- Co su jej spektralne faktory a ake maju vlastnosti, co je to minimalna faza ?

Predpokladajme, že pre dané $P(z)$ hľadáme vyhovujúce $H(z)$. Také $H(z)$ nazývame *spektrálny faktor* $P(z)$ a metódu jeho získania *spektrálnou faktorizáciou*. Spektrálne faktory nie sú jedinečné a získame ich priradením vždy iba jednej nuly z dvojíc núl (2.21) do $H(z)$. Prepíšme $P(z)$ do tvaru[13]:

$$P(z) = \alpha \prod_{k=1}^{N_a} \left(\left(1 - z_{k_a} z^{-1}\right) \left(1 - z_{k_a}^{*} z\right) \right) \prod_{k=1}^{N_b} \left(\left(1 - z_{k_b} z^{-1}\right) \left(1 - z_{k_b}^{*} z\right) \right) \tag{2.22}$$

kde N_a je počet párov núl **na** jednotkovej kružnici(platí $|z_{a_k}| = 1$) a N_b je počet párov núl **mimo** jednotkovej kružnice (platí $|z_{b_k}| < 1$). Do $H(z)$ priradíme po jednej nule z každého z uvedených párov.

Možné výsledné $H(z)$ majú rovnakú magnitúdovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je riešenie s *minimálnou fázou*[8], kde pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly **v** a **na** jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{k=1}^{N_a} \left(1 - z_{a_k} z^{-1}\right) \prod_{k=1}^{N_b} \left(1 - z_{b_k} z^{-1}\right) \tag{2.23}$$

Aby koeficienty $h(n)$ boli reálne, musia sa vybrané nuly vyskytovať v komplexne združených pároch. Táto podmienka je pri návrhu ortogonálnych waveletových systémov zahrnutá vo Vete 2.1, t.j. v tvare vstupného polynómu na faktorizáciu.

-

- Ake su vseobecne pravidla pri spektralnej faktorizacii ?(realne filtre, lin faza, ortogonalne riesnie)

Predpokladajme všeobecné riešenie spektrálnej faktorizácie $P(z)$ v tvare:

$$P(z) = \tilde{H}(z)\, H(z) \tag{3.61}$$

Nulové body $P(z)$ označme z_k. Potom platia nasledovné pravidlá pre vytváranie spektrálnych faktorov [14]:

1. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie reálnych filtrov musíme z_k a z_k^* použiť v pároch
2. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *lineárnou fázou* musíme z_k a $1/z_k$ použiť v pároch
3. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť ortogonálne wavelety, musíme z_k a $1/z_k$ použiť oddelene.

Vidíme, že pravidlá 2 a 3 sa navzájom vylučujú, okrem jediného prieniku:

Symetrický ortogonálny KIO filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí:

$$H(z) = \left(1 + z^{-N}\right) \Big/ \sqrt{2} \qquad N \text{ je nepárne} \tag{3.62}$$

- <u>**Ako by ste navrhli biortogonalne wavelety pomocou spekt. Faktorizacie?**</u>

Pri návrhu biortogonálnych spline(CDF) waveletov faktorizujeme $P(z)$ tak, aby jeden faktor obsahoval iba nuly v $z = -1$ a nič iné, t.j. aby bol maximálne K-regulárny:

$$H(z) = H_{S_M}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + z^{-1}}{2} \right)^{M/2+1} \left(\frac{1 + z}{2} \right)^{M/2} \tag{3.63}$$

DWT v maticovom tvare.

- Struktura a rozmery transformacnych matic pre analyzu a syntezu v ortogonalnom a biortogonalnom pripade

$$\begin{pmatrix} C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_m \\ G_m \end{pmatrix} C_m \qquad C_m = \begin{pmatrix} H_m^T & G_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{pmatrix}$$

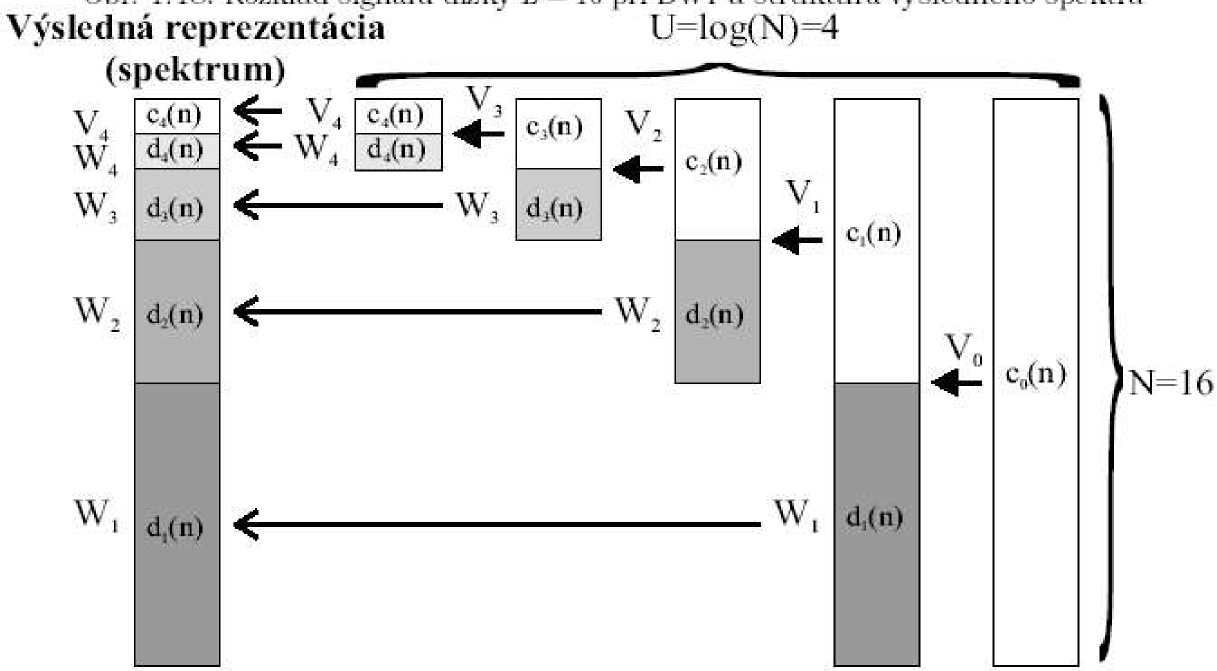
,kde C_m resp. D_m sú stĺpcové vektory (matice) :

$$C_m = \left(c_m(0), c_m(1), \ldots, c_m(N_m - 1)\right)^T$$

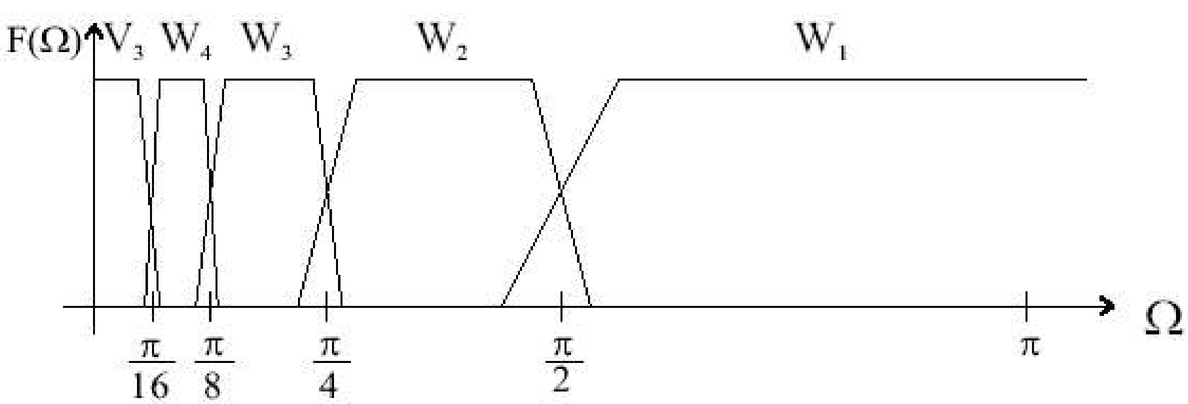
$$D_m = \left(d_m(0), d_m(1), \ldots, d_m(N_m - 1)\right)^T$$

-
- ukazat, ako sa pomocou takych matic rozlozi signal na c(n) a d(n) a opat zlozi.

Obr. 1.18: Rozklad signálu dĺžky $L = 16$ pri DWT a štruktúra výsledného spektra



rekonštrukcia:



Čo robiť pri DWT na kraji signálu:

- prehlad metod

periodicke rozsirenie signalu:

zachovava ortogonalitu
vnasa do signalu body nespojitosti
parna dlzka signalu pri kazdom rozklade

symetricke rozsirenie signalu:

k signalu dlzky N pridavame jeho zrkadlovy obraz az tuto dvojicu nasledne speriodifikujeme
rozsirenim nevznikaju v signale body nespojitosti ale iba v jeho prvej derivacii
neredun bazove funkcie v spojitom aj diskretnom pripade su na okraji signalu prelozene spat a scitane sami zo sebou

doplnenie nulami

- Doplnenie signalu nulami na jeho okrajoch je najpriamociarejsim riesenim problemu reprezentacie casovo ohraniceneho signalu. Vnasa ale vyrazne diskontinuity na okrajoch singalu. Opatrenia: prestriedanie prvkov matice signalu, vynechanie prveho riadku. to je jednoduchy pripad extrapolacie.

- ake je to symetricke zozsirenie a preco ho nemozeme pouzit pri ortogonalnych waveletoch
  - viz predch
- wavelety na intervale, preco, vlastnosti, sposob vypoctu

$$\mathbf{A}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

kde **B** vznikne úpravou matice $\mathbf{B}^*$:

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_D & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \mathbf{L} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

kde **L** je matica rozmerov $[(N-2)/2] \times (N-2)$ ortogonálna k **A** získaná napr. GS ortogonalizačným procesom. Parametrom D môžeme plynulo zväčšovať prechodovú oblasť návratu k pôdovným filtrov. Hraničné filtre vo vzťahu (4.3) sú príkladom matice **B**, ktorá vznikla z (4.5) pri $D = 1$ a $N = 4$ a úpravou pre podmienku $u + v + w = 0$.

Kľúčovou otázkou je, ako dostať jednoducho matice **L** aj bez GS procesu. Definujme maticu **P**:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^T\mathbf{A} \quad (4.6)$$

vzhľadom na vlastnosti matice **A** má matica **P** tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{lava}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_{\text{prava}} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

pričom lineárne nezávislé vektory z matic $\mathbf{P}_{lava}$ a $\mathbf{P}_{prava}$ sú zároveň ortogonálne na riakdy matice **A**, t.j. môžeme ich použiť ako riadky matice **L**.

Všetky uvedené (aj v predchádzajúcich častiach) spôsoby manipulácie so signálom na jeho hraniciach vedú k spojitým prípadom waveletovej analýzy na nejakom intervale. T.j. okrem neovplyvnených waveletov a funkcií mierky v "strede" intervalu máme okrajové funkcie, ktoré nám riešia problém ohraničenosti analýzy v $L^2(\mathcal{R})$. Ak sú pritom zachované pôvodné vlastnosti ako napr. ortogonalita alebo regularita hovoríme o *waveletoch na intervaloch*. Vo forme v akej sa vyskytujú v strede intervalu ich môžeme nájsť kaskádovými algoritmami. Pri krajoch, kde sú dilatačné rovnice výrazne ovplyvnené, ich môžeme korektne získať použitím inverznej transformácie zo spektra, kde bude príslušný spektrálny koeficient jednotkový a ostatné nulové (takýto postup bol použitý aj v Obr. 4.1).

Banky filtrov

- o je to decimácia a interpolacia, ich vzorce, vysvetli ako funguju, na o sú dobre, schemy

decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M. Najprv je signál $u(k)$ frekvenčne obmedzený *antialiasingovým*[1] prípadne ideálym DP filtrom s hranicou prepúšťania $\Omega_0 = \pi/M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je *podvzorkovaný*. Výsledok po decimácii je:

$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k) \tag{3.3}$$

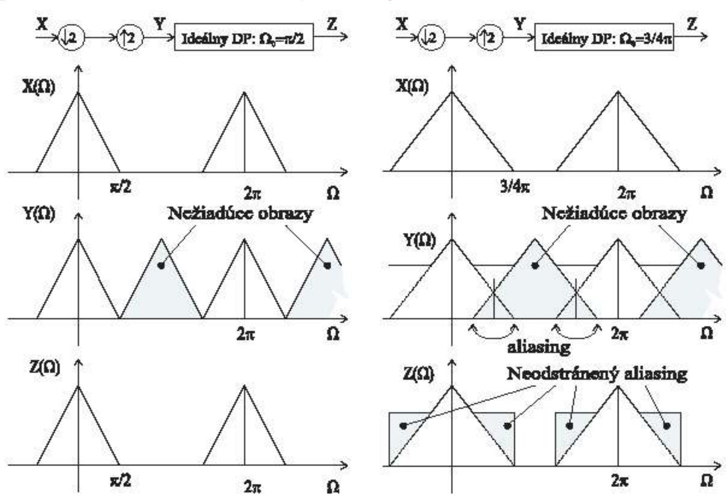
Obr. 3.1: Schématické označenie operácií v SRT a) decimácia b) interpolácia

-
-

interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M. Signál $x(k)$ je najprv *nadvzorkovaný* a následne vyhladený filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi/M$) s impulzovou charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k) \tag{3.4}$$

-
- Decimacia a interpolacia, nakresli, o sa deje zo signalom vo frekvencii a ase, vysvetli



Obr. 3.4: Decimácia a interpolácia signálu pri M=2 ak signál $X(\Omega)$ je dostatočne a nedostatočne obmedzený decimačným filtrom. Pri nedostatočne obmedzenom signále vznikne aliasing, ktorý nevieme bez dodatočnej informácie eliminovať.

3.1.3 Decimácia s následnou interpoláciou

Vidíme, že po decimácii a následnej interpolácii vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál ktorý bol pred podvzorkovaním frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi/M$. Inač vzniká, ktorý nevieme (ak nemáme k dispozícii ďalšiu informáciu) odstrániť. Celá situácia je zobrazená na Obr.3.4. Ako zrekonštruovať signál, keď nemáme k dispozícii ani ideálne filtre na jeho ohraničenie? Riešením je Banka filtrov (BF).