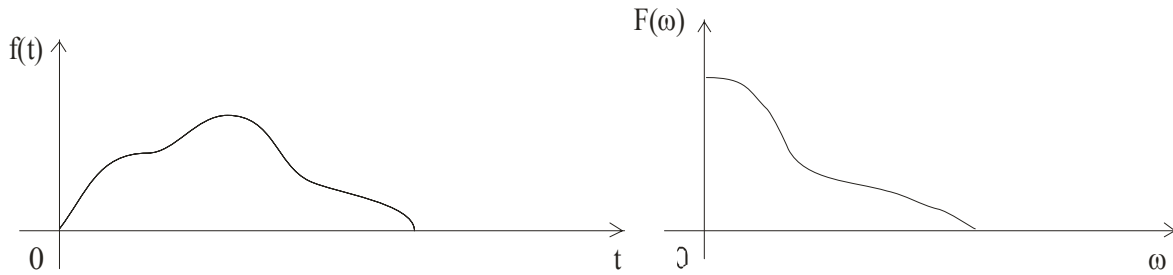


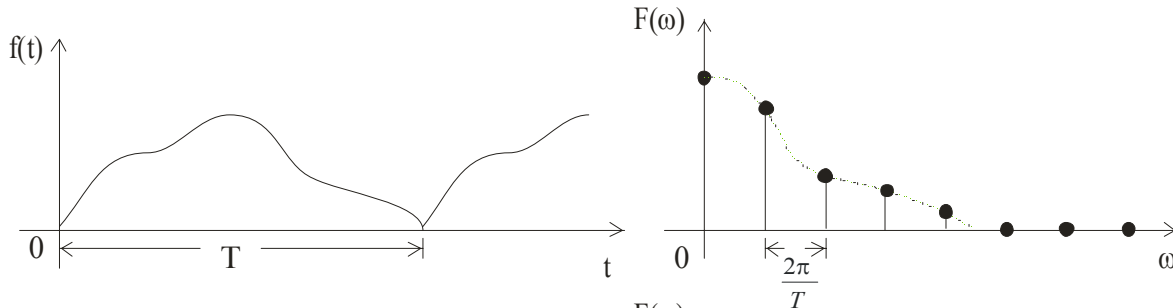
Fourierova transformácia a jej druhy



a) CTFT (Continuous Time Fourier Transform)

$$F(\omega) = \int_t f(t) e^{-j\omega t} dt$$

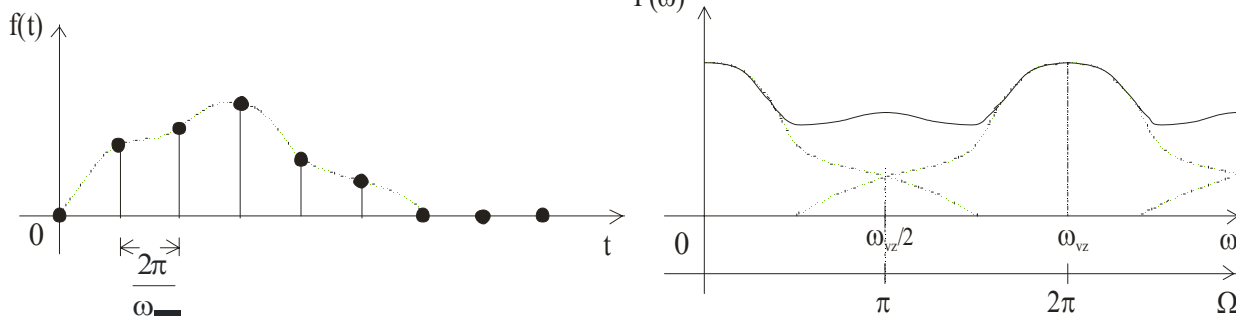
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



b) CTFS (Continuous Time Fourier Series)

$$F(k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

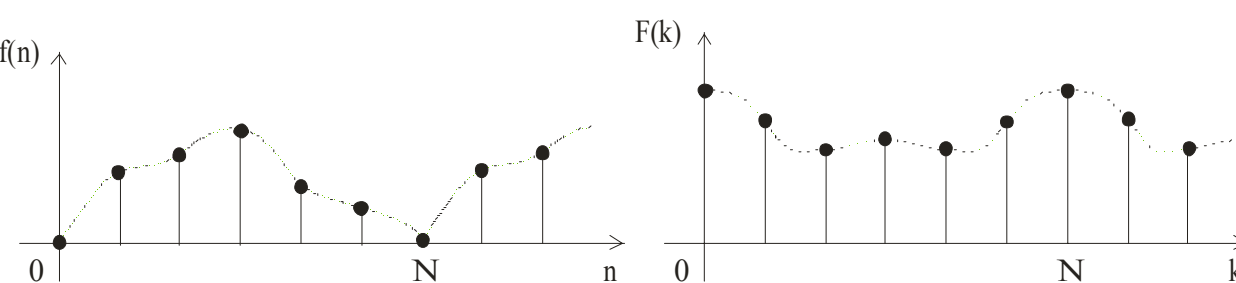
$$f(t) = \sum_k F(k) e^{j2\pi kt/T}$$



c) DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

$$F(\Omega) = \sum_n f(n) e^{-j\Omega n} \quad \Omega = 2\pi\omega / \omega_{vz}$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$



d) DTFS (Discrete Time Fourier Series)

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{-nk}$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W_N^{nk}$$

$$W_N = e^{j2\pi/N}$$

Reprezentácia signálu v čase a frekvencii

Pri analýze a reprezentácii signálov je častokrát výhodné použiť transformáciu, ktorá reprezentuje signál súčasne v čase aj frekvencii.

- Riešenie vo forme oknovej *STFT (Short Time Fourier Transform)*, Gábor (1946), posúva okno fixnej veľkosti pozdĺž signálu a extrahuje frekvenčný obsah v danom intervale

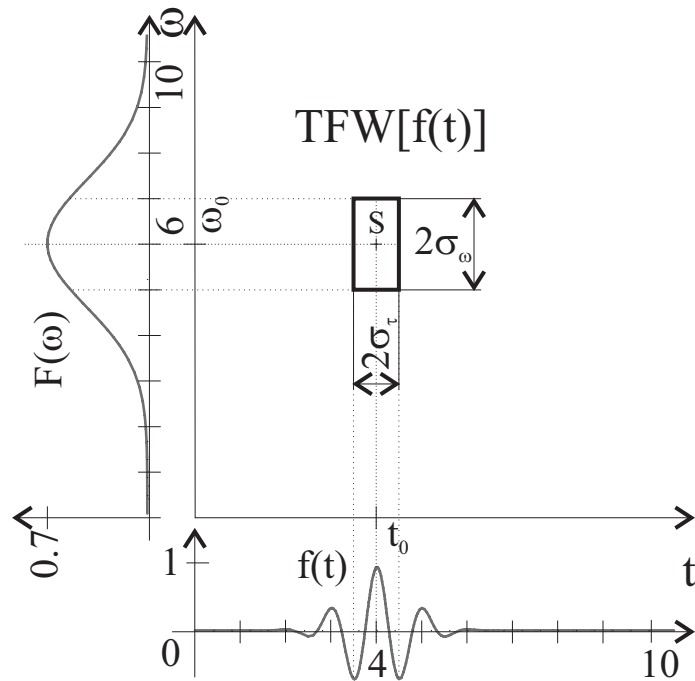
$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = \langle f(t)g(t - \tau), e^{j\omega t} \rangle$$

,kde $g(t)$ je *oknová funkcia* a $f(t)$ vstupná funkcia. Ak oknová funkcia je gaussovská funkcia, tak STFT sa volá *Gáborova transformácia*.

Pre STFT platí:

- Bázové funkcie sú generované *moduláciou* a *posunom* oknovej (prototypovej) funkcie $g(t)$.
- STFT má pre danú oknovú funkciu *pevné rozlíšenie vo frekvencii*.
- Nadbytočnosť STFT môžeme odstrániť vzorkovaním

Každý signál môže byť znázornený v *časovo-frekvenčnej rovine (TF rovina)*, ktorá charakterizuje rozdelenie napr. energie signálu v čase a frekvencii:



$$x(t) = e^{-(t-4)^2} \cos(6(t-4))$$

Rozlíšenie v čase a frekvencii pre danú funkciu $x(t)$ a jej fourierovu transformáciu $X(\omega)$ je dané *časovo – frekvenčným oknom (TF okno)*. Jeho stred je v bode $S = (t_0, \omega_0)$, a veľkosti strán sú $2\sigma_t, 2\sigma_\omega$. (ω_0 sa nazýva stredná frekvencia signálu). Zobrazuje sa v tzv. *TF rovine*.

Platí:

$$t_0 = \|x(t)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt \quad \omega_0 = \|X(\omega)\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega \quad (1.\text{moment})$$

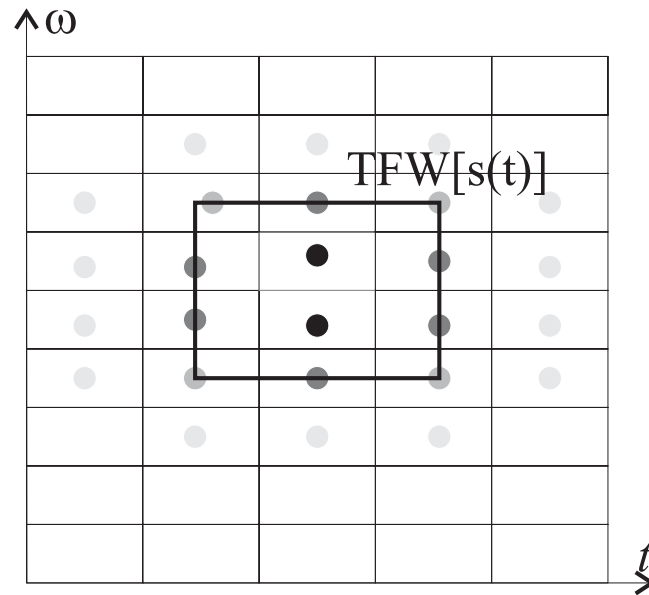
$$\sigma_t^2 = \|x(t)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |x(t)|^2 dt \quad \sigma_\omega^2 = \|X(\omega)\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.\text{moment})$$

Rôzne τ, ω pri STFT zodpovedajú posunom základného TF okna v čase a frekvencii

→ TF okno nám hovorí o tom aké drobné detaily sme schopní v signále sledovať.

→ Hranice okna sú definované “štatisticky”, t.j. neznamená to, že mimo okna má signal nulové hodnoty

TF okno signálu a jeho význam pri určovaní hodnôt signálu v čase a frekvencii

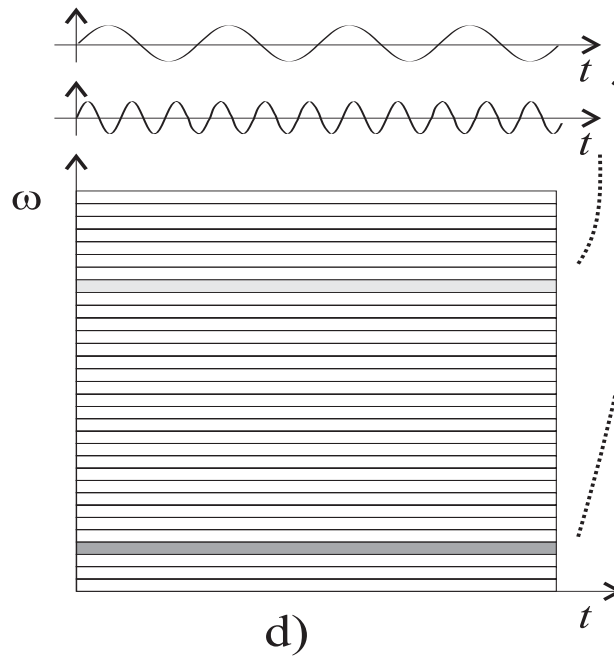
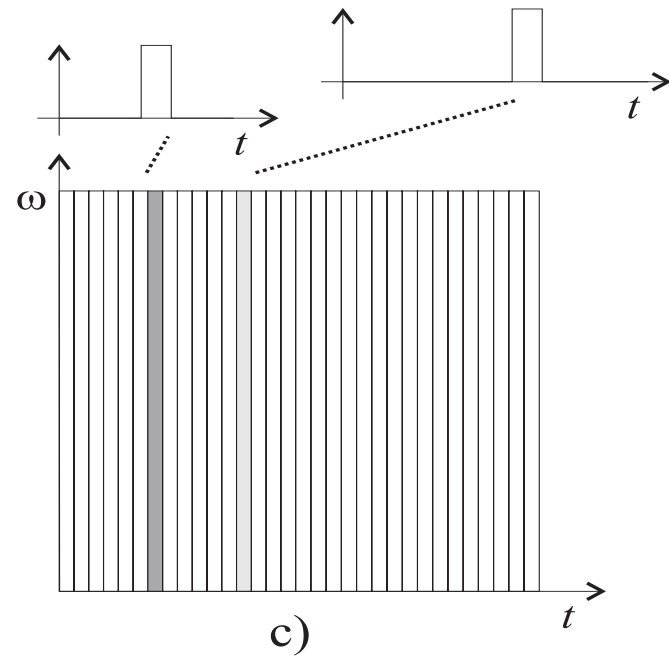
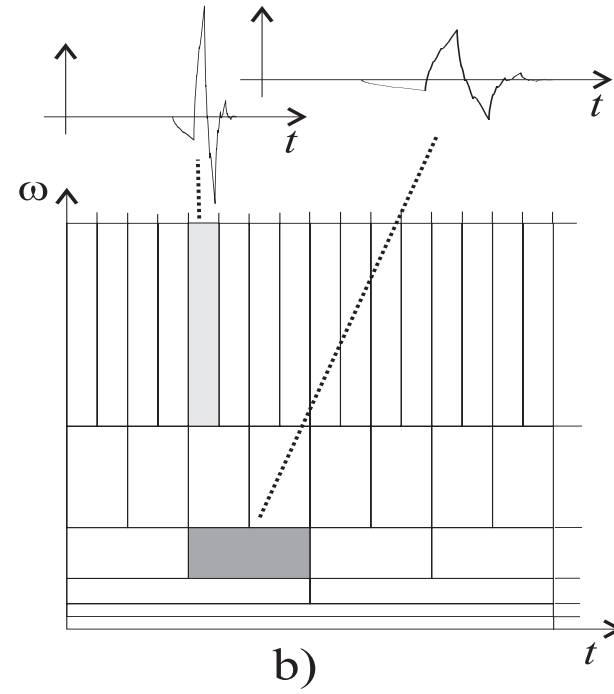
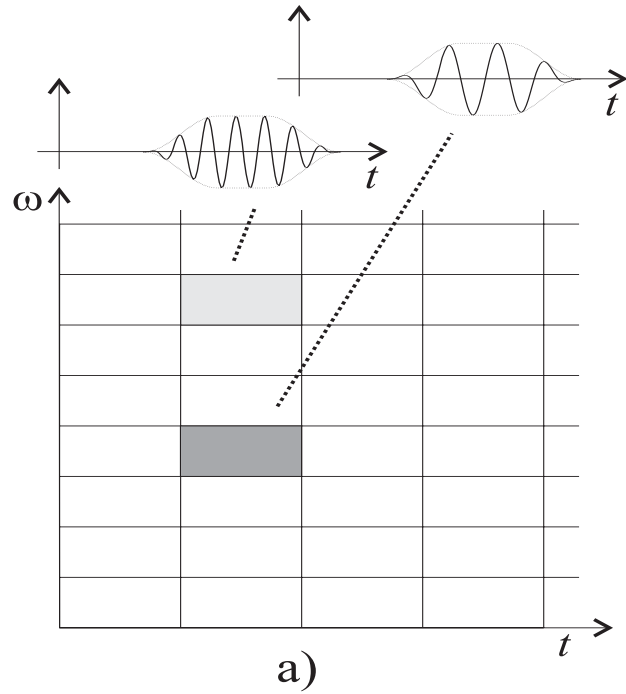


Princíp neurčitosti:

Pre $x(t)$ idúce k nule rýchlejšie ako $1/\sqrt{t}$ ak $t \rightarrow \pm\infty$ platí:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4$$

Najznámejšie príklady delenia TF roviny pri reprezentácii signálov (znázornené schématicky)



Spektrogram (SPG) signálu = pohľad na TF rovinu so zobrazenými magnitudami spektrálnych koeficientov STFT(!) v strede TF okien odpovedajúcich bázových funkcií

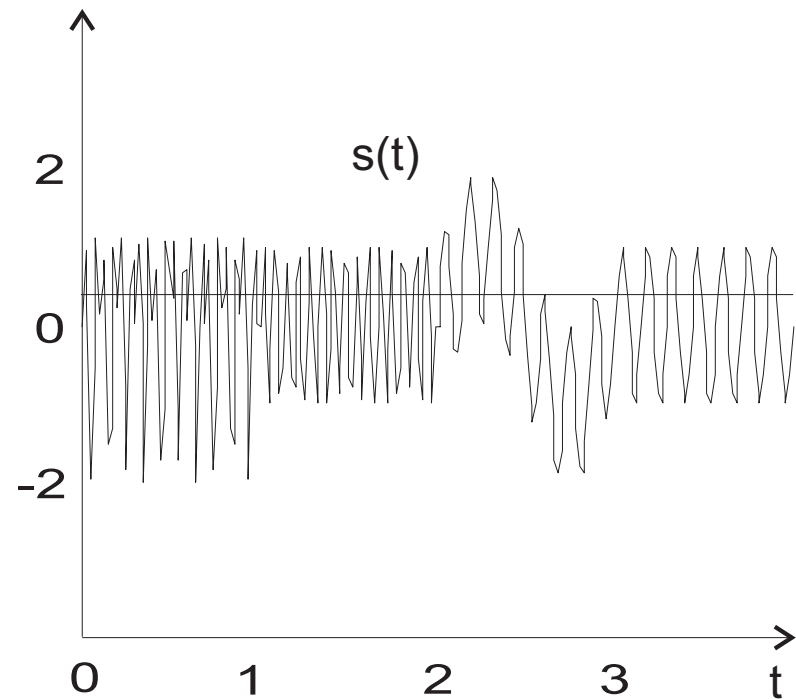
a) Signál zložený zo 4 častí

1) $2\sin(5t)\sin(15t)$

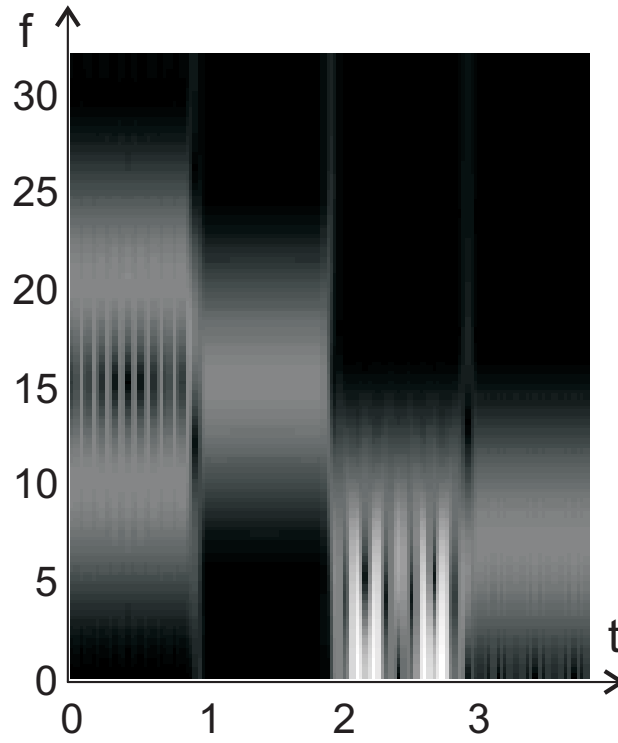
2) $\sin(15t)$

3) $\sin(t)+\sin(7t)$

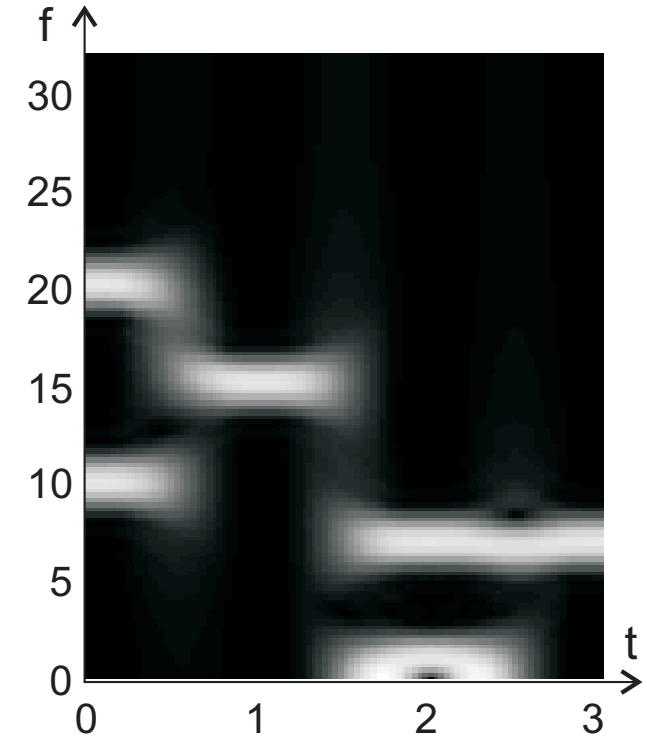
4) $\sin(7t)$



a)



b)



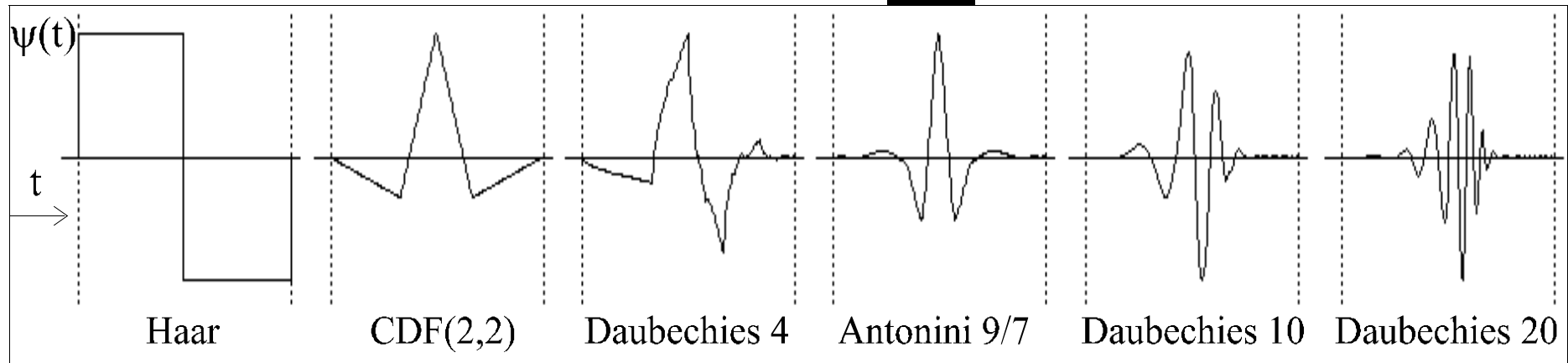
c)

Diskrétna aproximácia spektrogramov (signál s je navzorkovaný, $f_{vz}=64\text{Hz}$)

b) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti 12, prekryv okien 10

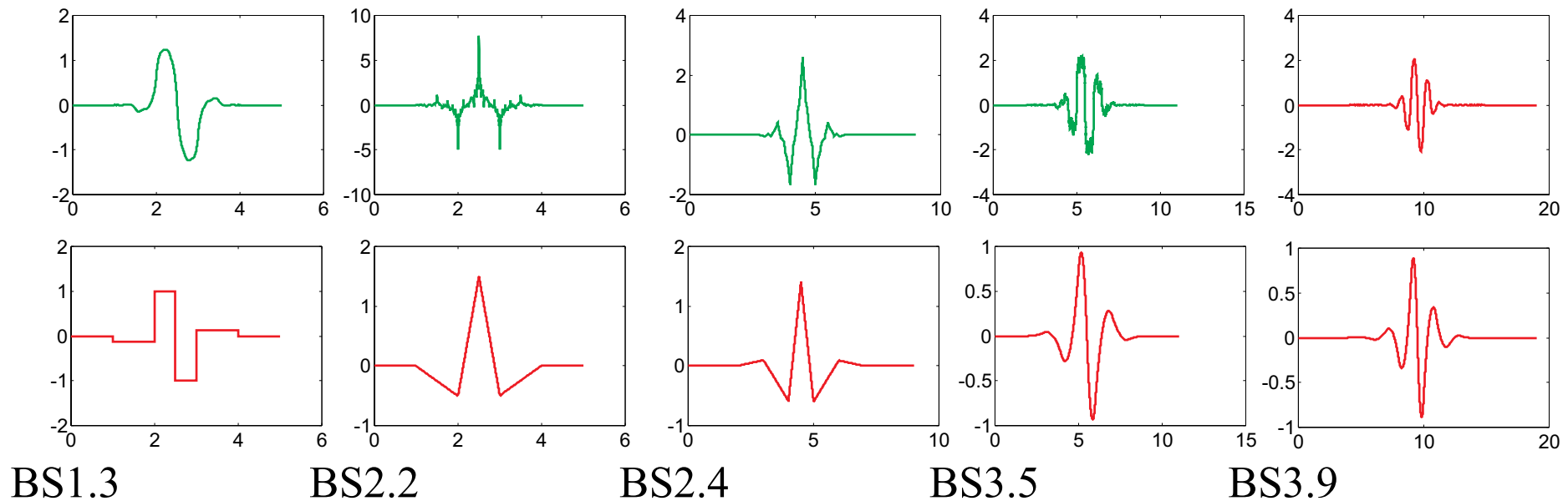
c) spektrogram signálu a): Hanningovo okno veľkosti 60, prekryv okien 58

Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie (základného waveletu) $\psi(t)$



Príklady rôznych druhov základných waveletov

Príklady základných biortogonálnych spline waveletov ($\psi(t)$ zelené, $\tilde{\psi}(t)$ červené)



- Aké podmienky musí spĺňať $\psi(t)$? Uvidíme neskôr

Spojité waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ vzt'ahom

$$SWT_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$

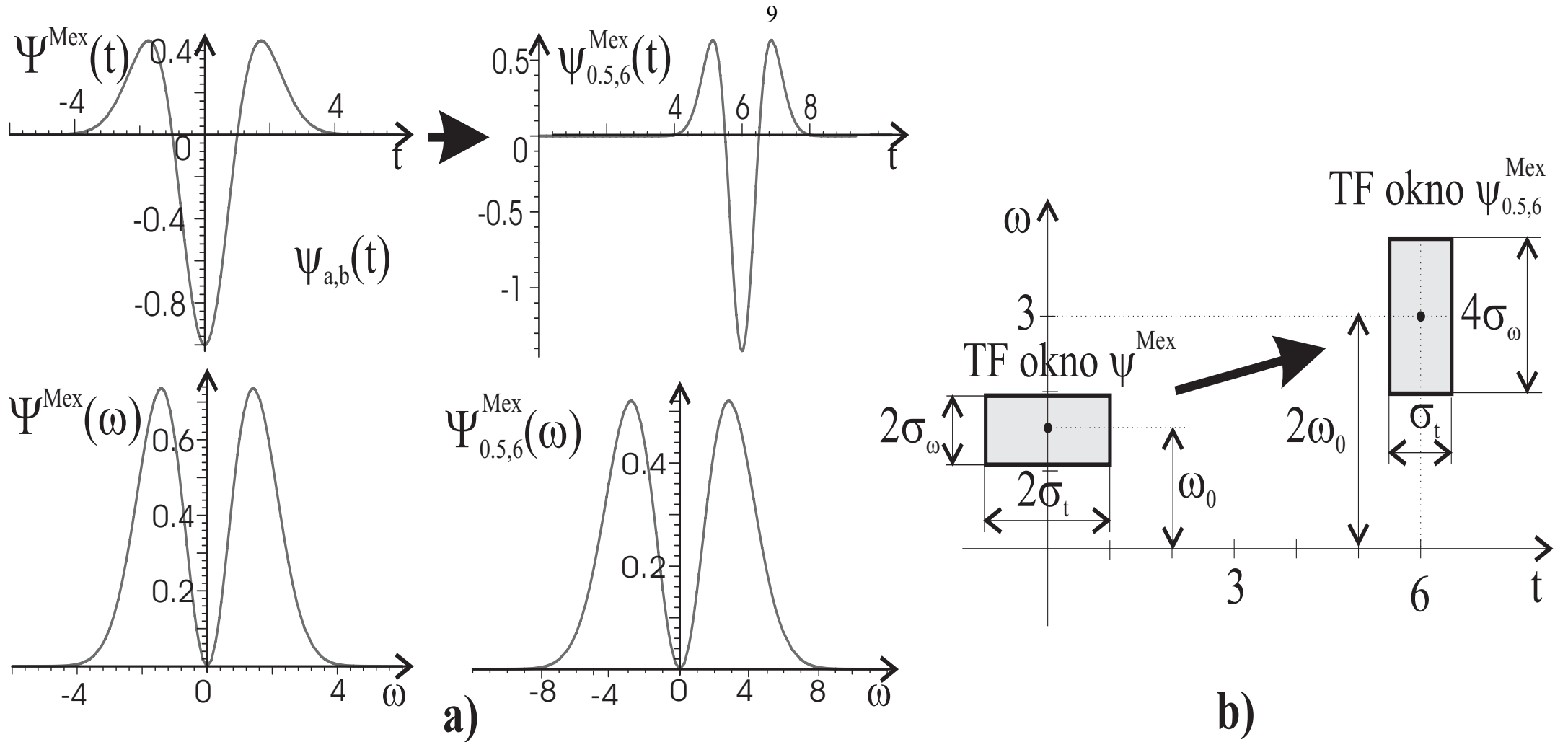
Funkcie $\psi_{a,b}(t)$ sú definované zo *základného waveletu* $\psi(t)$ pomocou parametrov *zmeny mierky* a *posunu* a, b nasledovne:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

SWT v závislosti od parametra a poskytuje pružné časovo - frekvenčné rozlíšenie. Ak *časovo - frekvenčné okno* $\psi(t)$ má rozmery σ_t, σ_ω a stred v bode $S = (t_0, \omega_0)$, potom

$$\sigma_{ab_t} = a \sigma_t \quad \sigma_{ab_\omega} = \sigma_\omega / a \quad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0 / a)$$

T.j. obsah okna ostáva konštantne $4\sigma_t \sigma_\omega$.



Príklad zobrazenia základného waveletu a jeho zmenenej a posunutej verzie,
 a) v čase a frekvencii b) v TF rovine

Príklad: Ak funkcia $f(t)$ má nenulové hodnoty na intervale (t_0, t_1) , kde bude nenulová $f[(t-b)/a]$?

Riešenie: Hľadáme taký interval (t_0^*, t_1^*) , ktorý sa daným prepisom zobrazí na (t_0, t_1) , t.j.:
 $t_0 = (t_0^* - b)/a$ a $t_1 = (t_1^* - b)/a$ z toho $t_0^* = at_0 + b$, $t_1^* = at_1 + b$.
Riešením je teda interval $(at_0 + b, at_1 + b)$.

SWT je *invertovateľná*, ak pre Fourierovu transformáciu $\Psi(\omega)$ základného waveletu platí tzv. *podmienka prípustnosti*:

$$C_\psi = \int_0^\infty \left| \frac{\Psi(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega < \infty$$

Wavelet je potom *prípustný* a platí

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

t.j. $\Psi(\omega)$ má charakter *pásmového priepustu*.

Potom existuje inverzná SWT v tvare:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} SWT_f(a, b) \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

Pozn.1: Základné wavelety majú zvyčajne jednotkovú energiu, t.j. $\|\psi(t)\| = 1$.

Pozn.2: Normalizácia $1/\sqrt{a}$ pri výpočte $\psi_{a,b}(t)$ z $\psi(t)$ zabezpečuje $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$.

Zovšeobecnenie

Pri SWT je možné použiť pri rozklade a rekonštrukcii signálu *rôzne základné wavelety* $\tilde{\psi}(t)$ a $\psi(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\tilde{\psi}, \psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_{a,b} \rangle \psi_{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

Invertovateľnosť je podmienená vzťahom pre výpočet $C_{\tilde{\psi}, \psi}$ nasledovne:

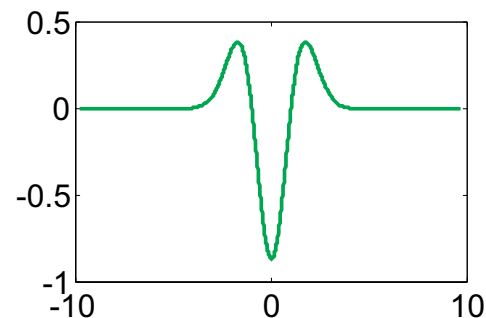
$$C_{\tilde{\psi}, \psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(\omega)| |\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty$$

Táto podmienka je postačujúca, základné wavelety nemusia spĺňať žiadne iné podmienky.

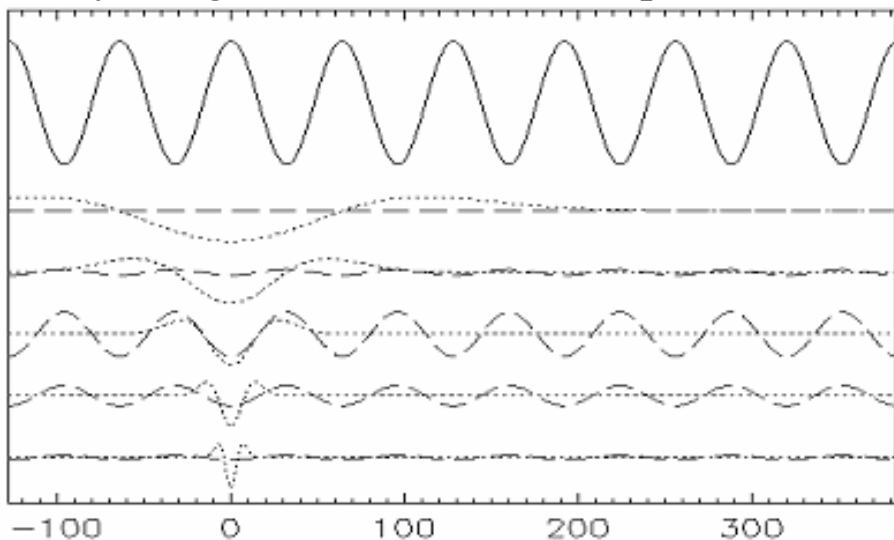
Príklad

Wavelet "Mexický klobúk" (obrátená verzia)

$$\psi_{mex}(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

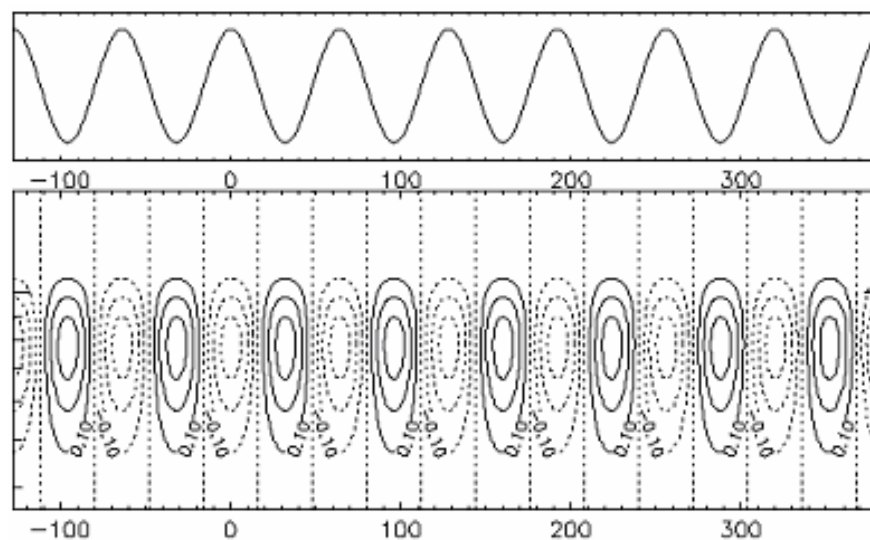


Analýza signálu $f(t) = \cos(t/10)$ pomocou $\psi_{mex}(t)$



a) Zhoda $f(t)$ s $\psi_{mex}(t)$ s meniacou sa mierkou

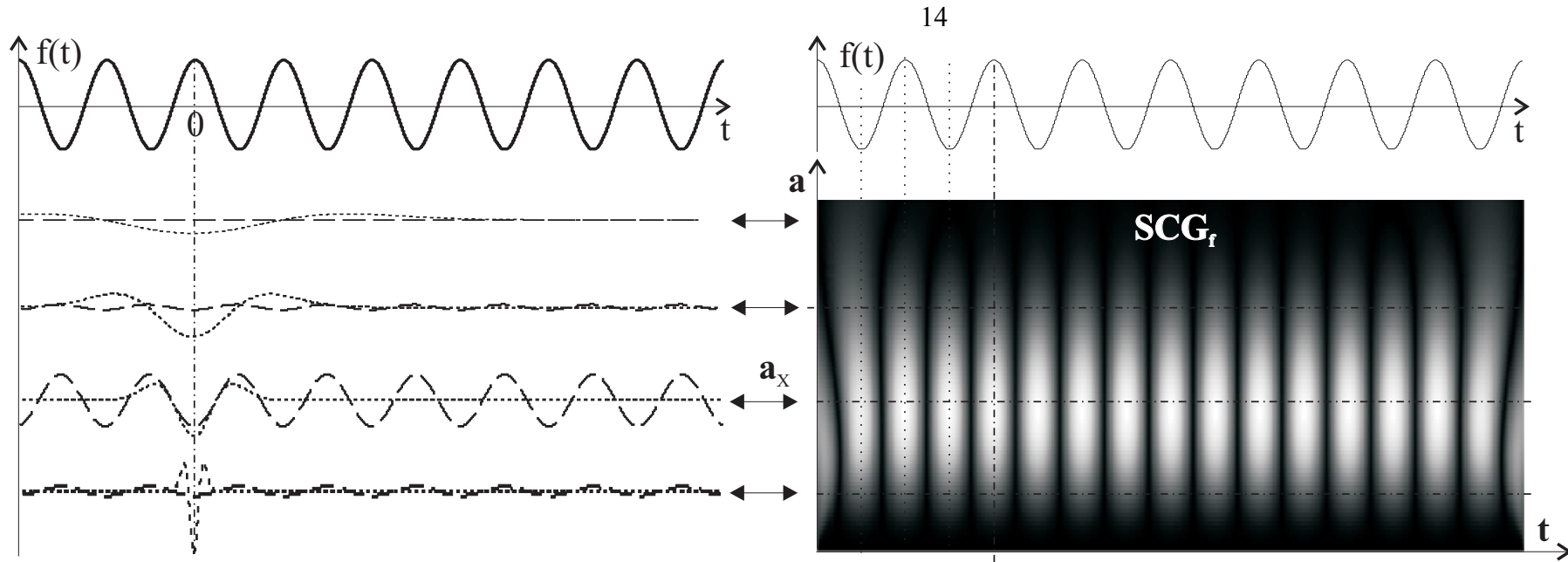
(výsledok znázornený bodkovane)



b) Znáznorená výsledná SWT

$$SWT(k, \tau) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{mex}[k(t - \tau)] dt$$

Ako štandardne znázorniť výsledky → škálogram (SCG)

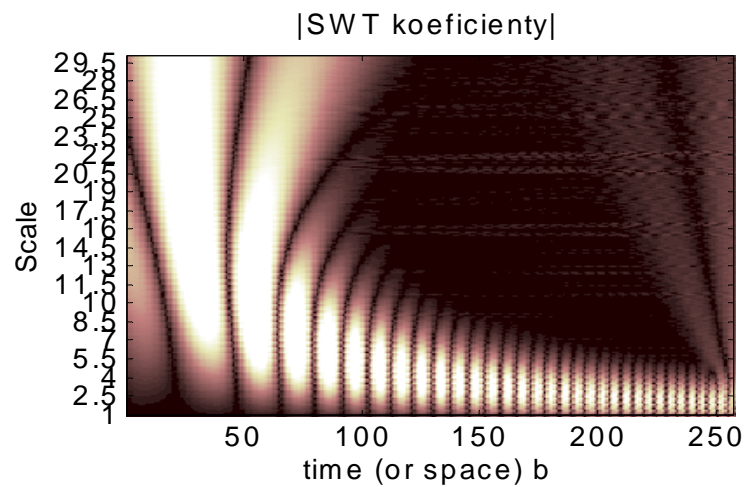
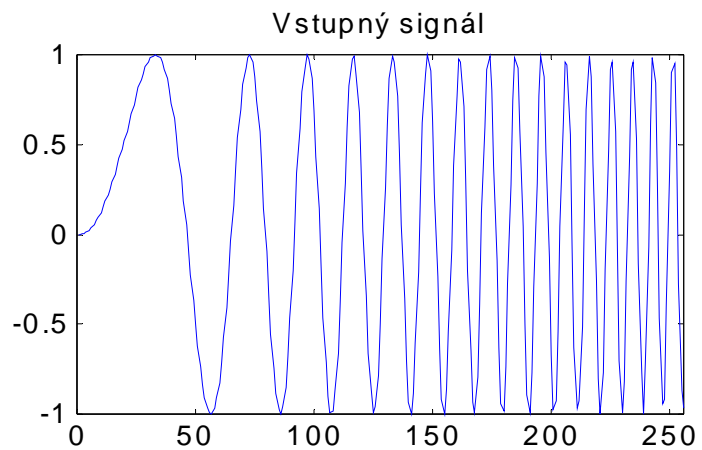


Aký je vzťah medzi od spektrogramom a škálogramom ?

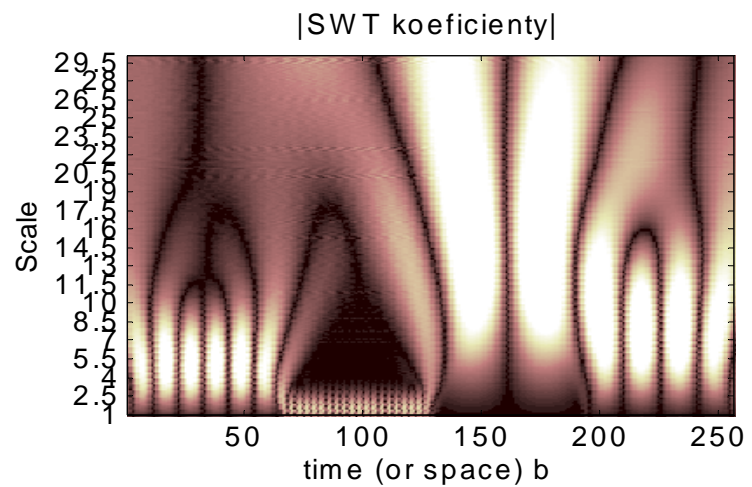
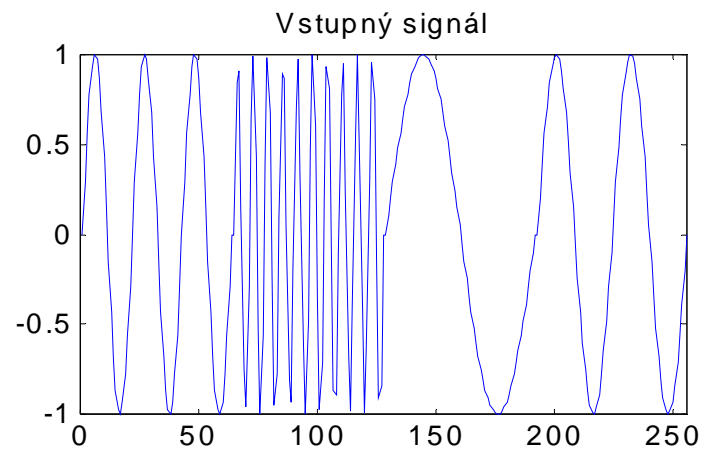
TF(timefrequency) rovina \rightarrow TS(time-scale) rovina

\rightarrow Prepočet súradníc (t, a) na (t, ω) je triviálny, treba si uvedomiť, že súradnici $a = 1$ zodpoveda ω_0 t. j. stredná frekvencia základného waveletu.

Príklady škálogramov SWT, použitý wavelet: $\psi_{mex}(t)$



a) $f(t) = \sin(t^2)$



a) $f(t)$ je kombináciou $\sin(3t, 10t, 1t, 2t)$

Vlastnosti SWT

Linearita:

Vyplývá priamo z linearity skalárneho súčinu

Posun v čase:

$$g(t) = f(t - b_0) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

Zmena mierky:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

Základné charakteristiky waveletov

- 1) *Existencia nosiča* na intervale vypovedá o tom, že funkcia (wavelet) má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Ak sú mimo neho funkčné hodnoty presne nulové, ovoríme, že na danom intervale $\langle a, b \rangle$ *má kompaktný nosič*. Ak sú „približne“ nenulové, t.j. zanedbateľne malé hovoríme, že má *efektívny nosič*
- 2) *Počet nulových momentov*. *K-ty moment* $\psi(t)$ definujeme ako $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$. Platí, že ak $\psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t \rightarrow \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých $K-1$ momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. $K-1$ stupňa, pre wavelety $\psi_{a,b}(t)$ podporované v tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a,b)$ nulové.
- 3) *Regularita* (Daubechies 1988) poskytuje *mieru hladkosti funkcie* $f(t)$. Je to také maximálne číslo r pre ktoré platí $|F(\omega)| \leq c / (1 + |\omega|^{r+1})$, $\omega \in R$. Potom $f(t)$ je $r-1$ krát spojite diferencovateľná, r -tá derivácia môže byť nespojitá.

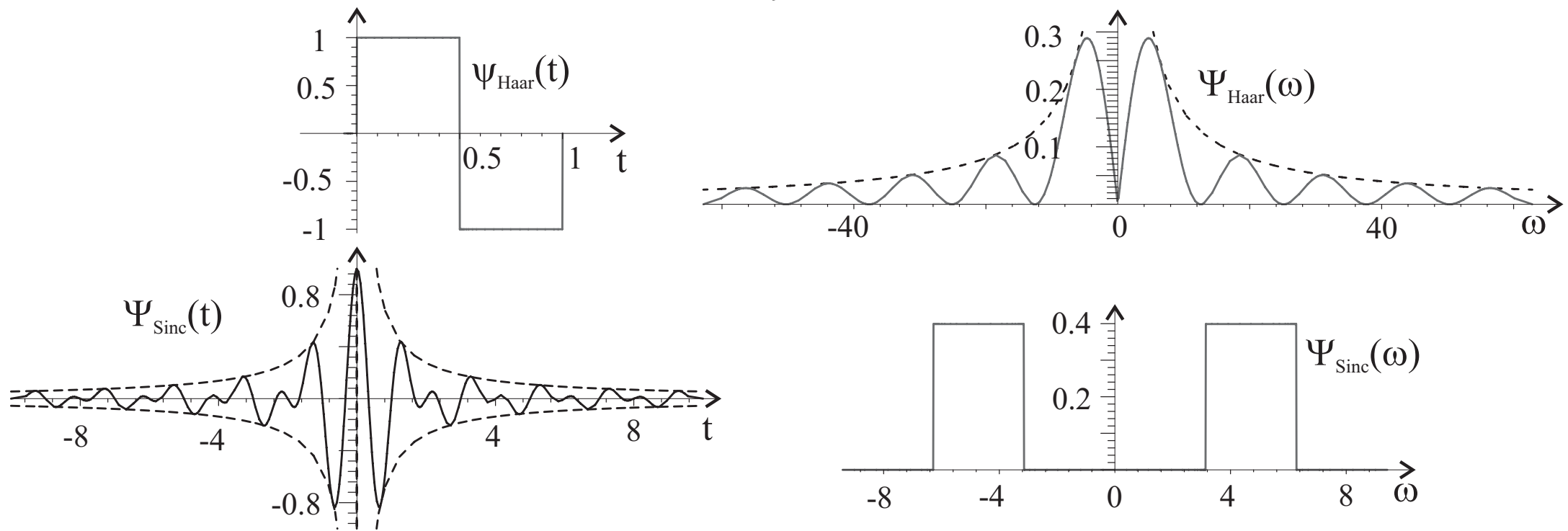
Príklady waveletov

Haarov wavelet:
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } 0 < t < 0.5 \\ -1 & \text{pre } 0.5 < t < 1 \\ 0 & \text{ináč} \end{cases} .$$

Sinc wavelet:
$$\psi(t) = 2\varphi(2t) - \varphi(t), \text{ kde } \varphi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Morletov wavelet:
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega_0 t} e^{-t^2/2} .$$

Wavelet	Počet nulových momentov	Regularita r	Charakter resp. podpora v čase	Charakter resp. podpora vo frekvencii
Haar	1	0	$\langle 0, 1 \rangle$	$1/\omega$
Sinc	∞	∞	$1/t$	$\langle \pi, 2\pi \rangle$
Daubechies N	N	$\alpha(N)$	$\langle 0, 2N-1 \rangle$	$1/\omega^{\alpha(N)}$



Časové a frekvenčné priebehy triviálneho Haarovho a Sinc waveletu.