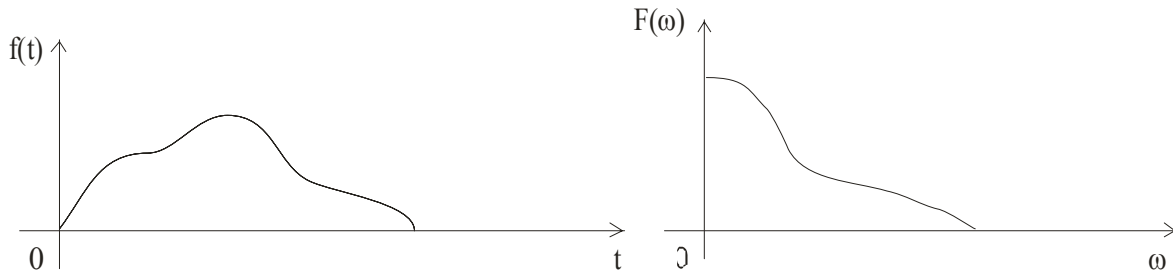


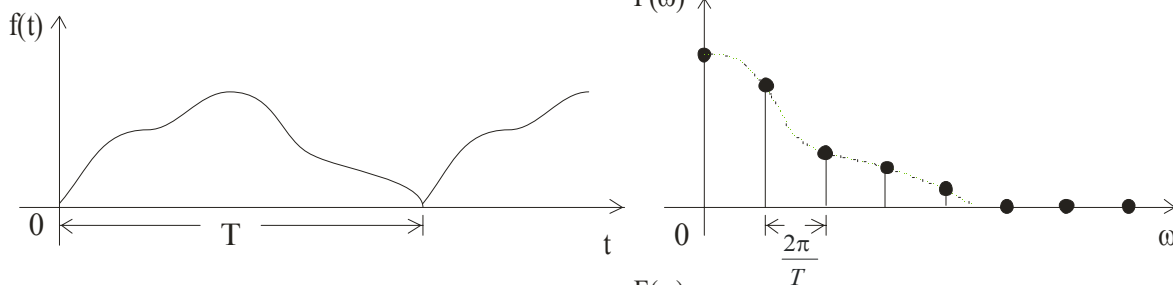
# Fourierova transformácia a jej druhy



## a) CTFT (Continuous Time Fourier Transform)

$$F(\omega) = \int_t f(t) e^{-j\omega t} dt$$

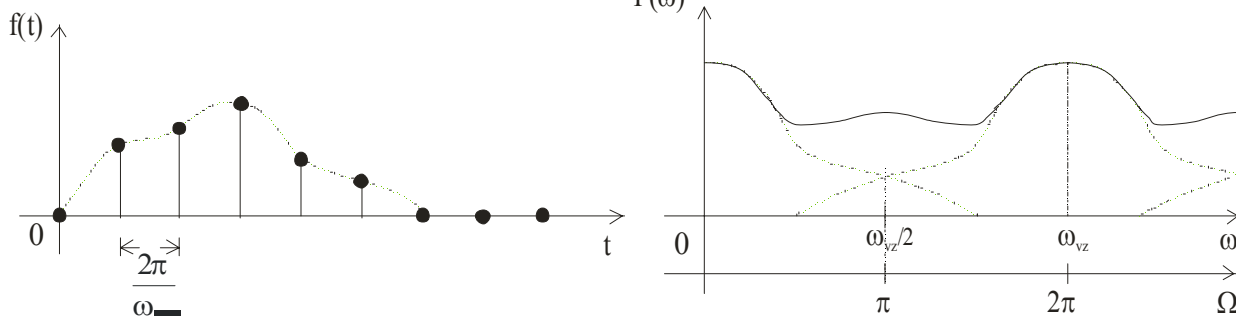
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



## b) CTFS (Continuous Time Fourier Series)

$$F(k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

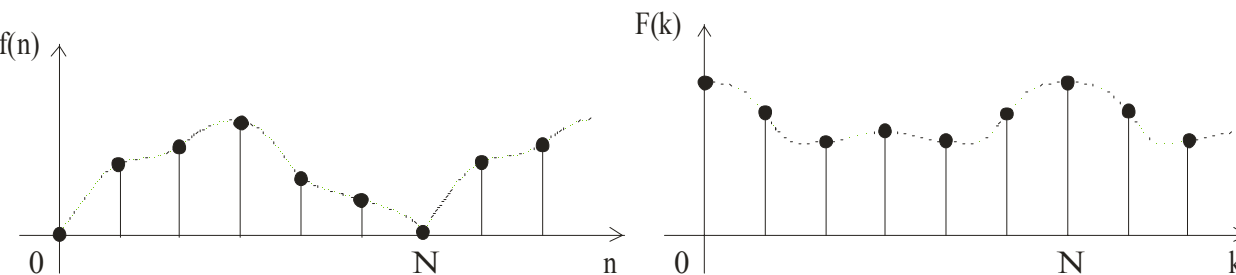
$$f(t) = \sum_k F(k) e^{j2\pi kt/T}$$



## c) DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

$$F(\Omega) = \sum_n f(n) e^{-j\Omega n} \quad \Omega = 2\pi\omega / \omega_{vz}$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$



## d) DTFS (Discrete Time Fourier Series)

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{-nk}$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W_N^{nk}$$

$$W_N = e^{j2\pi/N}$$

# Reprezentácia signálu v čase a frekvencii

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii.

- Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform)*, Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

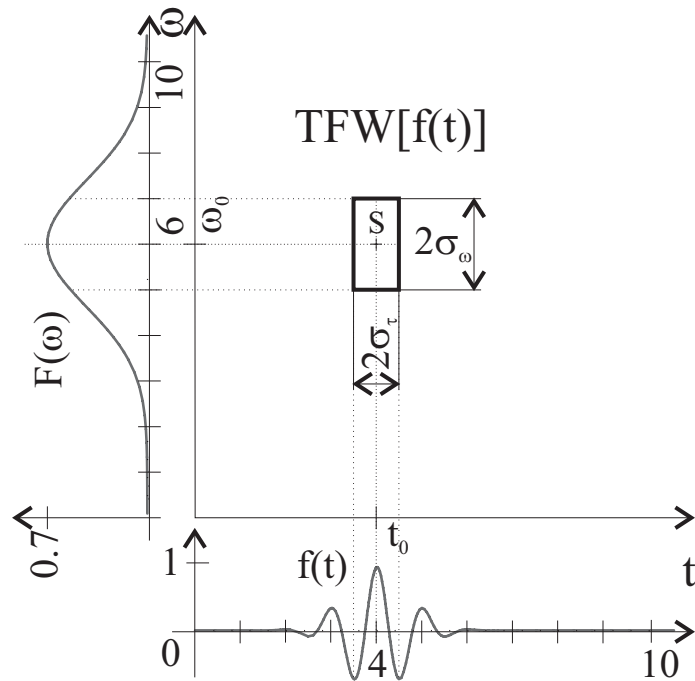
$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = \langle f(t)g(t - \tau), e^{j\omega t} \rangle$$

,kde  $g(t)$  je *oknová funkcia* a  $f(t)$  vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*.

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie  $g(t)$ .
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.
- Nadbytočnosť STFT môžeme odstrániť vzorkovaním

Každý signál môže byť znázornený v *časovo-frekvenčnej rovine (TF rovina)*, ktorá charakterizuje rozdelenie napr. energie signálu v čase a frekvencii:



$$x(t) = e^{-(t-4)^2} \cos(6(t-4))$$

Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú funkciu  $x(t)$  a jej fourierovu transformáciu  $X(\omega)$  je dané *časovo – frekvenčným oknom (TF okno)*. Jeho stred je v bode  $S = (t_0, \omega_0)$ , a veľkosti strán sú  $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$ . ( $\omega_0$  sa nazýva stredná frekvencia signálu)

Platí:

$$t_0 = \|x(t)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt \quad \omega_0 = \|X(\omega)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega \quad (1.\text{moment})$$

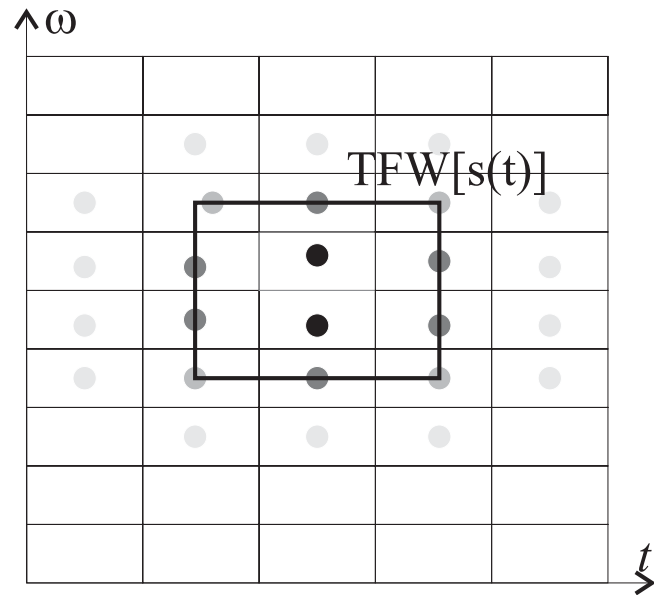
$$\sigma_t^2 = \|x(t)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |x(t)|^2 dt \quad \sigma_\omega^2 = \|X(\omega)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.\text{moment})$$

Rôzne  $\tau, \omega$  pri STFT zodpovedajú posunom základného TF okna v čase a frekvencii

→ TF okno nám hovorí o tom aké drobné detaily sme schopní v signále sledovať.

→ Hranice okna sú definované “štatisticky”, t.j. neznamená to, že mimo okna má signal nulové hodnoty

### TF okno signálu a jeho význam pri určovaní hodnôt signálu v čase a frekvencii

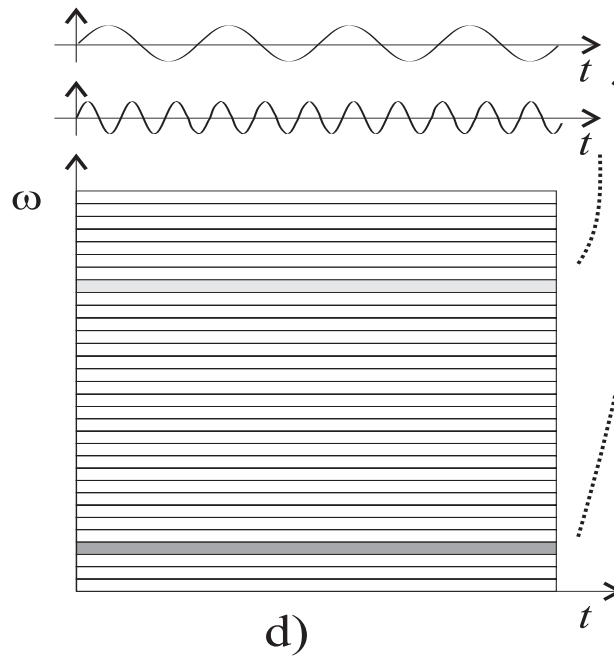
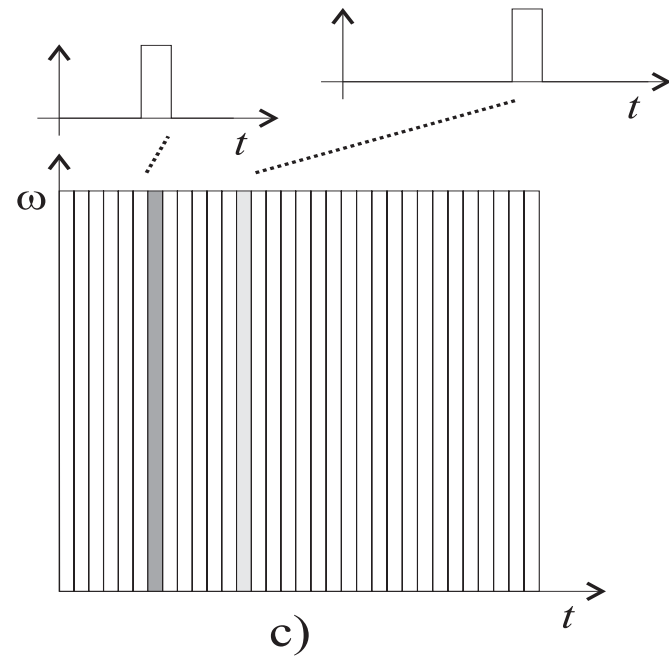
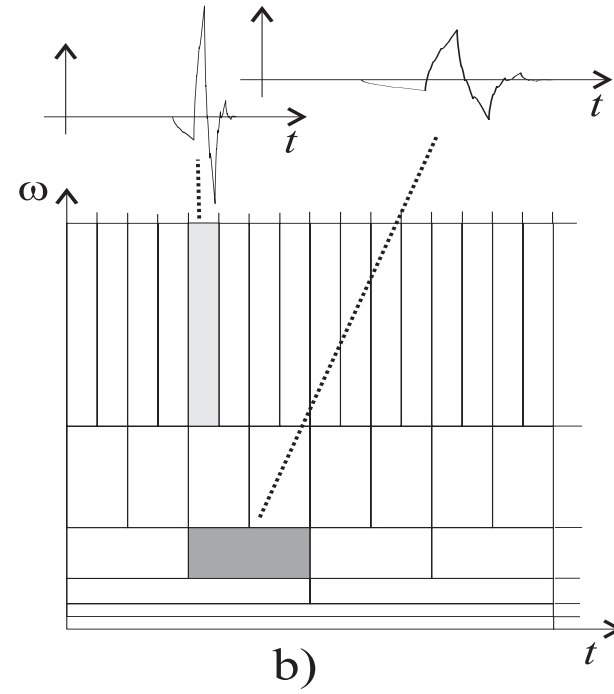
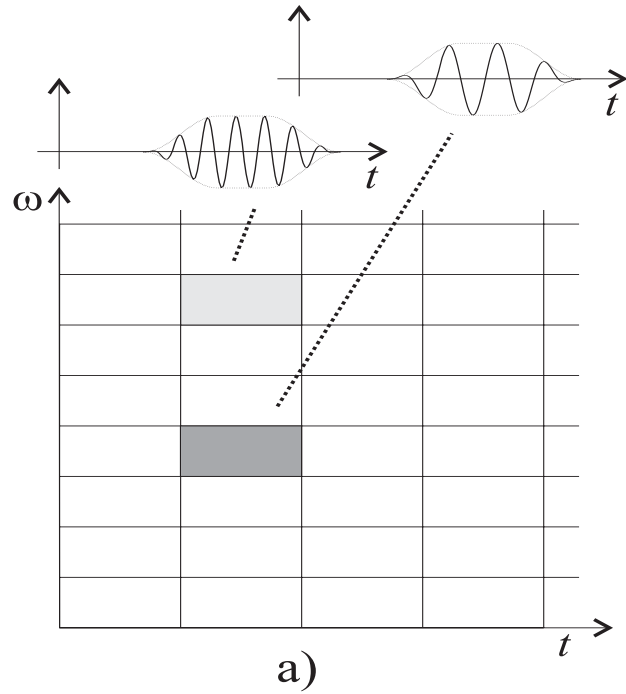


### Princíp neurčitosti:

Pre  $x(t)$  idúce k nule rýchlejšie ako  $1/\sqrt{t}$  ak  $t \rightarrow \pm\infty$  platí:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4$$

# Najznámejšie príklady delenia TF roviny pri reprezentácii signálov (znázornené schématicky)



**Spektrogram (SPG) signálu** = pohľad na TF rovinu so zobrazenými magnitudami spektrálnych koeficientov STFT(!) v strede TF okien odpovedajúcich bázových funkcií

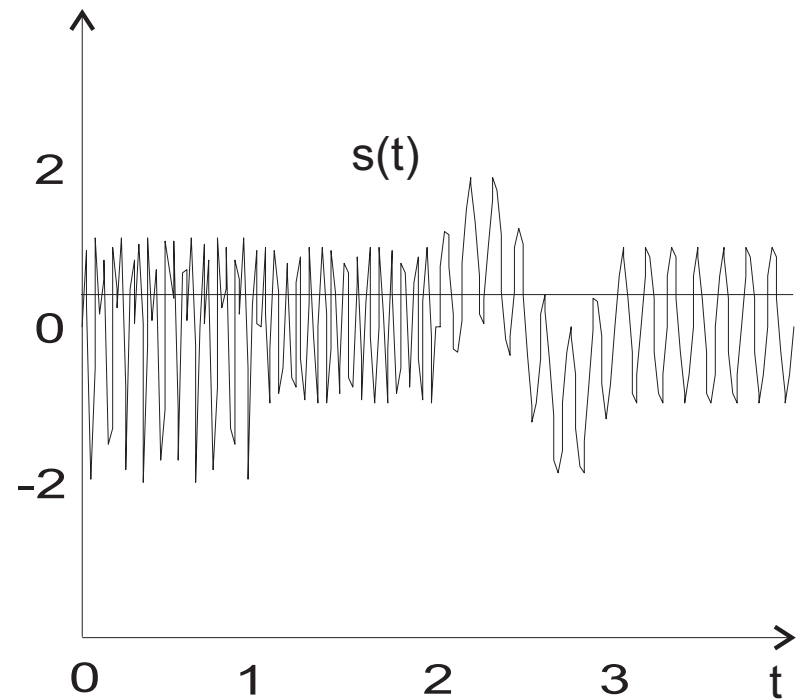
a) Signál zložený zo 4 častí

1)  $2\sin(5t)\sin(15t)$

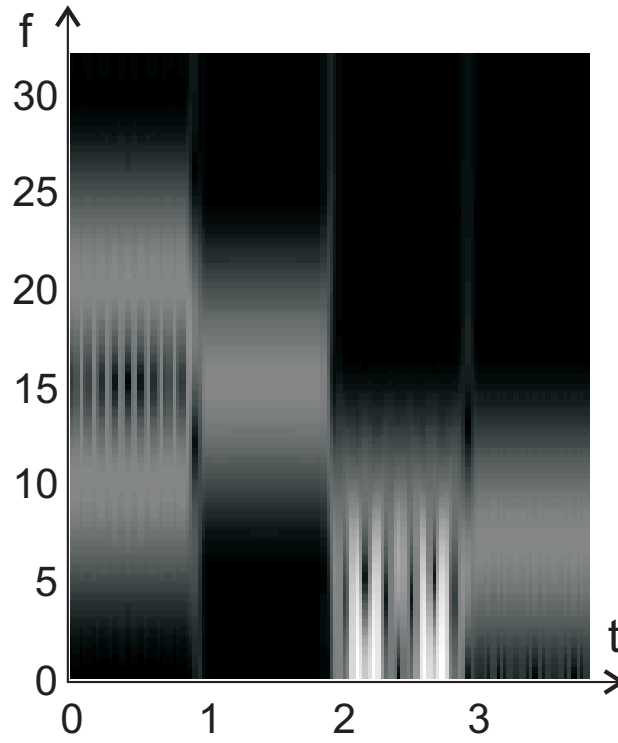
2)  $\sin(15t)$

3)  $\sin(t)+\sin(7t)$

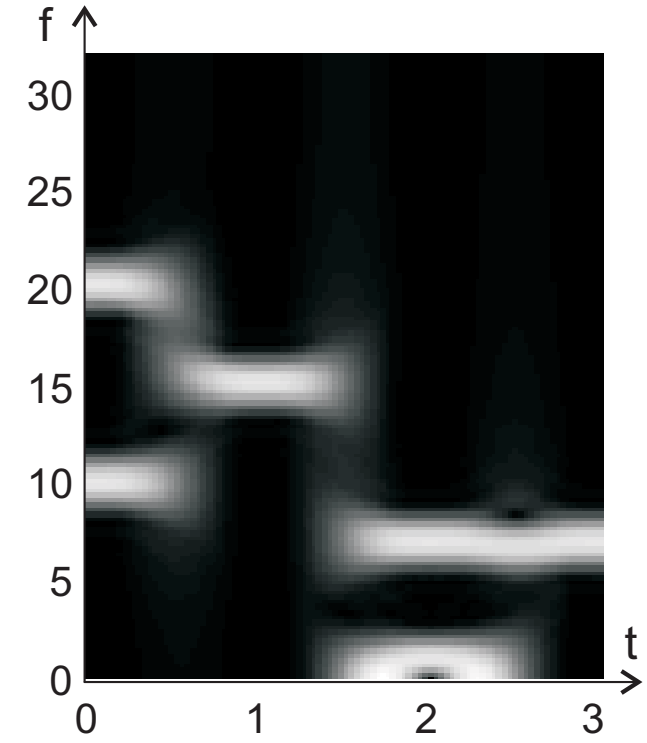
4)  $\sin(7t)$



a)



b)



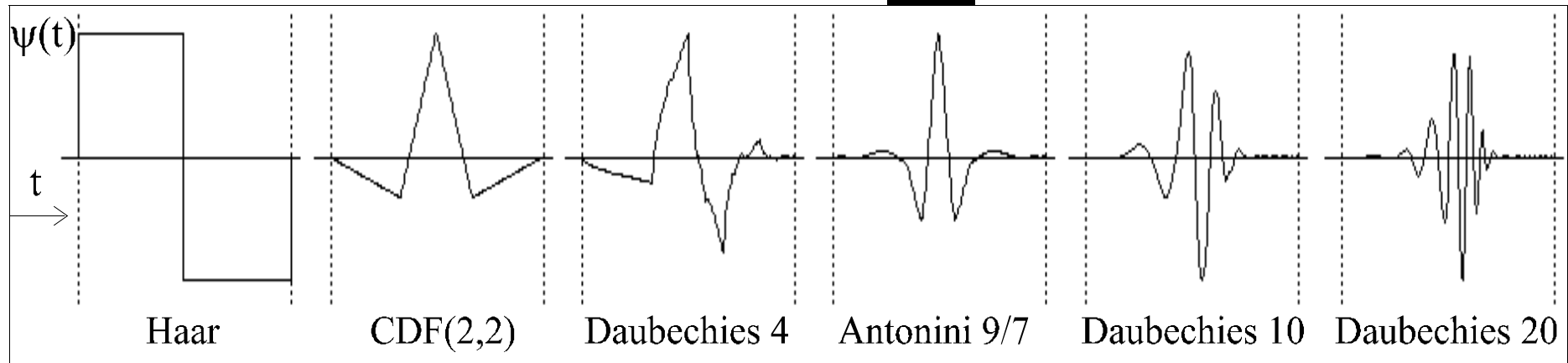
c)

Diskrétna aproximácia spektrogramov (signál  $s$  je navzorkovaný,  $f_{vz}=64\text{Hz}$ )

b) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti 12, prekryv okien 10

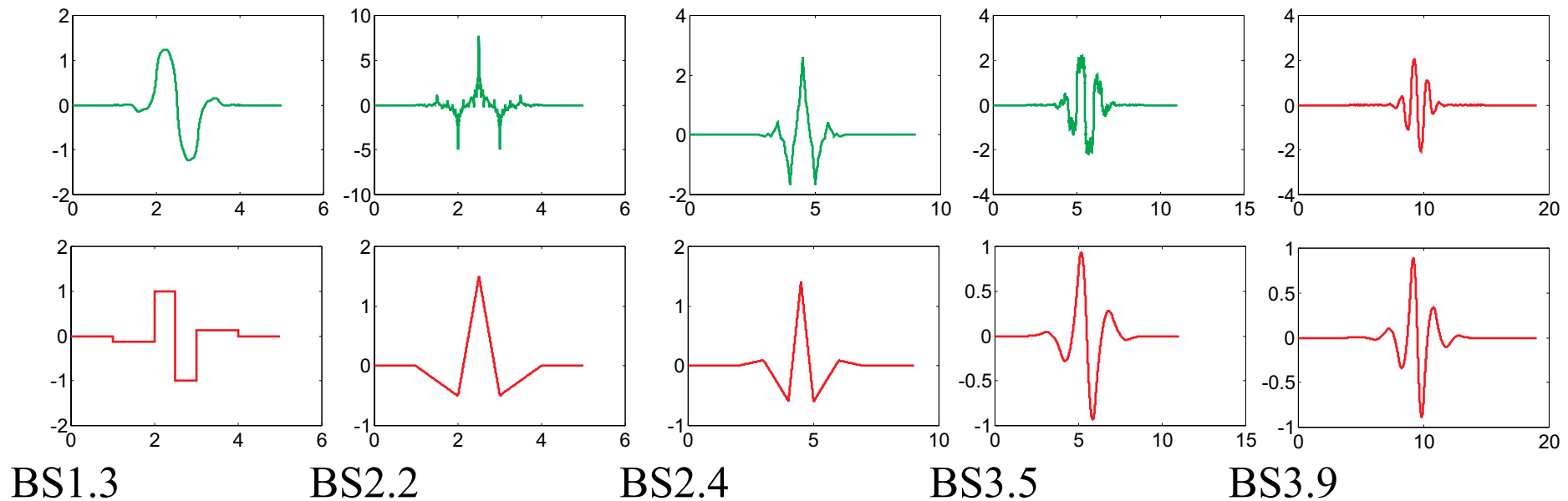
c) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti 60, prekryv okien 58

Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie (základného waveletu)  $\psi(t)$



*Príklady rôznych druhov základných waveletov*

Príklady základných biortogonálnych spline waveletov ( $\psi(t)$  zelené,  $\tilde{\psi}(t)$  červené)



- Aké podmienky musí spĺňať  $\psi(t)$  ? Uvidíme neskôr

*Spojité waveletová transformácia (SWT)* funkcie  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  je definovaná ako zobrazenie  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$  vzt'ahom

$$SWT_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$

Funkcie  $\psi_{a,b}(t)$  sú definované zo *základného waveletu*  $\psi(t)$  pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu*  $a, b$  nasledovne:

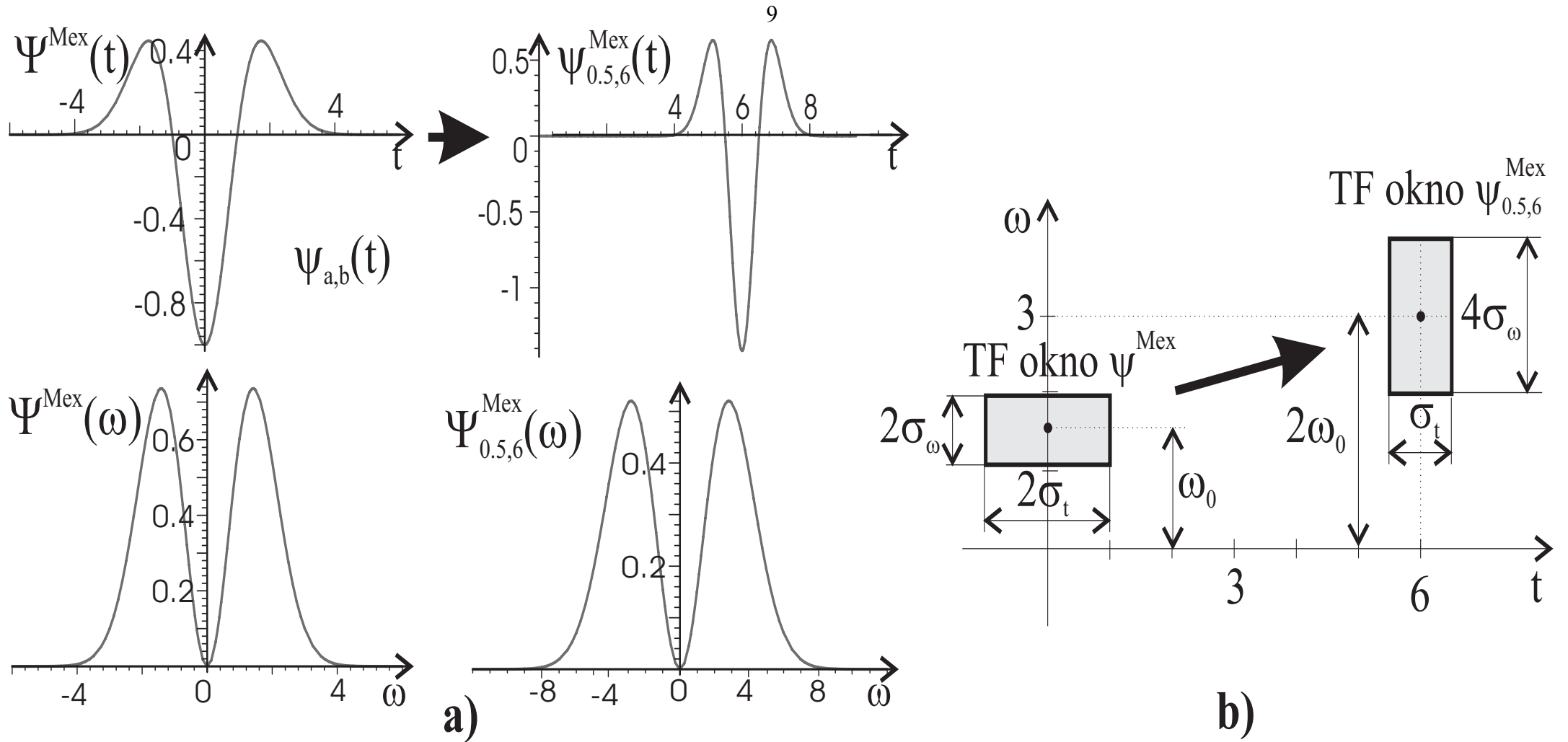
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

SWT v závislosti od parametra  $a$  poskytuje pružné časovo - frekvenčné rozlíšenie. Ak *časovo - frekvenčné okno*  $\psi(t)$  má rozmery  $\sigma_t, \sigma_\omega$  a stred v bode  $S = (t_0, \omega_0)$ , potom

$$\sigma_{ab_t} = a \sigma_t \quad \sigma_{ab_\omega} = \sigma_\omega / a \quad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0 / a)$$

T.j. obsah okna ostáva konštantne  $4\sigma_t \sigma_\omega$ .





Príklad zobrazenia základného waveletu a jeho zmenenej a posunutej verzie,  
 a) v čase a frekvencii b) v TF rovine

**Príklad:** Ak funkcia  $f(t)$  má nenulové hodnoty na intervale  $(t_0, t_1)$ , kde bude nenulová  $f[(t-b)/a]$  ?

**Riešenie:** Hľadáme taký interval  $(t_0^*, t_1^*)$ , ktorý sa daným prepisom zobrazí na  $(t_0, t_1)$ , t.j.:  
 $t_0 = (t_0^* - b)/a$  a  $t_1 = (t_1^* - b)/a$  z toho  $t_0^* = at_0 + b$ ,  $t_1^* = at_1 + b$ .  
Riešením je teda interval  $(at_0 + b, at_1 + b)$ .

SWT je *invertovateľná*, ak pre Fourierovu transformáciu  $\Psi(\omega)$  základného waveletu platí:

$$C_\psi = \int_0^\infty \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty \qquad \Psi(0) = \int_{-\infty}^\infty \psi(t) dt = 0$$

t.j.  $\Psi(\omega)$  má charakter pásmového priepustu. Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty SWT_f(a,b) \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

Pozn.1: Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t.j.  $\|\psi(t)\| = 1$ .

Pozn.2: Normalizácia  $1/\sqrt{a}$  pri výpočte  $\psi_{a,b}(t)$  z  $\psi(t)$  zabezpečuje  $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$ .

## Zovšeobecnenie

Pri SWT je možné použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu *rôzne základné wavelety*  $\tilde{\psi}(t)$  a  $\psi(t)$ :

$$f(t) = \frac{1}{C_{\tilde{\psi}, \psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_{a,b} \rangle \psi_{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

Invertovateľnosť je podmienená vzťahom pre výpočet  $C_{\tilde{\psi}, \psi}$  nasledovne:

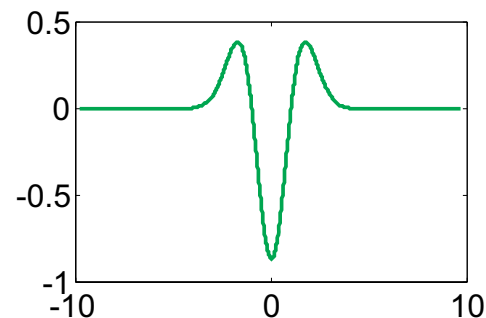
$$C_{\tilde{\psi}, \psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(\omega)| |\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

Táto podmienka je postačujúca, základné wavelety nemusia spĺňať žiadne iné podmienky.

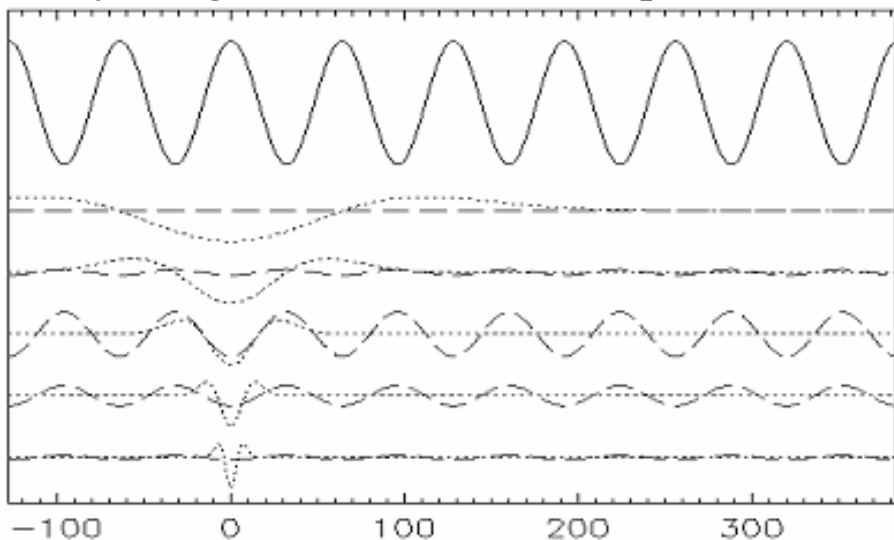
## Príklad

Wavelet "Mexický klobúk" (obrátená verzia)

$$\psi_{mex}(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

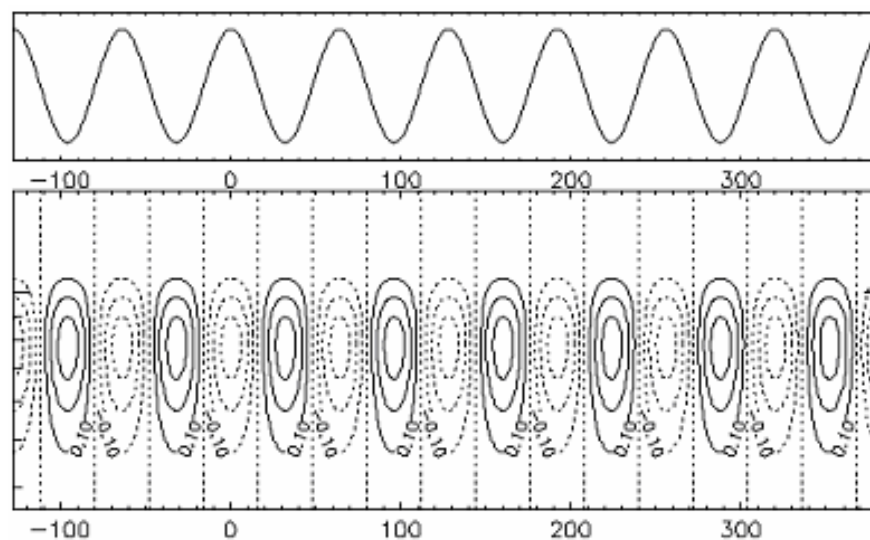


Analýza signálu  $f(t) = \cos(t/10)$  pomocou  $\psi_{mex}(t)$



a) Zhoda  $f(t)$  s  $\psi_{mex}(t)$  s meniacou sa mierkou

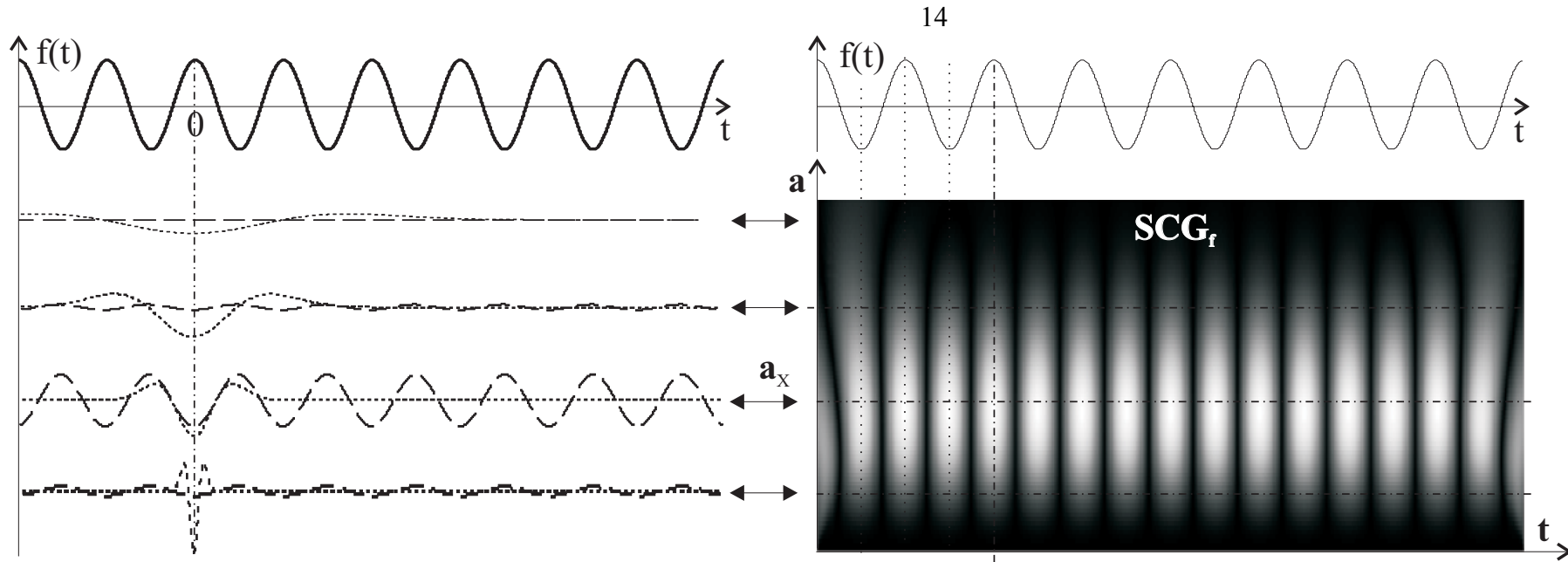
(výsledok znázornený bodkovane)



b) Znáznorená výsledná SWT

$$SWT(k, \tau) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{mex}[k(t - \tau)] dt$$

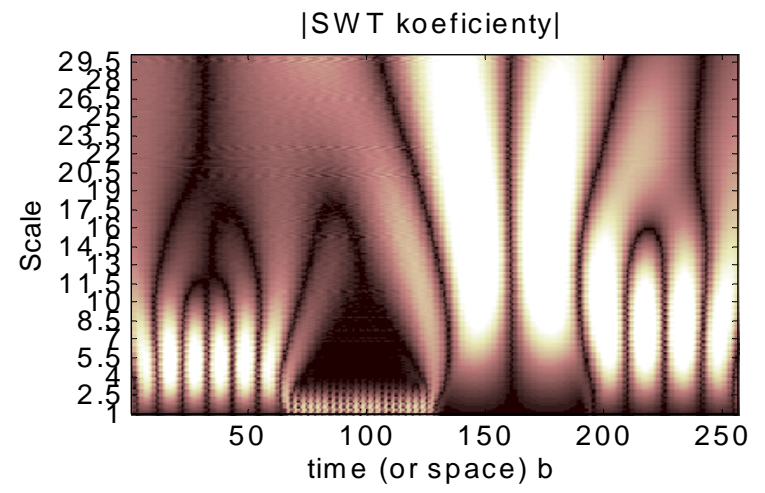
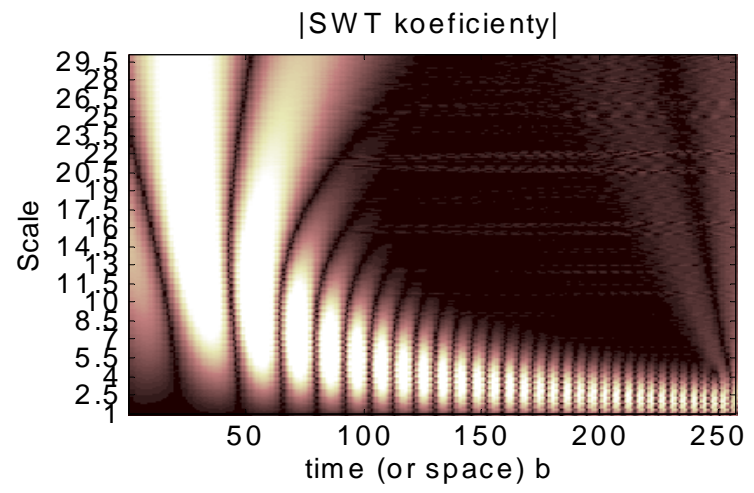
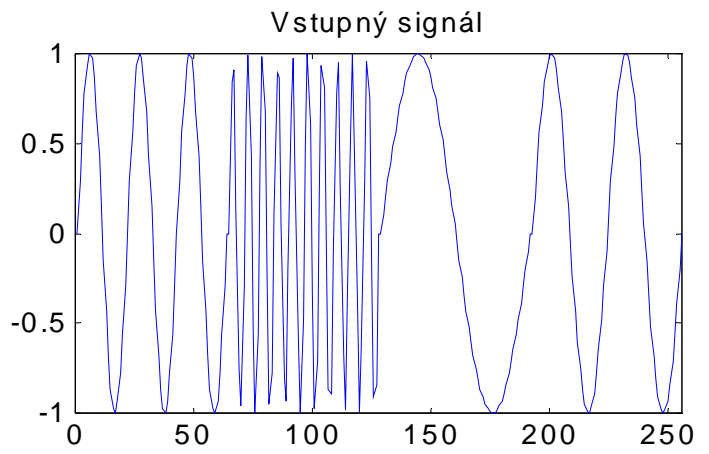
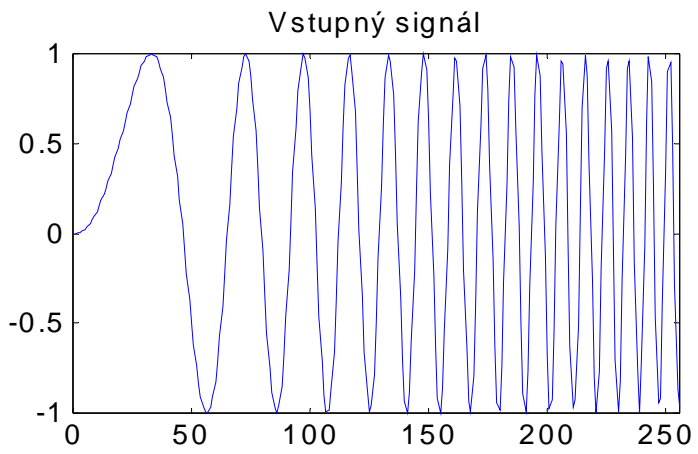
Ako štandardne znázorniť výsledky → škálogram (SCG)



Aký je vzťah medzi od spektrogramom a škálogramom ?

➔ Prepočet súradníc  $(t, a)$  na  $(t, \omega)$  je triviálny, treba si uvedomiť, že súradnici  $a = 1$  zodpoveda  $\omega_0$  t. j. stredná frekvencia základného waveletu.

Príklady škálogramov SWT, použitý wavelet:  $\psi_{mex}(t)$



a)  $f(t) = \sin(t^2)$

a)  $f(t)$  je kombináciou  $\sin(3t, 10t, 1t, 2t)$

# Vlastnosti SWT

## *Linearita:*

Vyplýva priamo z linearity skalárneho súčinu

## *Posun v čase:*

$$g(t) = f(t - b_0) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

## *Zmena mierky:*

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$



# Základné charakteristiky waveletov

- 1) *Existencia nosiča* na intervale vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Ak sú mimo neho funkčné hodnoty presne nulové, ovoríme, že na danom intervale  $\langle a, b \rangle$  *má kompaktný nosič*. Ak sú „približne“ nenulové, t.j. zanedbateľne malé hovoríme, že má *efektívny nosič*
- 2) *Počet nulových momentov*. *K-ty moment*  $\psi(t)$  definujeme ako  $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$ . Platí, že ak  $\psi(t)$  je  $K$  krát *diferencovateľná* a pre  $t \rightarrow \pm\infty$  klesá dostatočne rýchlo, potom prvých  $K-1$  momentov bude nulových. Potom ak  $f(t)$  je na nejakom intervale polynómom max.  $K-1$  stupňa, pre wavelety  $\psi_{a,b}(t)$  podporované v tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty  $SWT_f(a,b)$  nulové.
- 3) *Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje *mieru hladkosti funkcie*  $f(t)$ . Je to také maximálne číslo  $r$  pre ktoré platí  $|F(\omega)| \leq c / (1 + |\omega|^{r+1})$ ,  $\omega \in R$ . Potom  $f(t)$  je  $r-1$  krát spojite diferencovateľná,  $r$ -tá derivácia môže byť nespojitá.

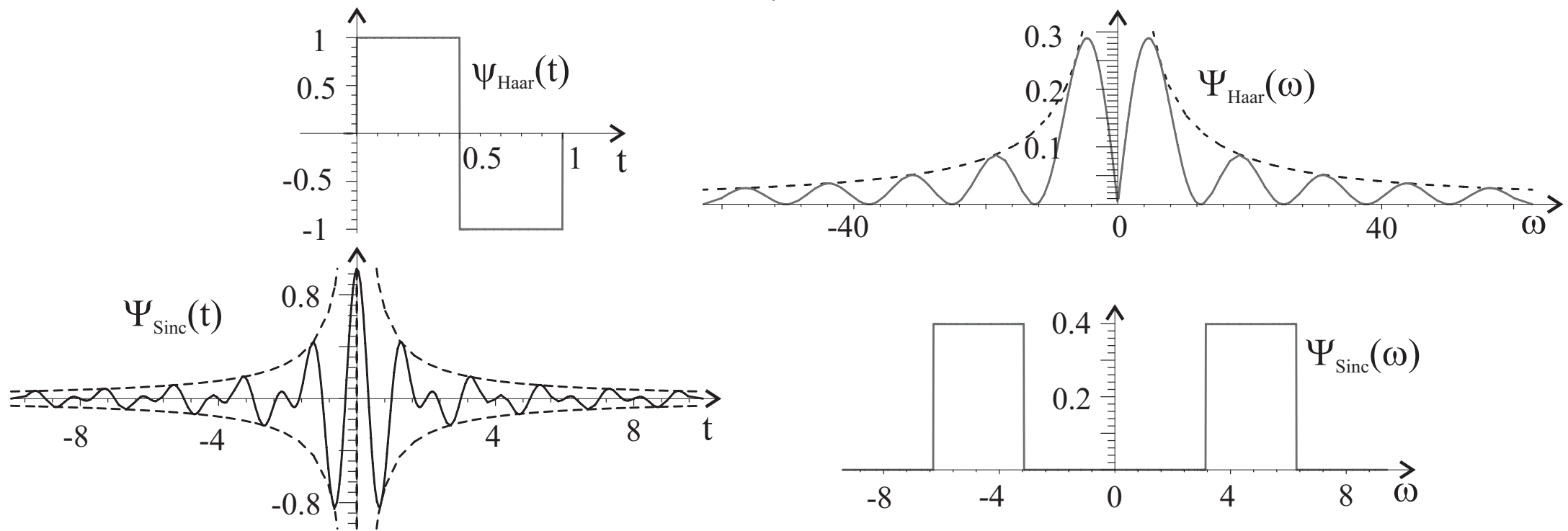
# Príklady waveletov

Haarov wavelet: 
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } 0 < t < 0.5 \\ -1 & \text{pre } 0.5 < t < 1 \\ 0 & \text{ináč} \end{cases} .$$

Sinc wavelet: 
$$\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t), \text{ kde } \varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Morletov wavelet: 
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega_0 t} e^{-t^2/2} .$$

Wavelet	Počet nulových momentov	Regularita r	Charakter resp. podpora v čase	Charakter resp. podpora vo frekvencii
Haar	1	0	$\langle 0, 1 \rangle$	$1/\omega$
Sinc	$\infty$	$\infty$	$1/t$	$\langle \pi, 2\pi \rangle$
Daubechies N	N	$\alpha(N)$	$\langle 0, 2N-1 \rangle$	$1/\omega^{\alpha(N)}$



Časové a frekvenčné priebehy triviálneho Haarovho a Sinc waveletu.