Waveletové Rady Diskrétna WT	**=**	**Iterované Banky filtrov**	**←**	**Banky Filtrov**
Dyadická DWT	**=**	**Iterovaná 2-pásmová Banka filtrov**		

Banky filtrov a systémy s rôznym taktovaním

V *systémoch s rôznym taktovaním* (***SRT***, "*multirate systems*") sú vzorky signálu spracovávané v častiach systému s rôznymi *taktovacími frekvenciami*. Zmeny taktovacej frekvencie sú uskutočnené operáciami *decimácie* a *interpolácie*.

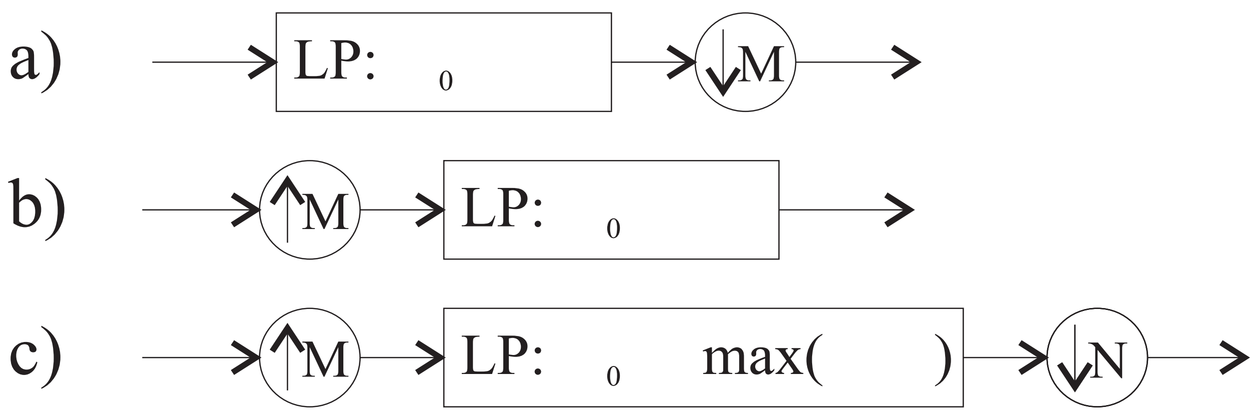
Decimácia je proces redukcie vzorkovacej frekvencie celočíselným faktorom M. Najprv je signál $u(k)$ filtrovaný *antialiasingovým* filtrom prípadne ideálym DP filtrom s hranicou prepúštania $\Omega_0 = \pi / M$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ a potom je podvzorkovaný. Výsledok po decimácii je:

$$y(n) = \sum_k h(Mn - k)u(k)$$

Interpolácia je proces zvýšenia taktovacej frekvencie signálu celočíselným faktorom M. Signál $x(k)$ je najprv nadvzorkovaný (vložením *M -1* núl medzi každé 2 vzorky) a potom interpolovaný filtrom (napr. ideálnym DP s $\Omega_0 = \pi / M$) s imp. charakteristikou $g(n)$. Výsledný signál po interpolácii je:

$$v(n) = \sum_k g(n - Mk)x(k)$$

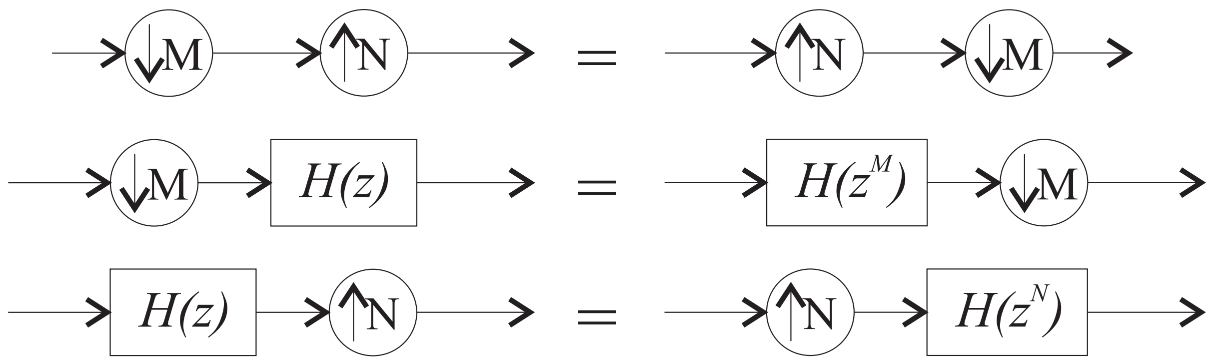
Operácie v SRT a) decimácia b) interpolácia



Požadovaný typ filtra pri : a) decimácii b)interpolácii c) zmene taktovacej frekvencie faktorom M/N

Ekvivalentné štruktúry v SRT

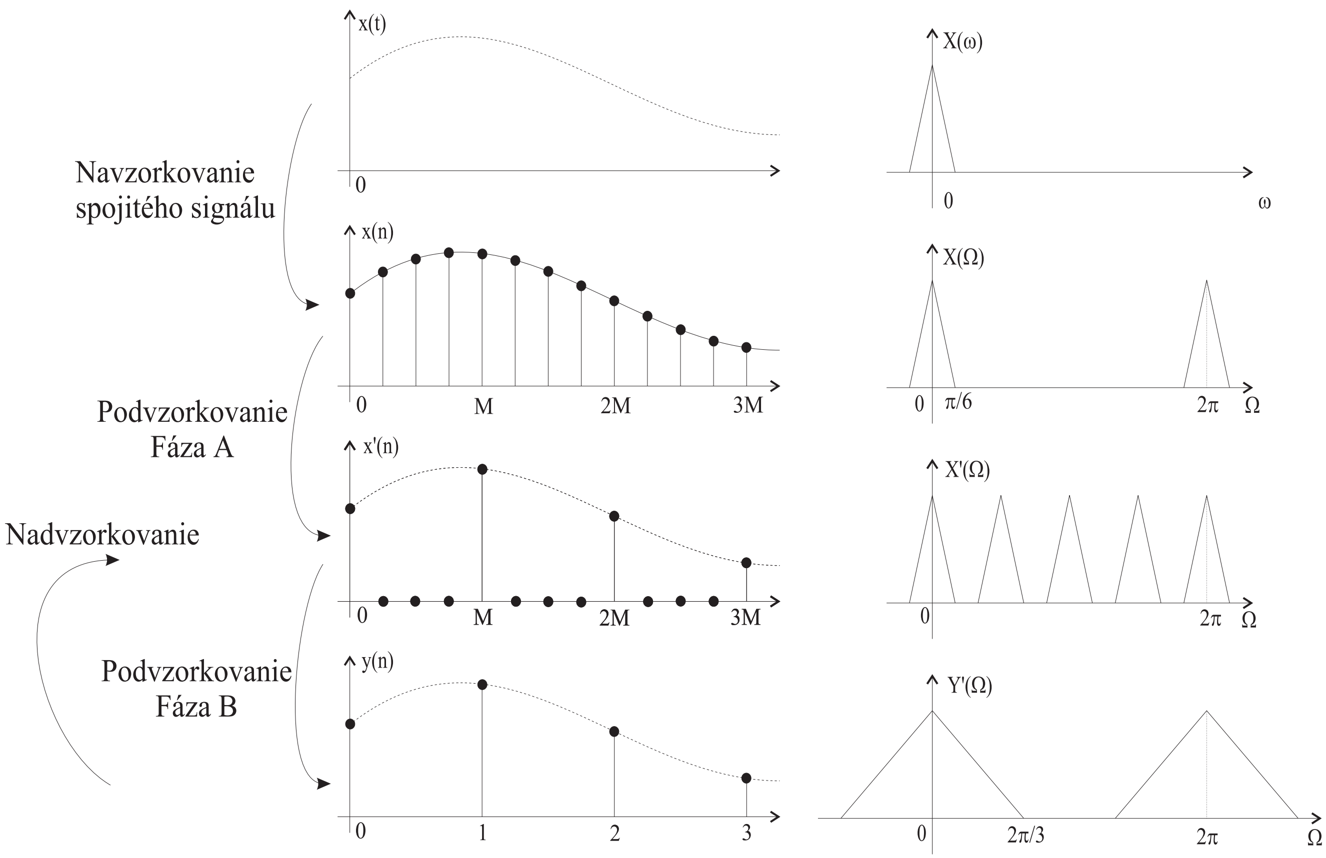
M, N nesúdeliteľné



Podvzorkovanie signálu

Z pôvodného signálu zachovávame iba každú M-tú vzorku. Pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný $y(n) = x(Mn)$

Čo vo frekvencii odpovedá(znázornené preM=4):



Proces podvzorkovania $x(n)$ môžeme popísať *v dvoch fázach*:

A) <u>vynulovanie nepotrebných zložiek</u> (násobenie Kroneckerovými impulzami)

$$x'(n) = x(n)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(n-rM) = x(n)\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}nk} \qquad \text{(Finta)}$$

Z transformáciou dostaneme:

$$X'(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}Z\left\{x(n)\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right)^{n}\right\} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(zW^{k}\right)$$

, kde $W = e^{-j2\pi/M}$. Tomu opovedá frekvenčná charakteristika (pri $z = e^{j\Omega}$)

$$X'(\Omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(\Omega - \frac{2\pi}{M}k\right)$$

T.j. výsledné spektrum je sumou M pôvodných spektier, posunutých zakaždým o $2\pi/M$.

B) <u>Zmena mierky</u>, resp. roztiahnutie signálu $x'(n)$

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(Mn)z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{k} x'(k)\left(z^{\frac{1}{M}}\right)^{-k}=X'\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$$

$$Y(\Omega)=X'(\Omega/M)$$

Výsledkom podvzorkovania teda je:

$$Y(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}}W^{k}\right)$$

$$Y(\Omega)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega-2k\pi}{M}\right)$$

Nadvzorkovanie signálu.

Pri nadvzorkovaní signálu vkladáme medzi jeho vzorky zakaždým *M-1* núl. Teda pre vstupný signál $x(n)$ je výstup daný:

$$y(n) = x(n / M)$$

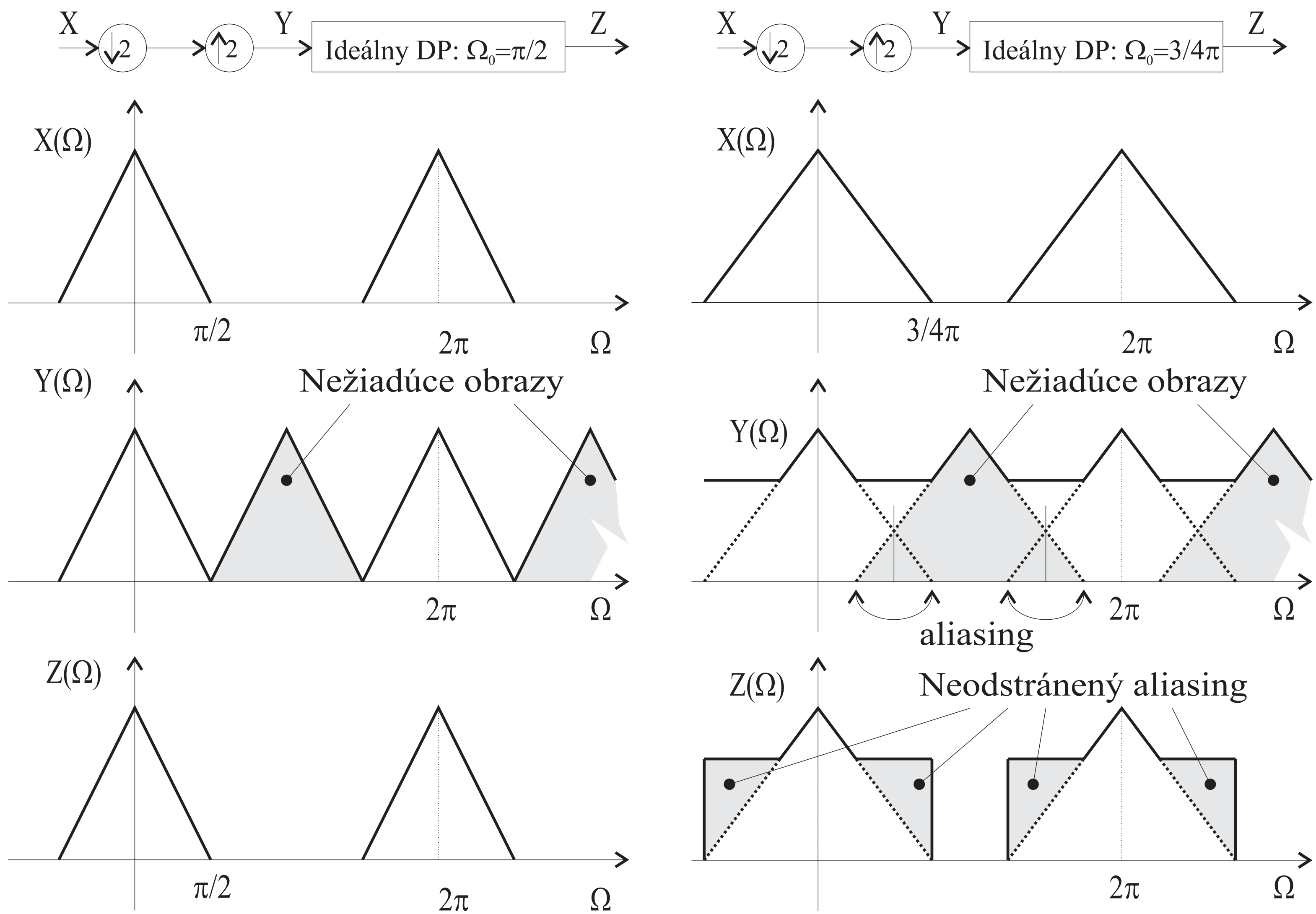
Proces je opačný ako pri fáze B podvzorkovania, t.j na intervale vznikne *M-1* obrazov spektra pôvodného signálu $x(n)$:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n / M) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{k} x(k) \left(z^{M}\right)^{-k} = X\left(z^{M}\right)$$

$$Y(\Omega) = X(M\Omega)$$

Úlohou interpolačného filtra je ***odstrániť týchto M-1 obrazov.***

Podvzorkovanie a následné nadvzorkovanie signálu



- Vidíme, že po podvzorkovaní a následnom nadvzorkovaní vieme bezchybne zrekonštruovať iba signál frekvenčne ohraničený po $\Omega_0 = \pi / M$.

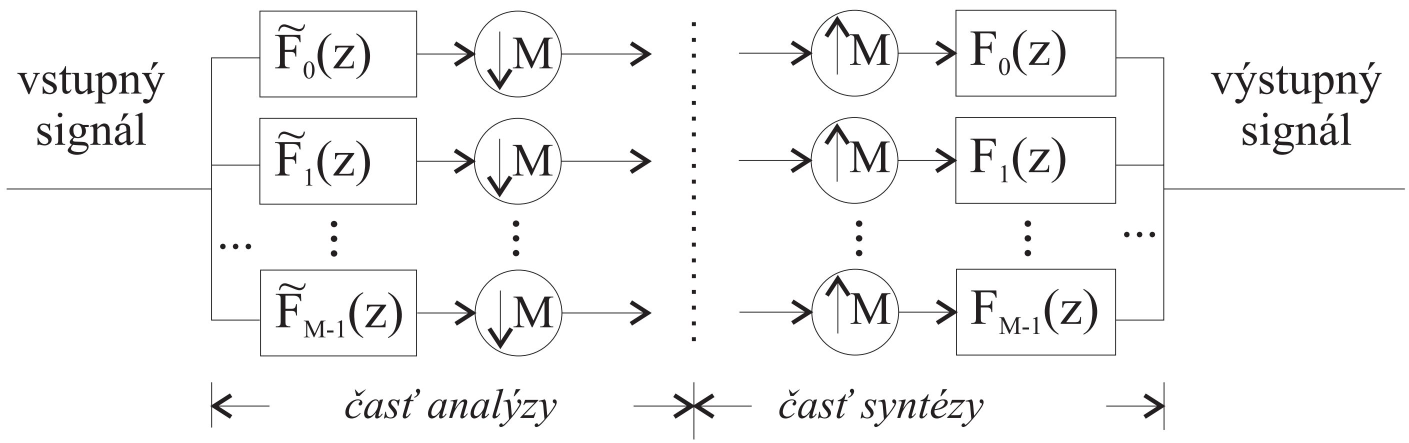
- Ináč vzniká tzv. ***aliasing*** (sčítavanie zrkadlových spektrálnych zložiek signálu), ktorý nevieme odstrániť.

Ako po podvzorkovaní zrekonštruovať ľubovoľný signál?

–>> Riešením je banka filtrov.

Banka filtrov

Definícia: ***Banka filtrov (BF)*** je sústava, v ktorej filtre, použité v operáciach decimácie a interpolácie, umožňujú signál rozložit (analýza) na ***subpásma*** a spätne zložiť(syntéza).



Všeobecná schéma M-pásmovej banky filtrov s kritickým podvzorkovaním

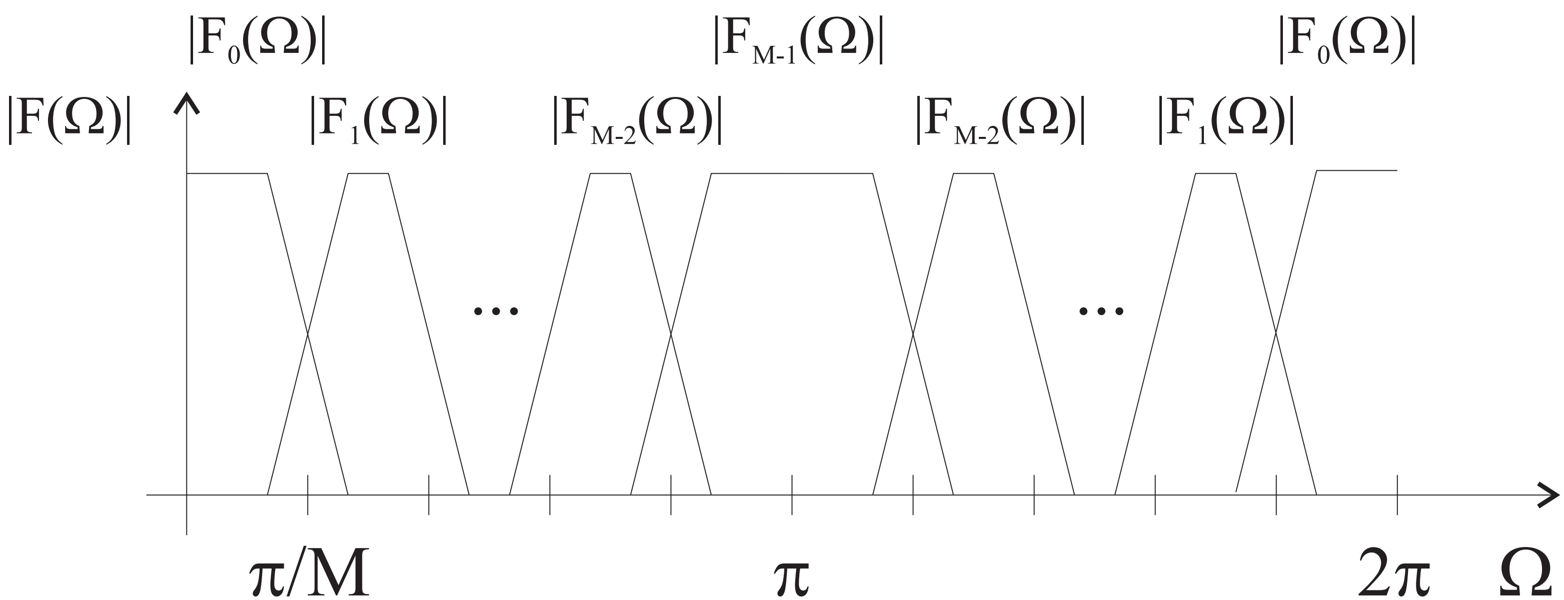
- Signál je rozdelený filtrami pre analýzu $\tilde{F}_k$ na M častí (*subpásiem*) a následne podvzorkovaný – ***analýza signálu***

- Signál zrekonštruujeme spätným nadvzorkovaním týchto dvoch častí, interpoláciou filtrami pre syntézu F_k nakoniec sčítaním – ***syntéza signálu***

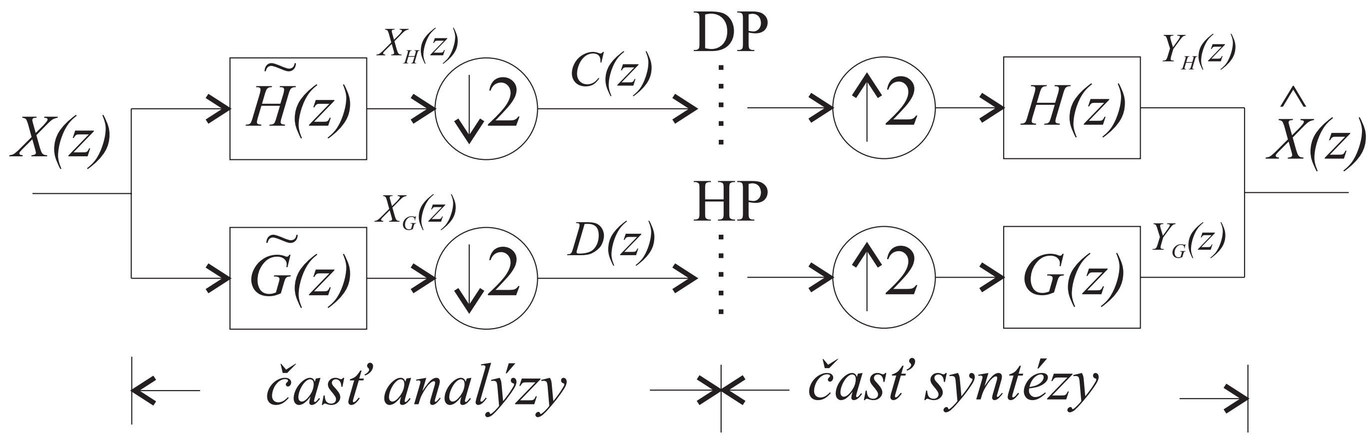
Ak je výstupný signál identický so vstupným, potom FB má vlastnosť ***perfektnej(úplnej) rekonštrukcie***.

Zvyčajne chceme FB s *rušením aliasingu* a *úplnou rekonštrukciou signálu*.
→ Prenosové funkcie analyzačných $\tilde{F}_k(z)$ resp. syntetizačných filtrov $F_k(z)$ musia spĺňať isté podmienky.

Najčastejšie je používané rovnomerné rozdelenie na subpásma v tvare:



Dvojpásmové banky filtrov



Platí(V1): $c(n) = \sum_k \widetilde{h}(2n-k)x(k)$ $\qquad d(n) = \sum_k \widetilde{g}(n-2k)x(k)$

$$\hat{x}(n) = \sum_k h(n-2k)c(k) + \sum_k g(n-2k)d(k)$$

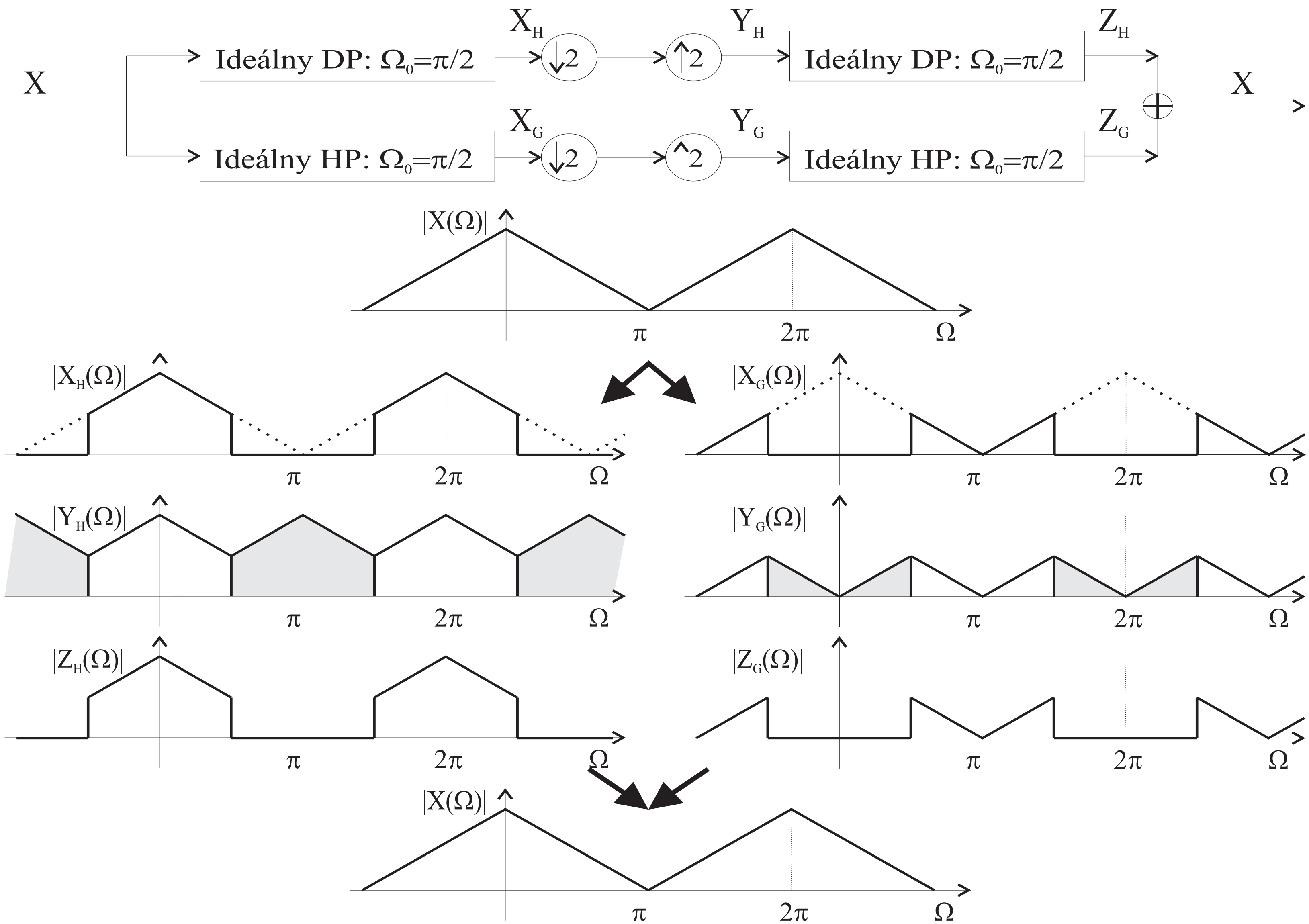
DWT(V2): $c_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k)$ $\qquad d_{m+1}(n) = \sum_k \widetilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

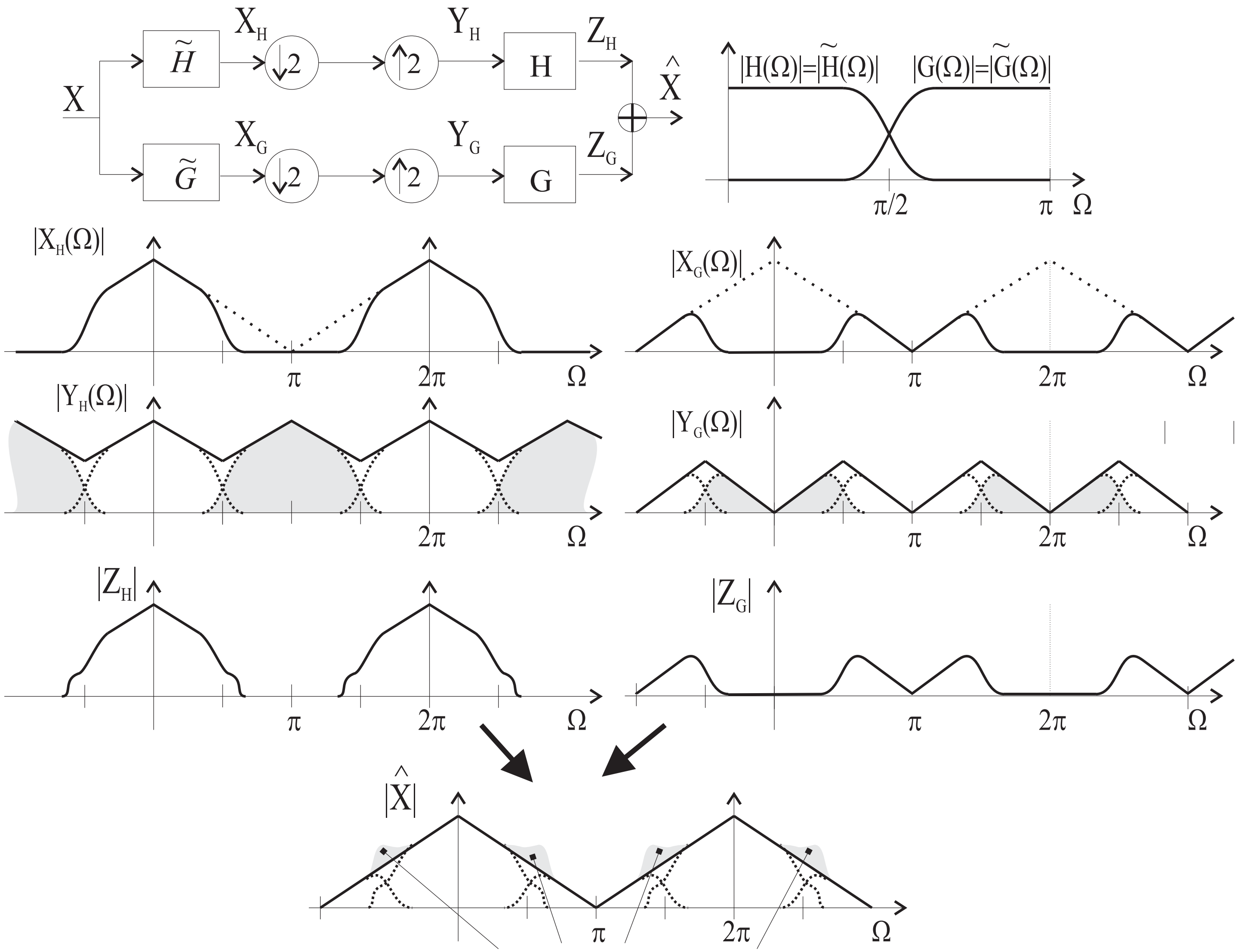
T.J.AK PLATÍ $\widetilde{h}(n) = \widetilde{h}_{mr}(-n)$ $\qquad h(n) = h_{mr}(n)$

$\widetilde{g}(n) = \widetilde{g}_{mr}(-n)$ $\qquad g(n) = g_{mr}(n)$ SÚ V1 a V2 TOTOŽNÉ !!!

Ako dosiahneme úplnú rekonštrukciu?



Ak filtre nie su ideálne?



Pri úplnej rekonštrukcii sa aliasing z DP a HP časti navzájom eliminuje

Polpásmový filter

Polpásmový filter s prenosovou funkciou $P(z)$ je FIR filter pre ktorý platí:

$$P(z) = P(z^{-1}) \qquad\qquad P(z) + P(-z) = 2$$

resp.

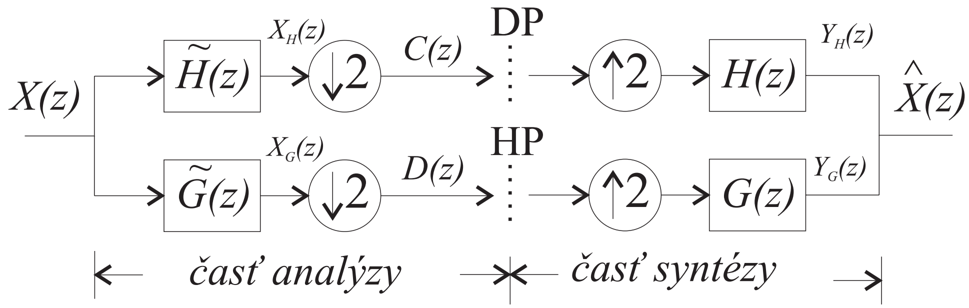
$$P(e^{j\Omega}) = P(e^{-j\Omega}) \qquad\qquad P(e^{j\Omega}) + P(e^{j(\pi-\Omega)}) = 2$$

$$p(n) = p(-n) \qquad\qquad p(n) + (-1)^n p(n) = 2\delta(n)$$

T.j $P(e^{j\Omega})$ je reálna párna funkcia Ω s nepárnou symetriou okolo bodu $[\pi/2,1]$ a pre odpovedajúcu impulzovú charakteristiku $p(n)$ platí:

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \ je\ párne \\ p(n) & ináč \end{cases}$$

Podmienky na úplnú rekonštrukciu pre dvojpásmovú banku filtrov



Popisom signálov v oboch vetvách FB dostávame:

$$X_H(z) = X(z)\widetilde{H}(z) \qquad X_G(z) = X(z)\widetilde{G}(z)$$

$$C(z) = \frac{1}{2}\left[X_H\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_H\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right] \qquad D(z) = \frac{1}{2}\left[X_G\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X_G\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$Y_H(z) = C\left(z^2\right)H(z) \qquad Y_G(z) = D\left(z^2\right)G(z)$$

$$\hat{X}(z) = Y_H(z) + Y_G(z) = \ldots = \frac{1}{2}\left[R_p(z)X(z) + R_a(z)X(-z)\right]$$

$R_p(z)$ charakterizuje celkový prenos sústavou a $R_a(z)$ aliasing

$$R_p(z) = \widetilde{H}(z)H(z) + \widetilde{G}(z)G(z) \qquad R_a(z) = \widetilde{H}(-z)H(z) + \widetilde{G}(-z)G(z)$$

Postačujúce podmienky na úplnú rekonštrukciu sú:

1) eliminácia aliasingu $R_a(z)=0$, $\forall z$

2) prenos je nanajvýš oneskorením $R_p(z)=2z^{-l}$, $l \in Z$

<u>Riešením 1. podmienky</u> - eliminácie aliasingu dostaneme napr.:

$$H(z)=\pm cz^m \widetilde{G}(-z) \qquad G(z)=\mp cz^m \widetilde{H}(-z),\ m \in Z$$

<u>Pri riešení 2. podmienky</u> označme

$$P_H(z)=\tilde{H}(z)H(z)$$

Vyjadrime $R_p(z)=\widetilde{H}(z)H(z)+\widetilde{G}(z)G(z)$ pomocou riešenia 1v závislosti od $P_H(z)$:

$$P_H(z)+P_H(-z)(-1)^l=2z^{-l}$$

Normovaním (centrovaním) $P_H(z)$ pomocou $P(z)=z^l P_H(z)$ dostaneme:

$$P(z)+P(-z)(-1)^{m+l+1}=2$$

Kde

$$P(z)=z^l\tilde{H}(z)H(z) \qquad P(-z)=z^l\tilde{G}(z)G(z)$$

T.j. všeobecné riešenie podmienky 2 možno formulovať:

Ak normovaný súčin prenosových funkcií DP filtrov v dvojpásmovej banke filtrov tvorí prenosovú funkciu polpásmového filtra a súčet* m+l *je nepárny, potom banka filtrov dosahuje úplnú rekonštrukciu.

Ak chceme sústavu s nulovým oneskorením platia nasledovné tvary vzťahov pre elimináciu aliasingu:

$$H(z) = z^{2k-1}\widetilde{G}(-z) \qquad G(z) = -z^{2k-1}\widetilde{H}(-z)$$

Energeticky komplementárne filtre

Filtre s $H(z)$ a $G(z)$ sú *energeticky komplementárne* ak platí:

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 + \left|G\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 = 2$$

Riešenie vo forme kvadratúrnych zrkadlových filtrov(QMF)

Kvadratúrne zrkadlové filtre(QMF) boli v o BF prvýkrát použité v r.1977 (Esteban, Galand) voľbou:

$$H(z) = \tilde{H}(z) \qquad \tilde{G}(z) = \tilde{H}(-z) \qquad G(z) = -\tilde{H}(-z)$$

Aliasing je odstránený, avšak takáto BF podmienku na prenos iba aproximuje, t.j. nedosahuje úplnú rekonštrukciu okrem trivialneho Haarovho prípadu. Názov kvadratúrne zrkadlové filtre pochádza z vlastnosti, že $\tilde{H}(z)$ a $\tilde{G}(z)$ majú zrkadlové prenosové funkcie okolo $\Omega = \pi/2$, pričom sú energeticky komplementárne.

Ortogonálne (paraunitárne) riešenie

Nech $H_0(z)$ je prenosová funkcia a $h_0(n)$ impulzová charakteristika (párnej dĺžky $N = 2l$, $l \in Z$ prototypového DP FIR filtra. Potom BF z neho odvodená vzťahmi:

$$\widetilde{H}(z) = H_0(z) \qquad H(z) = \pm z^{2l-1}\widetilde{G}(-z) = \widetilde{H}\left(z^{-1}\right)$$

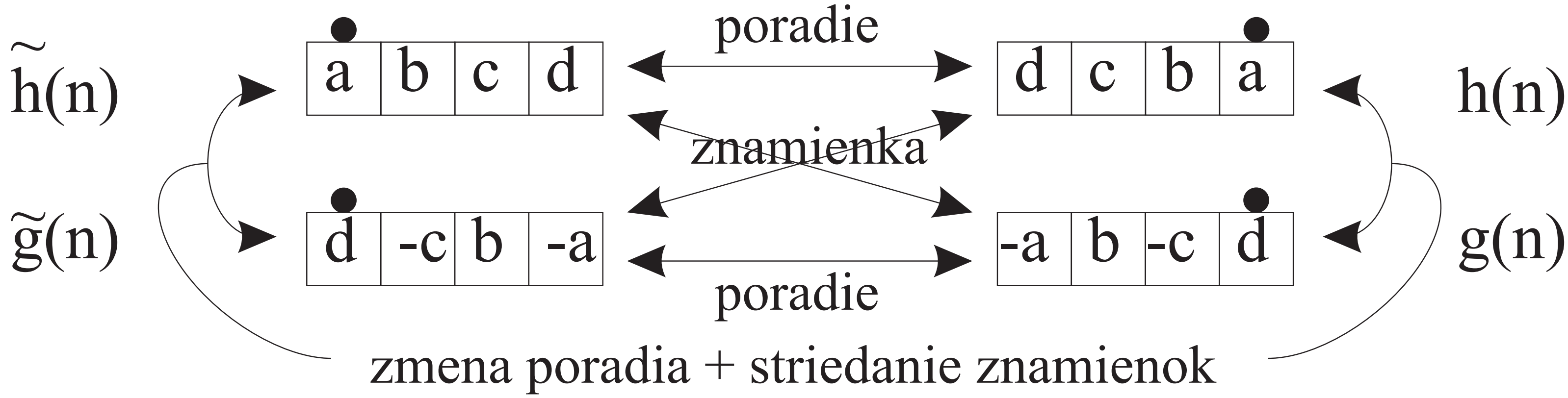
$$\widetilde{G}(z) = \mp z^{-(2l-1)}\widetilde{H}\left(-z^{-1}\right) \qquad G(z) = \mp z^{2l-1}\widetilde{H}(-z) = \widetilde{G}\left(z^{-1}\right)$$

dosahuje úplnú rekonštrukciu za podmienky, že pre $h_0(n)$ platí:

$$\sum_n h_0(n) h_0(n-2k) = \delta(k) \qquad \sum_n h_0(n) = \sqrt{2}$$

Pre takéto riešenie platí:

- má *nulové oneskorenie* avšak sú tu *nekauzálne časti* - ***filtre pre analýzu a syntézu v oboch vetvách majú impulzové charakteristiky časovo obrátené.***
- Oneskorením nekauzálnych filtrov filtrov (vynásobením členom $z^{-(2l-1)}$) dostaneme kauzálnu BF s oneskorením $2l-1$.
- filtre pre analýzu (a analogicky aj pre syntézu) sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom.



Príklad impulzových charakteristík filtrov v ortogonálnej FB s nulovým oneskorením. Bodkou sú označené koeficieny v n=0.

Poznámka: Ak sústavu začneme navrhovať od syntézy, t.j. $H(z) = H_0(z)$, výsledkom je zámena analyzačnej a syntetizačnej časti FB, t.j. vo vzťahoch na výpočet filtrov sa zamení označenie duálnosti.

Úvaha: Prečo musia byť filtre $H(z) = \widetilde{H}(z^{-1})$, $G(z) = \widetilde{G}(z^{-1})$ takto časovo otočené ?

➔Lebo ináč nemôžu formovať polpásmový filter, $p(n)$ by nebolo symetrické.

Biortogonálne riešenie

Biortogonálne riešenie umožňuje návrh 2-kanálových bánk filtrov s FIR filtrami s *lineárnou fázou* a *rôznymi dĺžkami impulzovej charakteristiky* filtrov pri analýze a syntéze. Aliasing musí byť nulový:

$$H(z) = \pm z^{m} \widetilde{G}(-z) \qquad G(z) = \mp z^{m} \widetilde{H}(-z), \quad m \in Z$$

Filtre v jednotlivých vetvách musia formovať polpásmové filter:

$$P(z) = \widetilde{H}(z) H(z) \qquad P(-z) = \widetilde{G}(z) G(z)$$

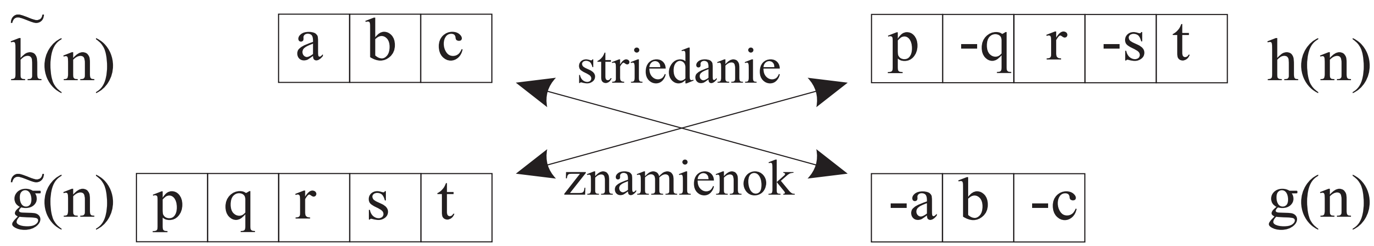
Sú možné tieto tvary riešení(formulované pre analyzačné filtre):

1) oba filtre sú symetrické, nepárnych dĺžok líšiacich sa o nepárny násobok 2
2) jeden filter je symetrický, druhý antisymetrický, oba párnych dĺžok líšiacich sa o párny násobok 2
3) jeden filter je nepárnej, druhý párnej dĺžky, oba majú nuly iba na jednotkovej kružnici. Oba sú symetrické alebo jeden je symetrický a druhý antisymetrický.

Filtre spĺňajú podmienky biortogonality, t.j. sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“:

$$\sum_k h(k)\tilde{h}(2n-k)=\delta(k) \qquad \sum_k g(k)\tilde{g}(2n-k)=\delta(k)$$

$$\sum_k g(k+2m)\tilde{h}(2n-k)=\delta(k) \qquad \sum_k h(k+2m)\tilde{g}(2n-k)=\delta(k)$$



Príklad impulzových charakteristík filtrov v biortogonálnej FB so symetrickými filtrami.

Riešenie filtrov	analýza	syntéza
symetrické	$\tilde{h}(n)$=(1, 2, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -2, 6, -2, -1)	$h(n)$=(-1, 2, 6, 2, -1) $g(n)$=(-1, 2, -1)
Antisymetrické (Kvadratický spline, rbio2.2)	$\tilde{h}(n)$=(1, 3, 3, 1) $\tilde{g}(n)$=(-1, -3, 3, 1)	$h(n)$=(-1, 3, 3, -1) $g(n)$=(-1, 3, -3, 1)

Maticový tvar 2kanálovaj FB

Pre 2-pásmovú banku filtrov môžeme operácie decimácie (pri analýze) a interpolácie (pri syntéze) rozpísať ako:

$$c(n)=\sum_k \tilde{h}(2n-k)x(k) \qquad d(n)=\sum_k \tilde{g}(2n-k)x(k)$$

$$\hat{x}(n)=\sum_k h(n-2k)c(k)+\sum_k g(n-2k)d(k)$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\overline{X}=T_a\overline{x} \qquad \hat{\overline{x}}=T_s\overline{X}$$

, kde $\overline{x}$, $\overline{X}$, $\hat{\overline{x}}$ sú stĺpcové vektory vstupného, transformovaného, výstupného signálu a $\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$ sú transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu. Predpokladajme konečnú dĺžku vstupného signálu a kruhovú konvolúciu vo FB. Potom $\overline{x}$, $\overline{X}$, $\hat{\overline{x}}$, $\mathbf{T}_a$, $\mathbf{T}_s$ môžemevyjadriť v tvare:

$$\overline{x}=(x(0),x(1),\ldots,x(N-1))^T$$

$$\overline{X}=(c(0),c(1),\ldots,c(N/2-1),d(0),d(1),\ldots,d(N/2-1))^T$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{H}} \\ \widetilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) \\ \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(-1) \\ \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) \\ \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{g}(1) & \tilde{g}(0) & \tilde{g}(-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots & g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots & g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots & \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) & \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) & \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) & g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix}$$

Matice $\widetilde{\mathbf{H}}, \widetilde{\mathbf{G}}$ sú rozmerov N x N/2. Ich riadky sú tvorené kruhovým posunom impulzových charakteristík príslušných filtrov. V maticiach $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ sú kruhovým posunom impulzových charakteristík tvorené stĺpce, pričom matice sú rozmerov N/2 x N.

Pri úplnej rekonštrukcii bez oneskorenia platí $\hat{\bar{x}} = \bar{X}$. Potom platí

$$\mathbf{T_a T_s} = \mathbf{I}_N = \mathbf{T_s T_a}$$

Vyjadrime:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{N/2}} & \mathbf{0_{N/2}} \\ \mathbf{0_{N/2}} & \mathbf{I_{N/2}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} \\ \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \mathbf{I} \qquad \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{H} = 0$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakríž“ = *vyjadrenie biortogonality*.

Naopak :

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

vyjadruje podmienky pre *elimináciu aliasingu* v časovej oblasti.

K spôsobu tvorenia matíc $\widetilde{\mathbf{H}},\widetilde{\mathbf{G}}$ a $\mathbf{H},\mathbf{G}$

I. $\widetilde{\mathbf{H}},\widetilde{\mathbf{G}}$ sú *decimačné matice* - najprv je signál konvolvovaný, potom podvzorkovaný (ukážeme na príklade $\widetilde{\mathbf{H}}$):

a) vyjadrením konvolúcie v maticovom tvare dostaneme

$$\widetilde{H}_{konv} = \begin{pmatrix} \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) \\ \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) \\ \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots & \tilde{h}(3) \\ \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \dots \\ \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \tilde{h}(1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{h}(3) & \tilde{h}(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

b) následným podvzorkovaním výstupu dostaneme

$$\bar{c} = \left(\widetilde{\mathbf{H}}_{konv}\bar{x}\right)\downarrow 2 = \left(\widetilde{\mathbf{H}}_{konv} \underset{riadky}{\downarrow} 2\right)\bar{x} = \widetilde{\mathbf{H}}\,\bar{x}$$

t.j. $\widetilde{\mathbf{H}}$ vytvoríme odstránením každého druhého riadku $\widetilde{\mathbf{H}}_{konv}$

II. $\mathbf{H},\mathbf{G}$ sú *interpolačné matice*- signál je najprov nadvzorkovaný, potom konvolvovaný, pre DP vetvu potom:

$$\hat{\bar{x}}_c = \left(\mathbf{H}_{konv}\right)\left(\bar{c} \uparrow 2\right) = \left(\mathbf{H}_{konv} \underset{stĺtĺp}{\downarrow} 2\right)\bar{c} = \mathbf{H}\,\bar{c}$$

,kde

$$H_{konv} = \begin{pmatrix} h(0) & \ldots & \ldots & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \ldots & \ldots & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & \ldots & \ldots & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \ldots & \ldots \\ \ldots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & \ldots \\ \ldots & \ldots & h(3) & h(2) & h(1) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & h(3) & h(2) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

t.j. $\mathbf{H}$ vytvoríme odstránením každého druhého stĺpca $\mathbf{H}_{konv}$