Čo robiť pri DWT na okraji signálu signálu:

Ak má čo chceme?

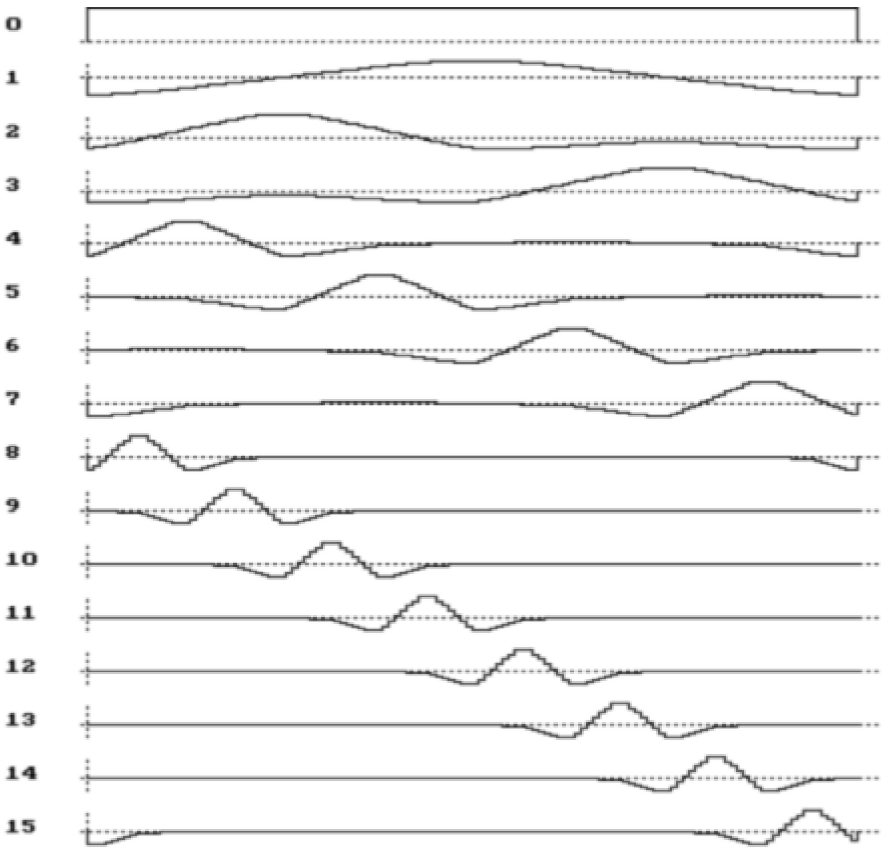
- Nadbytočnú reprezentáciu?
- Zachovať ortogonalitu ?
- Nemeniť tvar funkcií (t.j. ich vlastnosti)?

Možnosti:

1. *Doplnenie nulami* - vnáša diskontinuity na okrajoch signálu.
2. *Periodifikácia signálu* - má za následok periodifikáciu analýzy s rôznym rozlíšením (MRA), čo je v praxi implementované kruhovou konvolúciou pri filtrovaní v čase. Výsledky sú lepšie ako v 1. prípade .
3. *Symetrické rozšírenie signálu* - je podmienené použitím filtrov s lineárnou fázou , t.j. biortogonálnymi waveletmi.
4. *Priama extrapolácia*. Nepredpokladáme *žiadnu symetriu*, pričom okrajové hodnoty mimo hraníc signálu sa vyjadrujú pomocou transformačných koeficientov (lineárna, polynomická, nelineárna závislosť hraničných hodnôt).
5. *Wavelety na intervale a okrajové filtre* - Originálna definícia waveletov používa funkcie definované na celej reálnej osi. Dalšou možnosťou je definovanie špeciálnych waveletov na intervale: tieto pozostávajú z obvyklých waveletov, ktorých podpora je úplne vnútri intervalu a špeciálnych "okrajových" waveletov. V praxi sa riešia modifikovaním $h_{mr}(n)$,$g_{mr}(n)$ na okrajoch signálu, t.j. zavedením špeciálnych modifikovaných hraničných filtrov. Existuje celý priestor ortogonálnych riešení hraničných filtrov, t.j. je pomerne veľký stupeň voľnosti pre optimalizáciu.

Periodické rozšírenie.

- **speriodifikované transformáčné matice**
- **speriodifikovanie bázových funkcií ("pomalšie funkcie dokonca musia meniť tvar)**

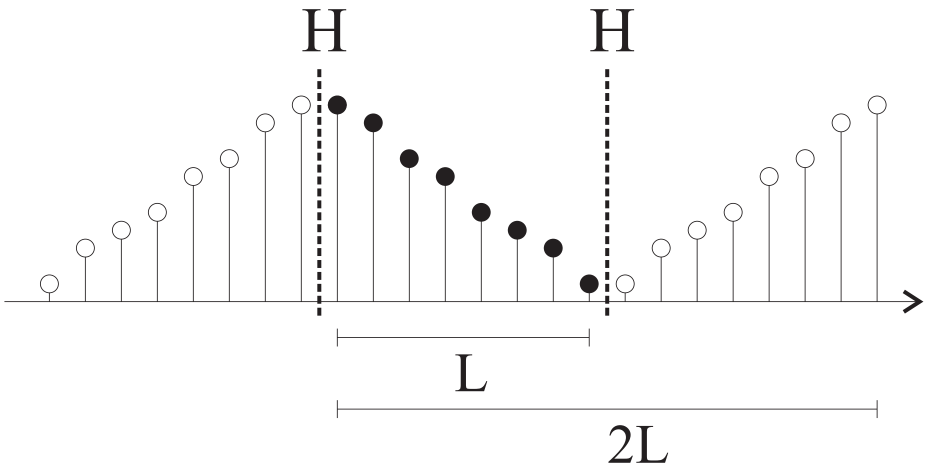


Prvých 32 bázových funkcií diskrétnej waveletovej bázy o veľkosti N=128 pre FBI(9,7) wavelet

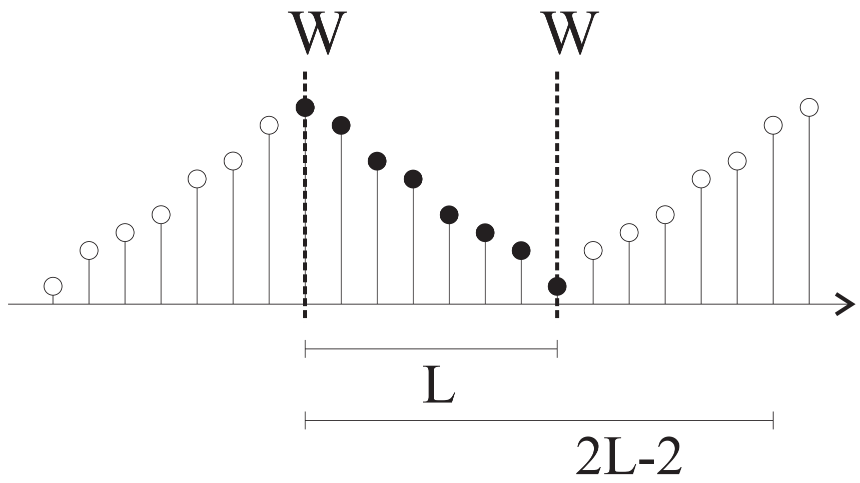
Čo sa deje ak N != 2^n ?

Symetrické rozšírenie signálu

I) polbodová symetria(H)



II) celobodová symetria (W)



Pre aké filtre(sekvencie $h_{mr}(n)$,$g_{mr}(n)$) použiť ktorú symetrizáciu?

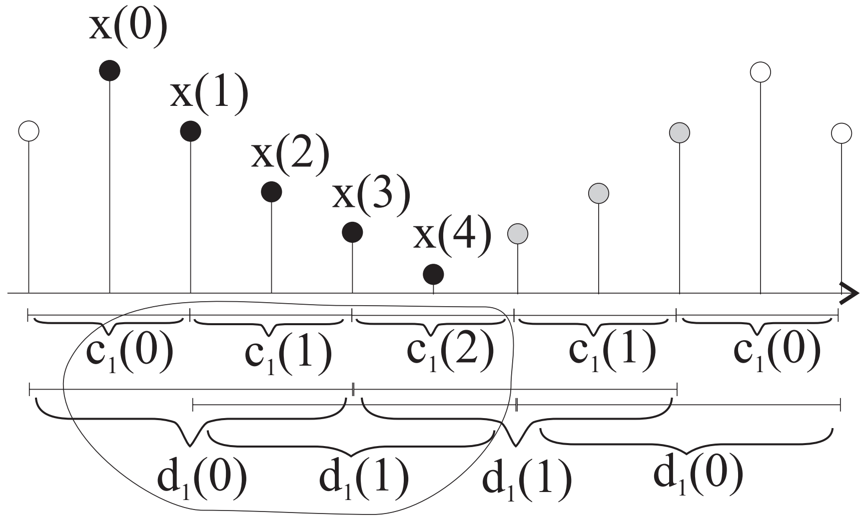
a) $h_{mr}(n)$,$g_{mr}(n)$ majú párnu dĺžku(t.j. sami sú H symetrické) → typ H

b) $h_{mr}(n)$,$g_{mr}(n)$ majú nepárnu dĺžku(t.j. sami sú W symetrické) → typ W

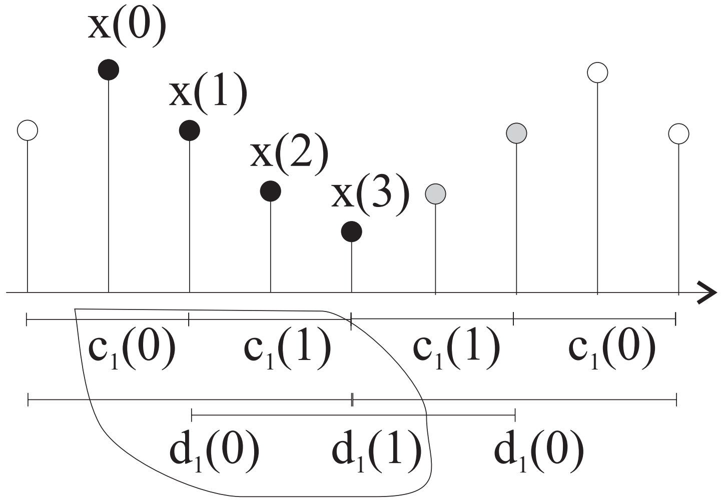
Typ symetrizácie signálu a symetria dilatačných koeficientov musí byť zhodná aby rozšírený signál po podvzorkovaní danú symetriu nestratil.

Stred filtrov a reprezentácia signálu s párnou/nepárnou dĺžkou

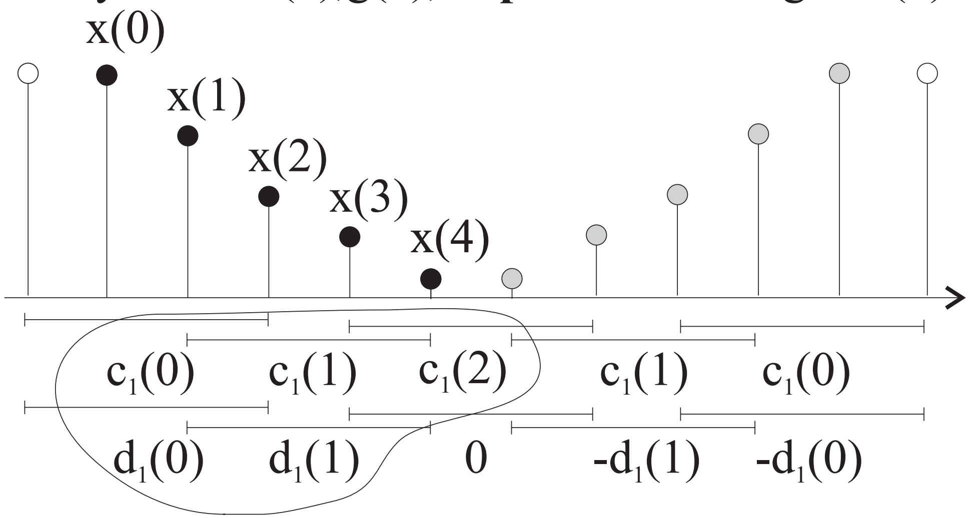
W symetria h(n),g(n), **nepárna** dĺžka signálu(5)



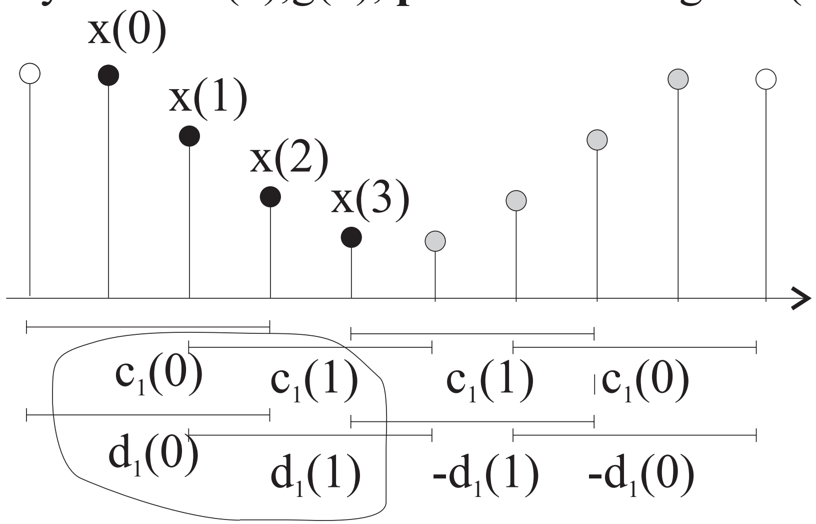
W symetria h(n),g(n), **párna** dĺžka signálu(5)

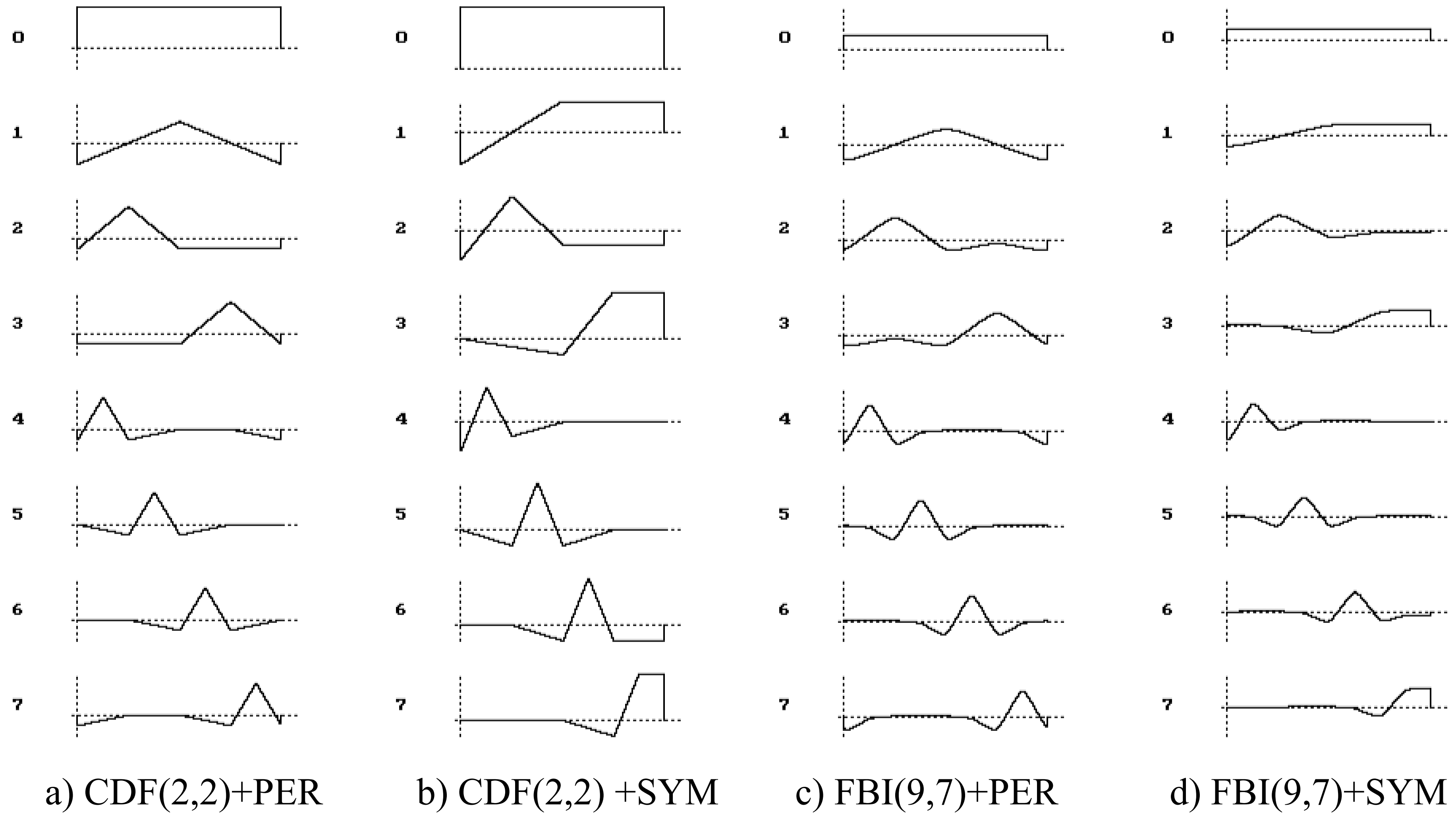


H symetria h(n),g(n), **nepárna** dĺžka signálu(5)



H symetria h(n),g(n), **párna** dĺžka signálu(5)





Porovnanie vplyvu periodického a symetrického rozšírenia na tvar bázových funkcii 1D DWT. Zobrazených je prvých osem bázových funkcií, veľkosť bázy je N=128.

Rozšírenia/zovšeobecnenia waveletov:

- wavelety na intervale
- viacrozmerné wavelety
- **M-pásmové wavelety**
- Multivavelety
- **waveletové pakety**

M-pásmové wavelety

Doteraz bolo:

- báza V_m tvorená množinou $\left\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\varphi\left(2^{-m}t - n\right), n \in Z\right\}$
- dilatačná rovnica pre $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(2t-n)$

Zovšeobecnením je:

$$\varphi(t) = \sqrt{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(Mt-n) \qquad M \in Z,\ M > 2$$

Čo platí pre $h_{mr}(n)$ ak báza tvorená pomocou $\varphi(t)$ je ortonormálna?

Označme $h_{mr}(n) = h(n)$. Analogicky ako pri vlastnostiach ortonormálnych DWT platí:

$$\sum_n h(n) = \sqrt{M}$$

$$\sum_n h(Mn+m) = 1/\sqrt{M} \qquad H(2\pi l/M) = 0 \quad l = 0,1,\ldots M-1$$

$$\sum_n h(n+Mm)h(n) = \delta(m) \quad \text{resp .} \quad \sum_n h(n)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |H(\omega)|^2 + |H(\omega + 2\pi/M)|^2 + \ldots + |H(\omega + 2\pi(M-1)/M)|^2 = M$$

atď...

A čo je s waveletmi ???

Nemáme jediný wavelet, ale *M-1 waveletov* $\psi_l(t)$:

$$\psi_l(t) = \sqrt{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_l(n)\varphi(Mt-n) \qquad l = 0,1,\dots M-1$$

Čomu na každej úrovni rozlíšenia odpovedá *M-1 diferenčných priestorov* $W_{m,l}$.
T.j. pre MRA platí?

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1,1} \oplus W_{m+1,2} \oplus \dots \oplus W_{m+1,M-1}$$

Wavelety sú *ortogonálne* k funkcii mierky, t.j. :

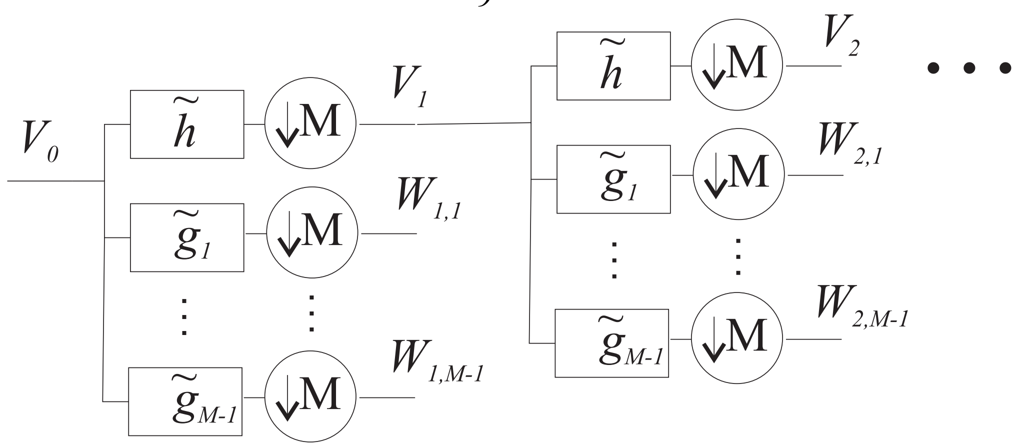
$$\int \varphi(t-n)\psi_l(t-m) = 0 \qquad \sum_n h(n) g_l(n-Mk) = 0 \qquad l = 0,1,\dots M-1$$

Čo sme vlastne získali?

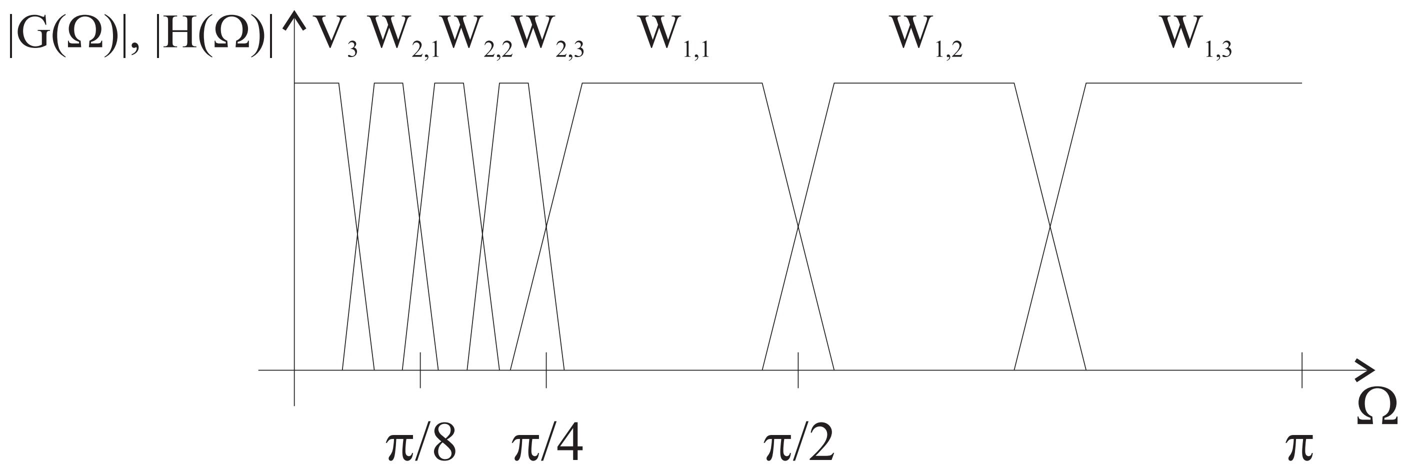
- Stupne voľnosti – je veľa rôznych ortogonálnych waveletov k danej funkcii mierky
- Časovo-frekvenčnú rovinu môžeme deliť lineárne aj logaritmicky (mix oboch)
- Čisto logaritmické delenie je ekvivalentné *M-adickým waveletom*, t.j. máme iba jeden wavelet (M-1 waveletov je rovnakých) s hustejšou vzorkovacou mriežkou

Ako vypočítame M-pasmovú DWT ?

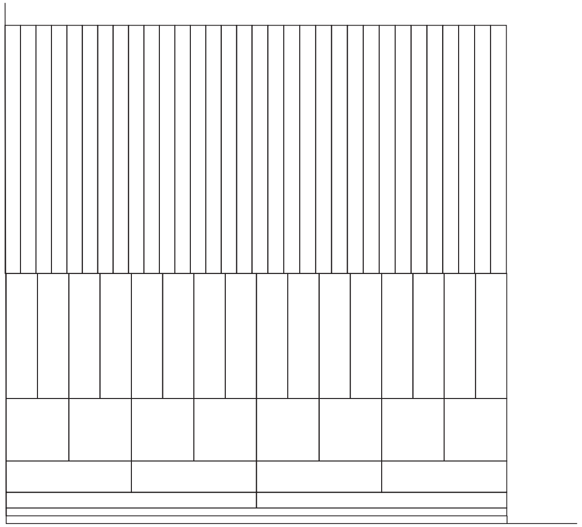
M-pásmovou bankou filtrov:



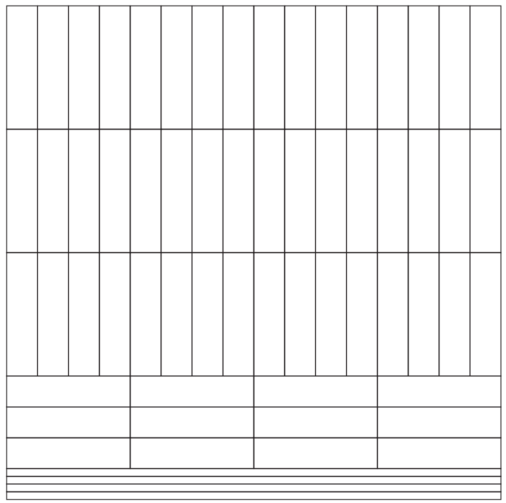
Príklad rozdelenia subpásiem pre 4-pasmovú DWT



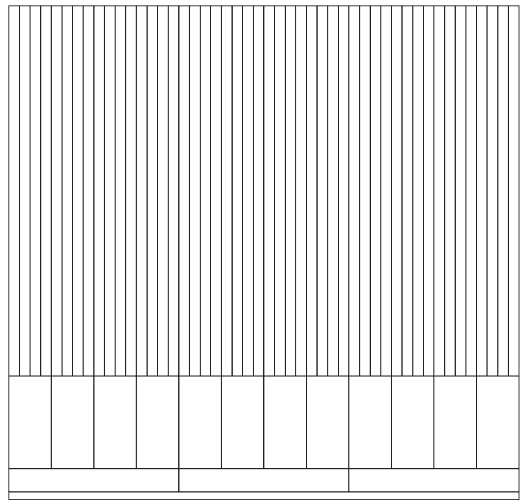
Spôsob delenia časovo-frekvenčnej roviny



Dyadická DWT



4-pásmová DWT, 3 odlišné wavelety, ktoré zaberajú rôzne oblasti vo frekvencii

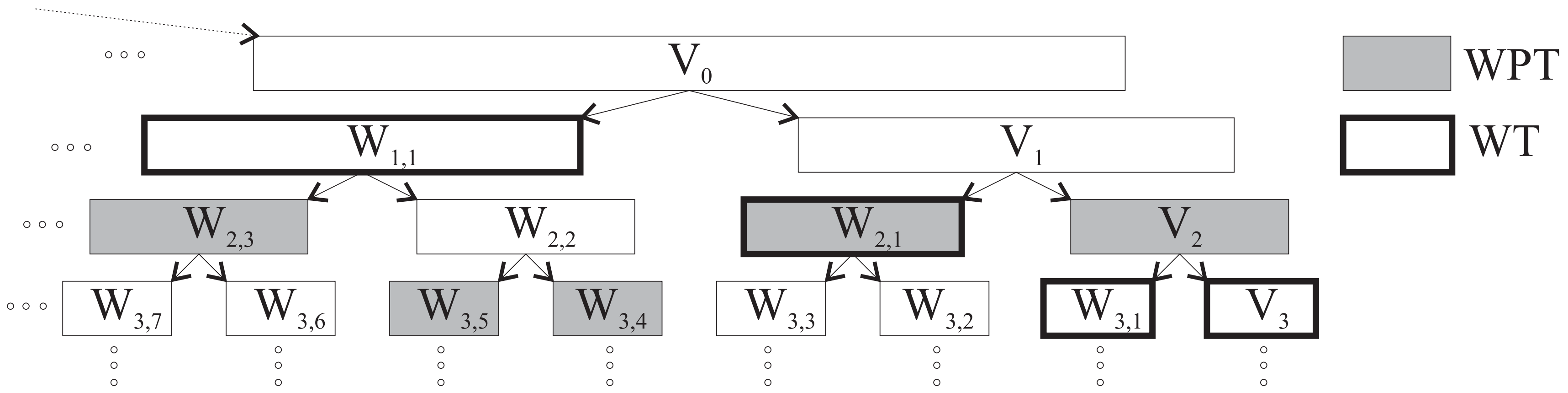


4-pásmová DWT, špeciálny prípad , 3 x rovnaký wavet
=
4-adická DWT

Waveletové pakety

- v klasickom prípade waveletov rozkladáme v MRA iba sumačné podpriestory V_m
- waveletové pakety rozklad zovšeobecňujú aj na diferenčné priestory W_m
- sú možným rozšírením všetkých doteraz uvedených typov waveletov
- umožňujú adaptívnu, podrobnejšiu a flexibilnejšiu analýzu signálov

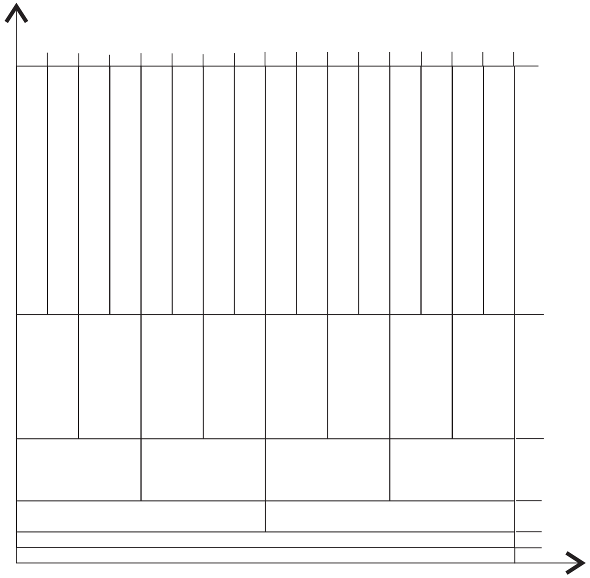
Výpočet Waveletovej paketovej transformácie(WPT) – v MRA je dovolené deliť aj diferenčné popriestory, nielen sumačné:



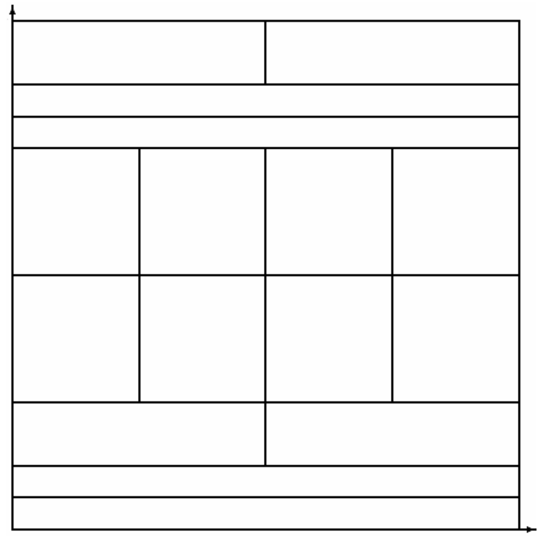
Vzniká kompletný waveletový paketovým strom. Reprezentácia kompletným stromom je *redundantná* - stačí použiť iba *vhodnú časť stromu*.

Delenie priestorov odpovedá aj deleniu časovo-frekvenčnej roviny

DWT



WPT (príklad)



WPT umožňuje *adaptívne* resp. optimalizované delenie podpriestorov = delenie časovo-frekvenčnej roviny = použitie istej časti kompletného waveletového paketového stromu.

Ktorú časť stromu použiť – ako čo najlepšie reprezentovať signál ?

Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry je ekvivalentný s *hľadaním najlepšej bázy*.
Najbežnejšie kritériá pre výber najlepšej reprezentácie signálu, formované pomocou tzv. *nákladovej funkcie* λ sú:

- minimalizácia entropie reprezentácie signálu (Wickerhauser, Coifman)
- minimalizácia počtu bitov reprezentácie signálu a skreslenia pri danej množine kvantizátorov

Koľko je možných báz?

Ak dĺžka signálu je N, potom pre α , počet možných WPT báz platí:

$$\alpha \geq 2^{N/2}$$

Ako teda vyberať najlepšiu bázu?

Najjednoduchšie je rozhodovať sa priamo počas rozkladov, t.j. rozhodovať sa, či ďalší rozklad prevedieme, alebo nie.

Aké kritérium použiť?

Rozhodujeme sa, podľa toho či *náklady po rozdelení budú väčšie ako pred rozdelením*. Kritériom musí byť taká nákladová funkcia, ktorej aditivita sa rozkladom pri DWT zachováva (napríklad entropia).

Príkladom je napr. Shannonova entrópia E zo signálu s(n), pre ktorú

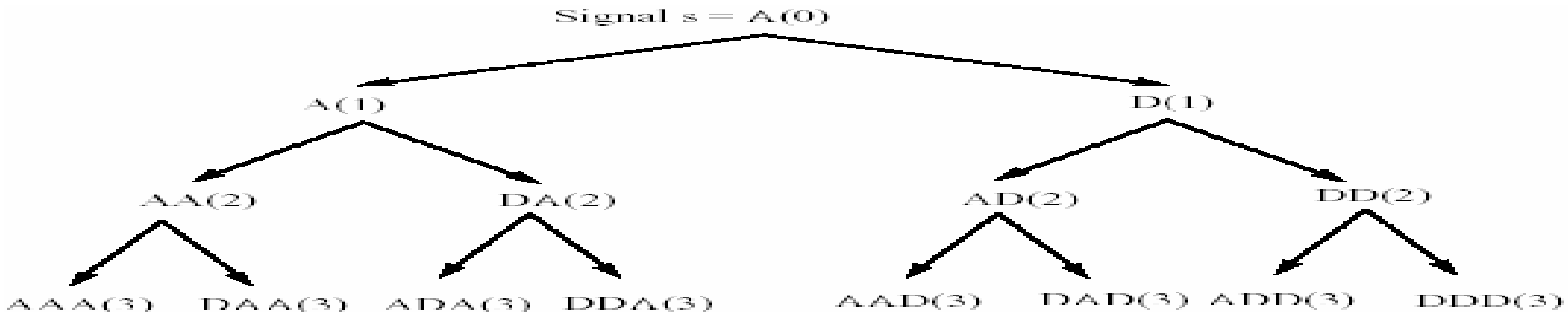
$$E(s) = -\sum_n s(n)^2 \log\left[s(n)^2\right]$$

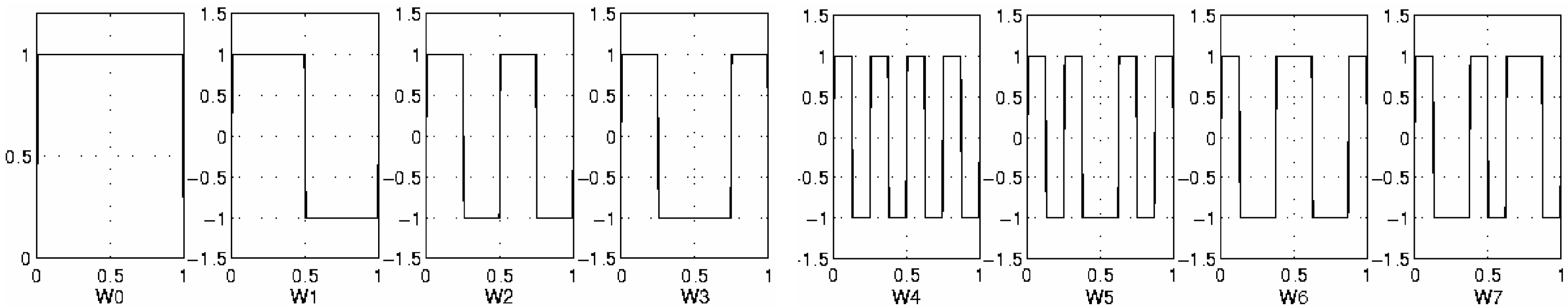
s konvenciou $0\log(0) = 0$.

Kritérium teda je:

Ak suma Shannonových entropií 2 subpásiem, ktoré vznikli rozdelením pôvodného subpásma, je menšia ako entropia pôvodného subpásma, je výhodné rozdelenie uskutočniť.

Ako vyzerajú bázové funkcie pri úplnom rozklade pre Haarovu WPT?





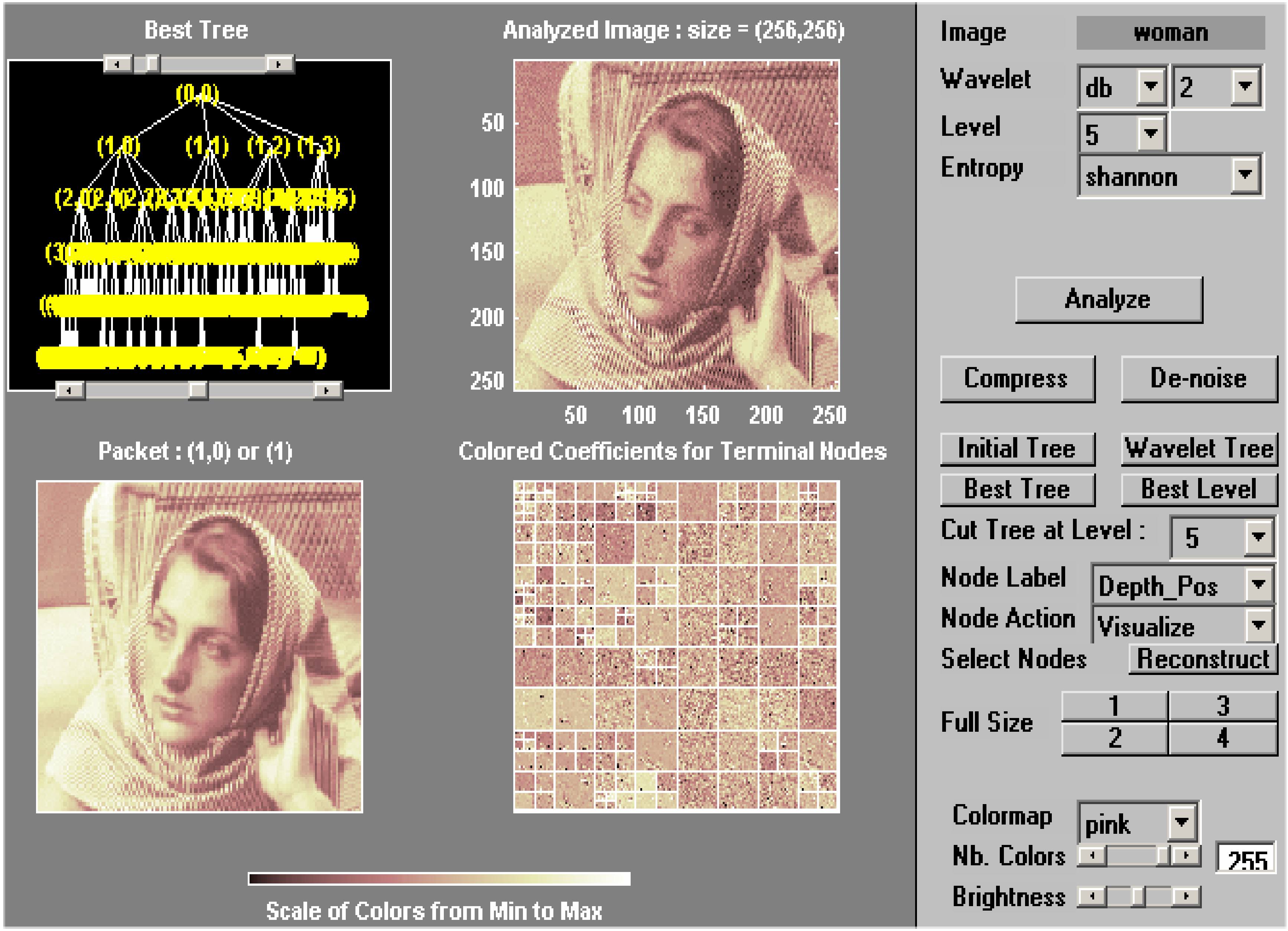
Počet prechodov nulou je:

2 3 5 4 9 8 6 7

T.j. frekvenčné pásma odpovedajúce jednotlivým priestorom nemajú vzostupný charakter, sú poprehadzované, ich poradie je:

0 1 3 2 7 6 4 5

= analogicky ako pri *Walshovej transformácii v Palleyho poradí*, t.j. nie v sekvenčnom.
Chceme zobraziť frekvenčný obsah v prirodzenom poradí ? →*koeficienty preusporiadať*


Best Tree
Analyzed Image : size = (256,256)
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250
Packet : (1,0) or (1)
Colored Coefficients for Terminal Nodes
Scale of Colors from Min to Max
Image
woman
Wavelet
db
2
Level
5
Entropy
shannon
Analyze
Compress
De-noise
Initial Tree
Wavelet Tree
Best Tree
Best Level
Cut Tree at Level :
5
Node Label
Depth_Pos
Node Action
Visualize
Select Nodes
Reconstruct
Full Size
1
3
2
4
Colormap
pink
Nb. Colors
255
Brightness