

Predpokladajme, že pre dané $P(z)$ hľadáme vyhovujúce $H(z)$. Také $H(z)$ nazývame *spektrálny faktor* $P(z)$ a metódu jeho získania *spektrálnou faktorizáciou*. Spektrálne faktory nie sú jedinečné a získame ich priradením vždy iba jednej nuly z dvojíc núl (2.21) do $H(z)$. Prepíšme $P(z)$ do tvaru [13]:

$$P(z) = \alpha \prod_{k=1}^{N_a} ((1 - z_{k_a} z^{-1}) (1 - z_{k_a}^* z)) \prod_{k=1}^{N_b} ((1 - z_{k_b} z^{-1}) (1 - z_{k_b}^* z)) \quad (2.22)$$

kde N_a je počet párov núl **na** jednotkovej kružnici (platí $|z_{a_k}| = 1$) a N_b je počet párov núl **mimo** jednotkovej kružnice (platí $|z_{b_k}| < 1$). Do $H(z)$ priradíme po jednej nule z každého z uvedených párov.

Co su jej spektrálne faktory a ake maju vlastnosti, co je to minimalna faza ?

Predpokladajme všeobecné riešenie spektrálnej faktorizácie $P(z)$ v tvare:

$$P(z) = \tilde{H}(z) H(z) \quad (3.61)$$

Nulové body $P(z)$ označme z_k . Potom platia nasledovné pravidlá pre vytváranie spektrálnych faktorov [14]:

1. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie reálnych filtrov musíme z_k a z_k^* použiť v pároch
2. aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *lineárnou fázou* musíme z_k a $1/z_k$ použiť v pároch
3. Aby $\tilde{H}(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť ortogonálne wavelety, musíme z_k a $1/z_k$ použiť oddelene.

Vidíme, že pravidlá 2 a 3 sa navzájom vylučujú, okrem jediného prípadu:

Symetrický ortogonálny KIO filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí:

$$H(z) = (1 + z^{-N}) / \sqrt{2} \quad N \text{ je nepárne} \quad (3.62)$$

Ake su vseobecne pravidla pri spektrálnej faktorizácii ?(realne filtre, lin faza, ortogonalne riesnie)

Ako by ste navrhli biortogonálne wavelety pomocou spekt. Faktorizácie?

Prí návrhu biortogonálnych splíne(CDF) waveletov faktorizujeme $P(z)$ tak, aby jeden faktor obsahoval iba nuly v $z = -1$ a nič iné, t.j. aby bol maximálne K-regulárny:

$$H(z) = H_{S_M}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{M/2+1} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{M/2} \quad (3.63)$$

Možné výsledné $H(z)$ majú rovnakú magnitudovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je riešenie s *minimálnou fázou* [8], kde pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly **v** a **na** jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{k=1}^{N_a} (1 - z_{a_k} z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_b} (1 - z_{b_k} z^{-1}) \quad (2.23)$$

Aby koeficienty $h(n)$ boli reálne, musia sa vybrané nuly vyskytovať v komplexne združených pároch. Táto podmienka je pri návrhu ortogonálnych waveletových systémov zahrnutá vo Vete 2.1, t.j. v tvare vstupného polynómu na faktorizáciu.

DWT v maticovom tvare.

Struktúra a rozmery transformacných matic pre analýzu a syntézu v ortogonálnom a biortogonálnom

$$\begin{pmatrix} C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_m \\ G_m \end{pmatrix} C_m \quad C_m = \begin{pmatrix} H_m^T & G_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{m+1} \\ D_{m+1} \end{pmatrix}$$

,kde C_m resp. D_m sú stĺpcové vektory (matice) :

$$C_m = (c_m(0), c_m(1), \dots, c_m(N_m - 1))^T$$

$$D_m = (d_m(0), d_m(1), \dots, d_m(N_m - 1))^T$$

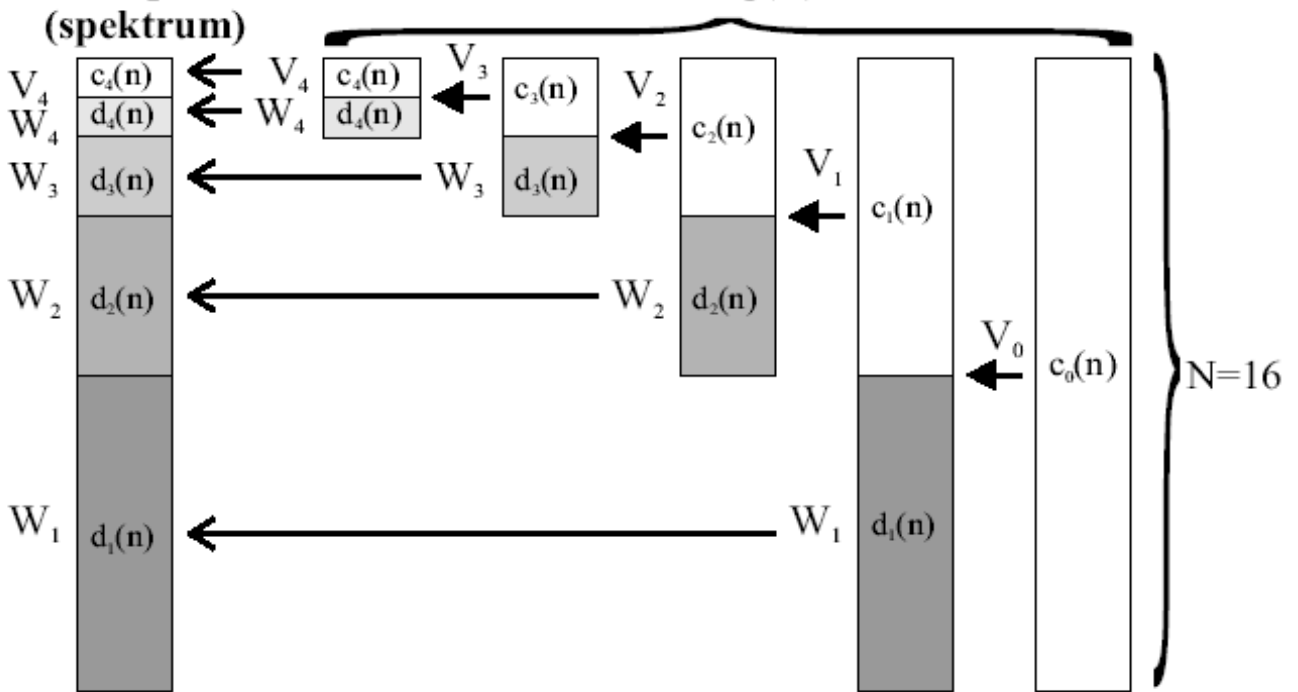
pripade

ukázat, ako sa pomocou takých matic rozloží signál na $c(n)$ a $d(n)$ a opat zloží.

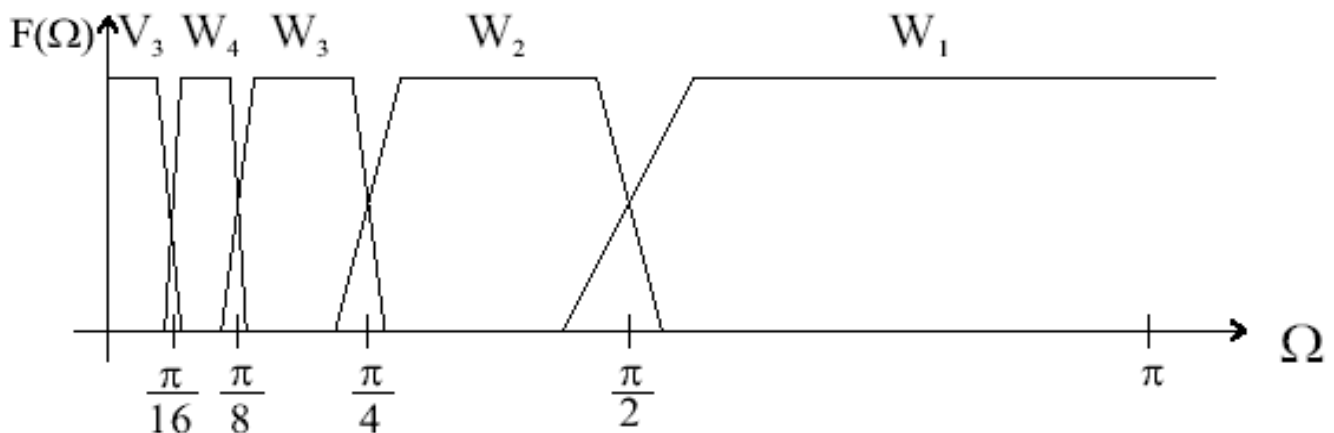
Obr. 1.18: Rozklad signálu dĺžky $L = 16$ pri DWT a štruktúra výsledného spektra

Výsledná reprezentácia

$$U = \log(N) = 4$$



rekonštrukcia:



Čo robiť pri DWT na kraji signálu:

- prehľad metod
- **periodicke rozsirenje signalu:**
 - zachovava ortogonalitu
 - vnasa do signalu body nespojitosti
 - parna dlzka signalu pri kazdom rozklade
- **symetricke rozsirenje signalu:**
 - k signalu dlzky N pridavame jeho zrkadlový obraz az tuto dvojicu nasledne speriodifikujeme
 - rozsirenim nevznikaju v signale body nespojitosti ale iba v jeho prvej derivacii
 - neredun bazove funkcie v spojitem aj diskretnom pripade su na okraji signalu prelozene spat a scitane sami zo sebo**udoplnenie nulami**
 - Doplnenie signalu nulami na jeho okrajoch je najpriamociarejsim riesenim problemu reprezentacie casovo ohraniceneho signalu. Vnasa ale vyrazne diskontinuity na okrajoch signalu. Opatrenia:
 - prestriedanie prvkov matice signalu, vynechanie prveho riadku. to je jednoduchy pripad extrapolacie.
 - ake je to symetricke zozsirenje a preco ho nemozeme pouzít pri ortogonalnych waveletoch
 - viz predch
 - wavelety na intervale, preco, vlastnosti, sposob vypoctu

$$A_b = \begin{pmatrix} & B \\ (0 & A) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

kde B vznikne úpravou matice B^* :

$$B^* = \begin{pmatrix} I_D & 0 \\ 0 & (L \ 0) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

kde L je matca rozmerov $[(N-2)/2] \times (N-2)$ ortogonálna k A získaná napr. GS ortogonalizačným procesom. Parametrom D môžeme plynulo zväčšovať prechodovú oblasť návratu k pôdovným filtrom. Hrančné filtre vo vzťahu (4.3) sú príkladom matice B , ktorá vznikla z (4.5) pri $D=1$ a $N=4$ a úpravou pre podmienku $u+v+w=0$.

Kľúčovou otázkou je, ako dostať jednoducho matice L aj bez GS procesu. Definujme maticu P :

$$P = I - A^T A \quad (4.6)$$

vzhľadom na vlastnosti matice A má matca P tvar

$$P = \begin{pmatrix} P_{\text{lava}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\text{prava}} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

prícom lineárne nezávislé vektory z matic P_{lava} a P_{prava} sú zároveň ortogonálne na riadky matice A , t.j. môžeme ich použiť ako riadky matice L .

Všetky uvedené (aj v predchádzajúcich častiach) spôsoby manipulácie so signálom na jeho hraniciach vedú k spojitým prípadom waveletovej analýzy na nejakom intervale. T.j. okrem neovplyvnených waveletov a funkcií mierky v "strede" intervalu máme okrajové funkcie, ktoré nám riešia problém ohraničenosti analýzy v $L^2(\mathcal{R})$. Ak sú prítom zachované pôvodné vlastnosti ako napr. ortogonalita alebo regularita hovoríme o *waveletoch na intervaloch*. Vo forme v akej sa vyskytujú v strede intervalu ich môžeme nájsť kaskádovými algoritmi. Pri krajoch, kde sú dilatačné rovnice výrazne ovplyvnené, ich môžeme korektné získať použitím inverznej transformácie zo spektra, kde bude príslušný spektrálny koeficient jednotkový a ostatné nulové (takýto postup bol použitý aj v Obr. 4.1).

Banky filtrov

Čo je to decimácia a interpolácia, ich vzorce, vysvetliť ako funguju, načo sú dobre, schemy

decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M . Najprv je signál $u(k)$ frekvenčne obmedzený *antialiasingovým*¹ prípadne ideálnym DP filtrom s hranicou prepúšťania $\Omega_0 = \pi/M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je *podvzorkovaný*. Výsledok po decimácii je:

$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k) \quad (3.3)$$

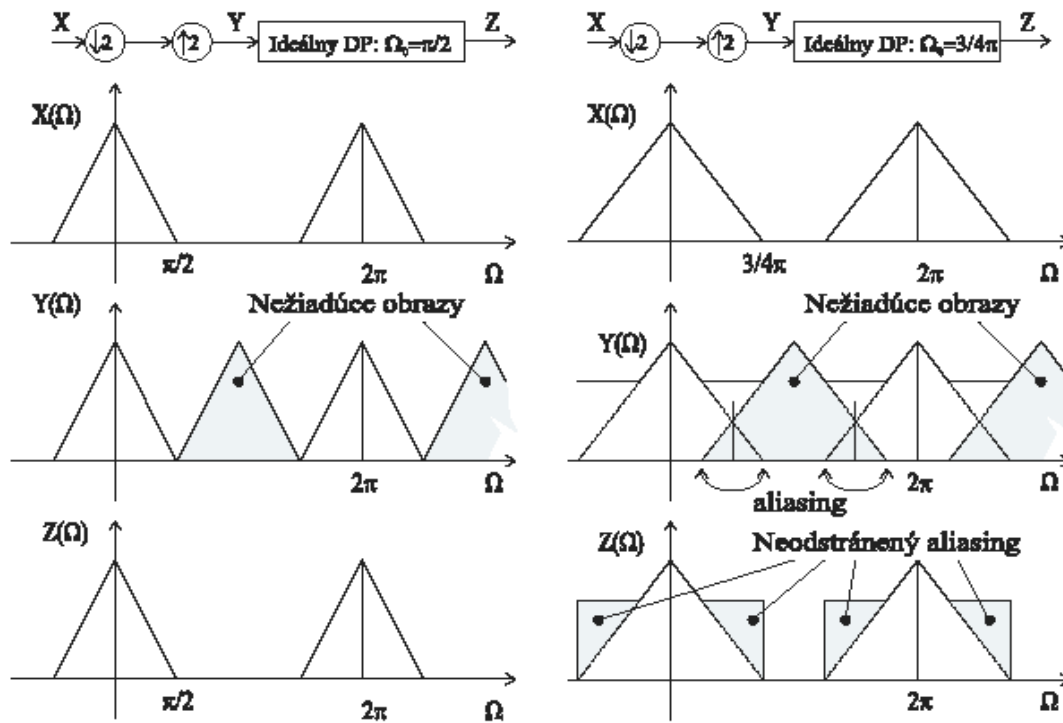


Obr. 3.1: Schématické označenie operácií v SRT a) decimácia b) interpolácia

interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M . Signál $x(k)$ je najprv *nadvzorkovaný* a následne vyhladený filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi/M$) s impulzovou charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k) \quad (3.4)$$

Decimacia a interpolacia, nakresliť, čo sa deje zo signalom vo frekvencii a čase, vysvetliť



Obr. 3.4: Decimácia a interpolácia signálu pri $M=2$ ak signál $X(\Omega)$ je dostatočne a nedostatočne obmedzený decimačným filtrom. Pri nedostatočne obmedzenom signále vznikne aliasing, ktorý nevieme bez dodatočnej informácie eliminovať.

3.1.3 Decimácia s následnou interpoláciou

Vidíme, že po decimácii a následnej interpolácii vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál ktorý bol pred podvzorkovaním frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi/M$. Ináč vzniká, ktorý nevieme (ak nemáme k dispozícii ďalšiu informáciu) odstrániť. Celá situácia je zobrazená na Obr.3.4. Ako zrekonštruovať signál, keď nemáme k dispozícii ani ideálne filtre na jeho ohraničenie? Riešením je Banka filtrov (BF).