A_i(z) \bmod B_i(z)$$

Výsledok je

$$A_n(z) = nsd(A(z), B(z))$$

, kde n je najmenšie číslo pre ktoré $B_n = 0$.
V maticovom tvare môžeme postup opísať nasledovne:

$$\begin{pmatrix} A_{i+1}(z) \\ B_{i+1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_i(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i(z) \\ B_i(z) \end{pmatrix} \quad \ldots \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} A_n(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=n}^{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_i(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix}$$

, kde $Q_{i+1}(z) = A_i(z) / B_i(z)$.

Invertovaním vzťahu dostávame

$$\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

resp. v transponovanom tvare

$$\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n(z) & 0 \end{pmatrix} \prod_{i=n}^{1} \begin{pmatrix} Q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad: Nájdite NSD polynómov $A(z) = z^{-1} + 6 + z$ a $B(z) = 4 + 4z$, a zistite či sú nesúdeliteľné. Napíšte maticový rozklad vektora $\begin{pmatrix} A(z) \\ B(z) \end{pmatrix}$.

Riešenie: iteráciou v Euklidovom algoritme dostávame:

i	0	1	2
$A_i(z)$	$z^{-1} + 6 + z$	$4 + 4z$	4
$B_i(z)$	$4 + 4z$	4	0
$Q_i(z)$		$(z^{-1} + 1)/4$	$1 + z$

t.j. $nsd = 4$ => polynómy sú nesúdeliteľné. Platí:

$$\begin{pmatrix} z^{-1} + 6 + z \\ 4 + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z^{-1} + 1)/4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resp:

$$\begin{pmatrix} z^{-1} + 6 + z & 4 + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z^{-1} + 1)/4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$