

Algoritmus výpočtu Waveletových radov a disktrétnej waveletovej transformácie

Nech funkcia $s(t) \in L(R)$. Potom súradnice jej *priemetu* do priestoru V_m môžeme vyjadriť ako:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$$

Získavame diskkrétne množinu *koeficientov mierky* $c_m(n)$.

Aká informácia sa do nich uložila? \rightarrow spravme spätnú rekonštrukciu

$$\hat{s}_{V_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n) \varphi_{m,n}(t)$$

Získavame $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ - *aproximáciu* (ap_m) funkcie $s(t)$ vo V_m .

Analogicky priemetom $s(t)$ do W_m získame *waveletové koeficienty* $d_m(n)$:

$$d_m(n) = \langle s(t), \psi_{m,n}(t) \rangle$$

Aká informácia sa do nich uložila? \rightarrow spravme spätnú rekonštrukciu

$$\hat{s}_{W_m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_m(n) \psi_{m,n}(t)$$

Získavame $\hat{s}_{W_m}(t) \in W_m$ - *detail* (de_m) funkcie $s(t)$ vo W_m .

Projekciou $s(t)$ do V_{m+1} a W_{m+1} môžeme získať koeficienty:

$$c_{m+1}(n) = \langle s(t), \varphi_{m+1,n}(t) \rangle$$

$$d_{m+1}(n) = \langle s(t), \psi_{m+1,n}(t) \rangle$$

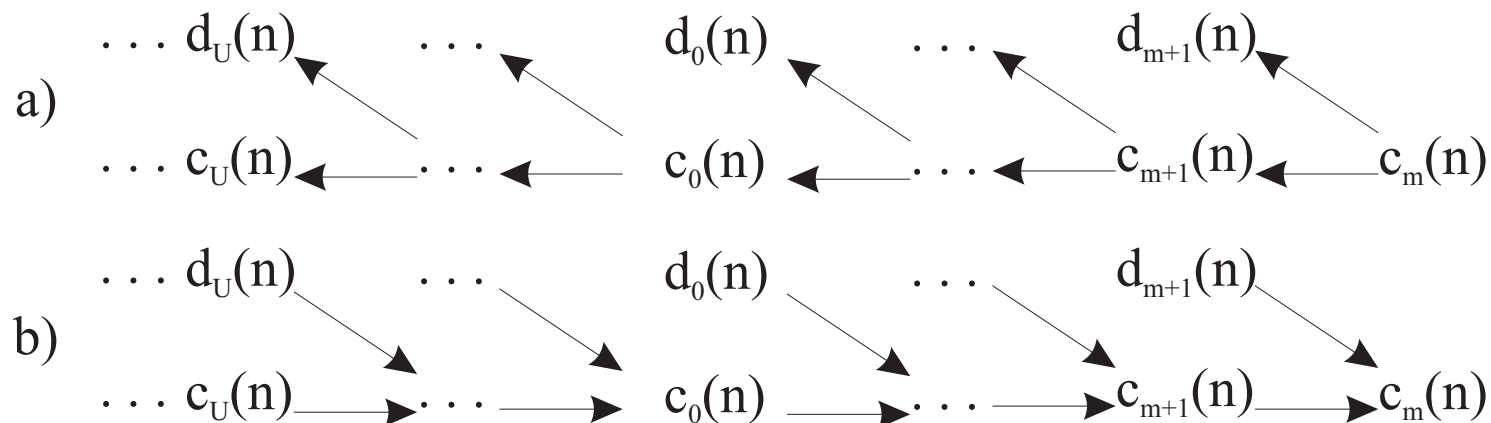
priamo. A podobne do všetkých ostatných priestorov W_i (to predsa chceme, nie?)

→ Keď poznáme vzťahy medzi bázami podpriestorov na susedných úrovniach rozlíšenia, môžeme tieto koeficienty vypočítať rýchlejšie?

Odpoveď je ÁNO:

rozklad:
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

Odvodenie:

Chceme odvodiť vzťah: $c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k)$

Vieme, že platí: $\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n)$

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Vynásobme obe strany druhej rovnice $2^{-m/2}$ a za t dosadíme $2^{-m}t - n$:

$$2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n) = 2^{-m/2} \cdot 2^{1/2} \sum_k h_{mr}(k) \varphi(2(2^{-m}t - n) - k)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n}(t) &= \sum_k h_{mr}(k) 2^{-(m-1)/2} \varphi(2^{-(m-1)}t - 2n - k) = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_m(n) &= \langle f(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle = \left\langle f(t), \sum_k h_{mr}(k) \varphi_{m-1,2n+k} \right\rangle = \sum_k h_{mr}(k) \langle f(t), \varphi_{m-1,2n+k} \rangle = \\ &= \sum_k h_{mr}(k) c_{m-1}(2n+k) = \sum_k h_{mr}(k-2n) c_{m-1}(k) \end{aligned}$$

T.j: $c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k)$

Výpočet waveletových radov

Pri výpočte *waveletových radov* z $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ môžeme zvoliť počiatočné V_m tak, aby $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j. začneme:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{n,m}(t) \rangle$$

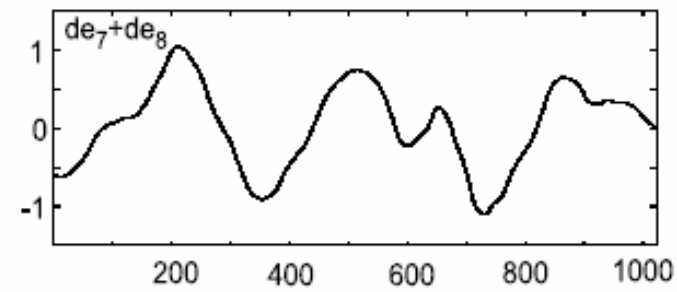
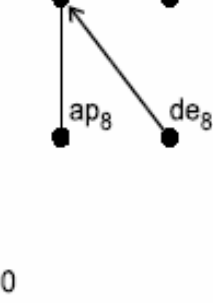
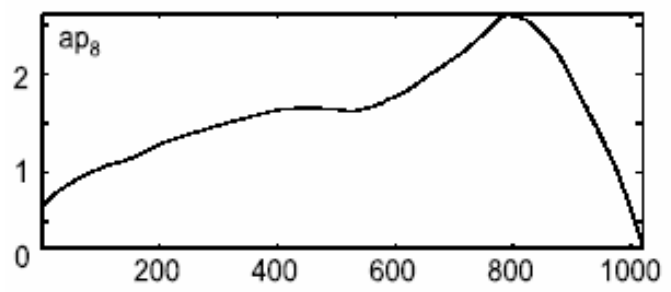
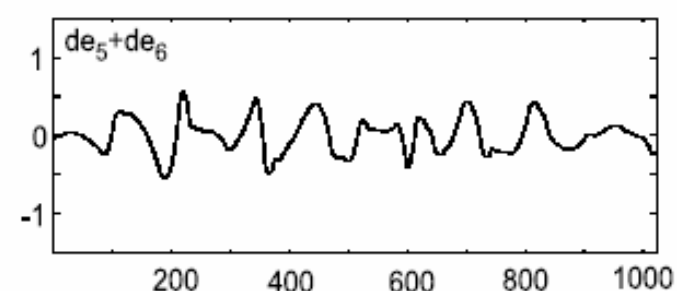
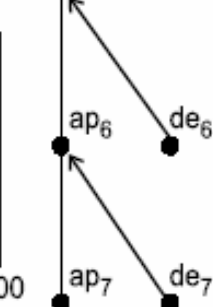
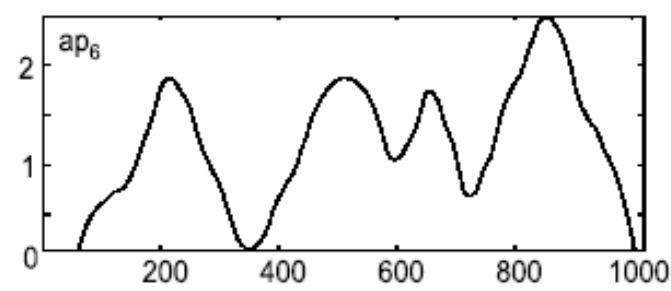
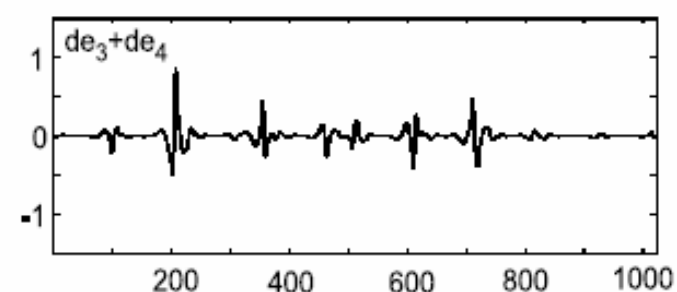
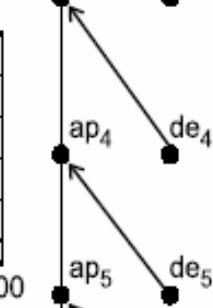
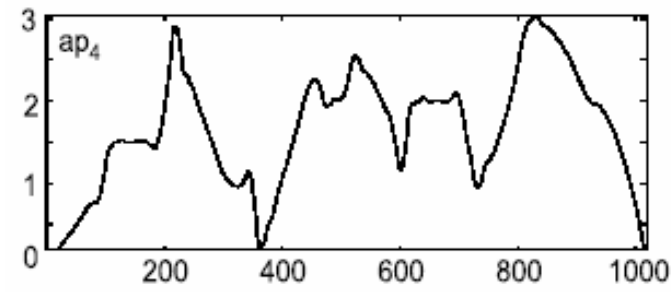
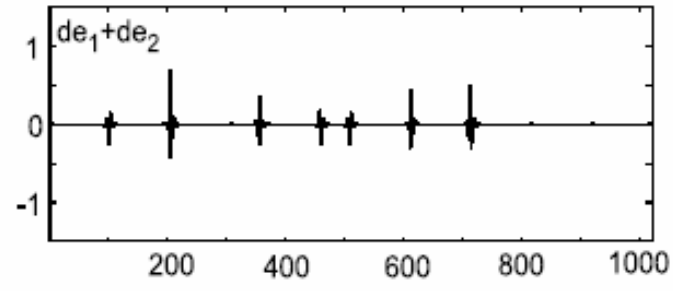
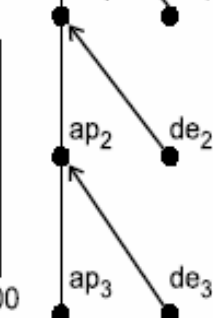
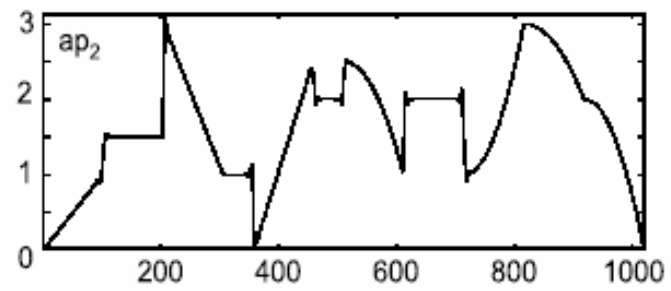
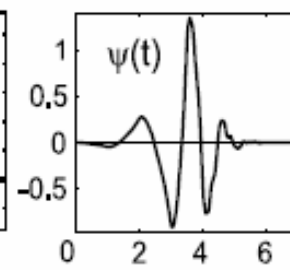
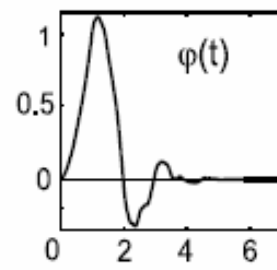
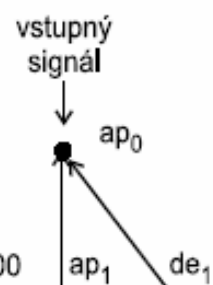
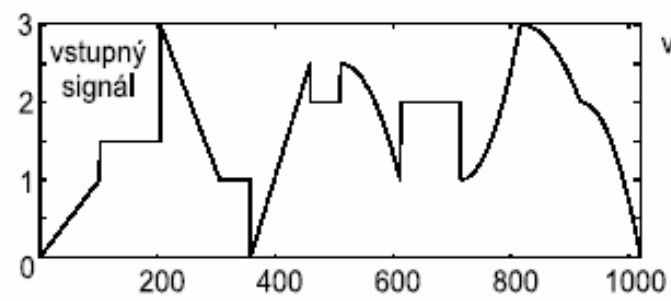
a ďalej pokračujeme v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahu na výpočet rozkladu, často iba po želanú úroveň rozkladu (napr. U).

V tejto reprezentácii môžeme $\hat{s}_{V_m}(t) \in V_m$ vyjadriť sumou rekonštrukcií signálu z koeficientov v príslušných podpriestoroch, t.j. (zbytkovej) aproximácie signálu $\hat{s}_{V_u}(t)$ a postupným pridávaním detailov $\hat{s}_{W_i}(t)$:

$$\hat{s}_{V_m}(t) = \hat{s}_{V_u}(t) + \hat{s}_{W_u}(t) + \hat{s}_{W_{u-1}}(t) \dots + \hat{s}_{W_m}(t)$$

t.j. napr. pre $m=0$:

$$ap_0(t) = ap_U(t) + de_U(t) + de_{U-1}(t) \dots + de_0(t)$$



Výpočet DWT

Pri výpočte *diskrétnej waveletovej transformácie* (DWT) interpretujeme vstupné dáta $x(n)$, $n \in Z$ ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ do V_0 a ďalej pokračujeme rozkladmi ako pri WR.

Ak je signál konečnej dĺžky L , potom pre max. počet úrovní rozkladu U platí

$$U \leq \log_2 L$$

Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskrétny v čase, *báza projekčných priestorov bude diskrétna, vytvorená z koeficientov pre zmenu rozlíšenia.*

Celá transformácia potom môže byť vyjadrená v maticovom tvare ako ostatné diskrétne lineárne transformácie.

rozklad:

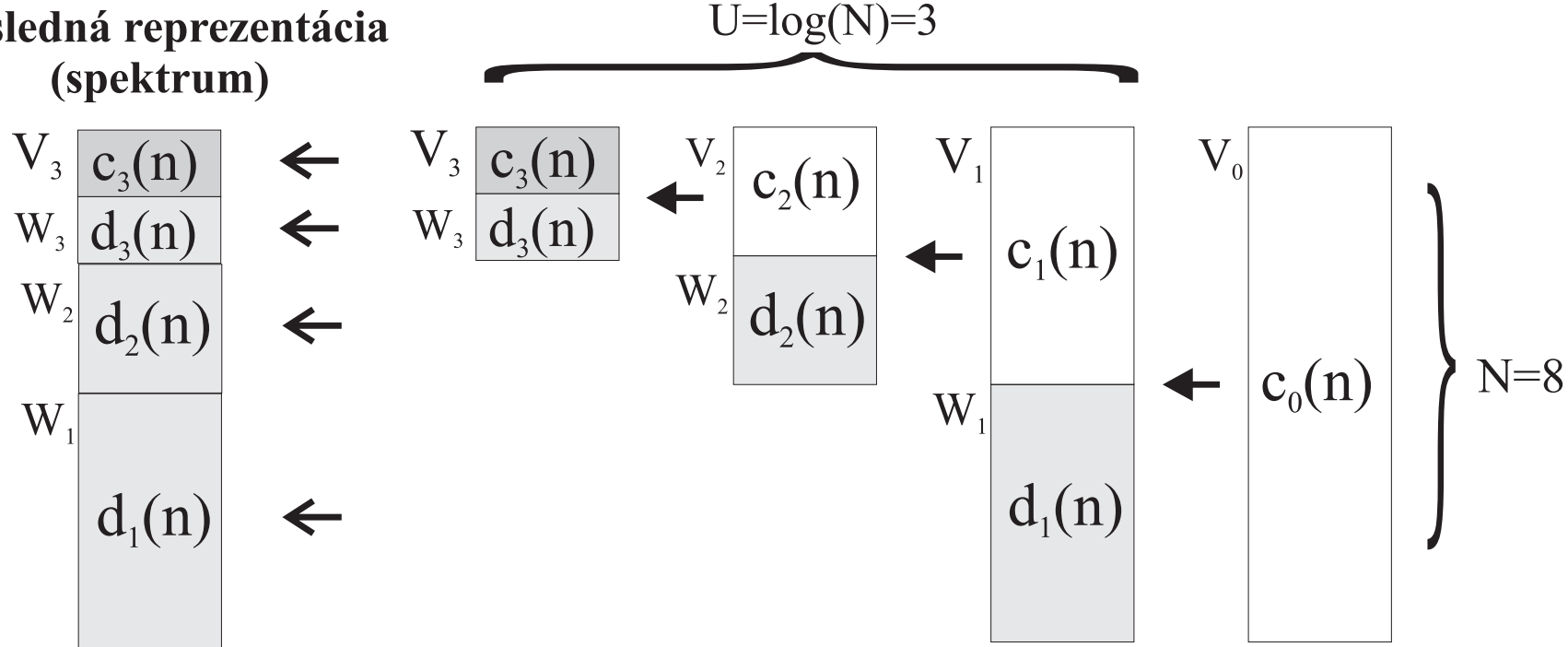
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:

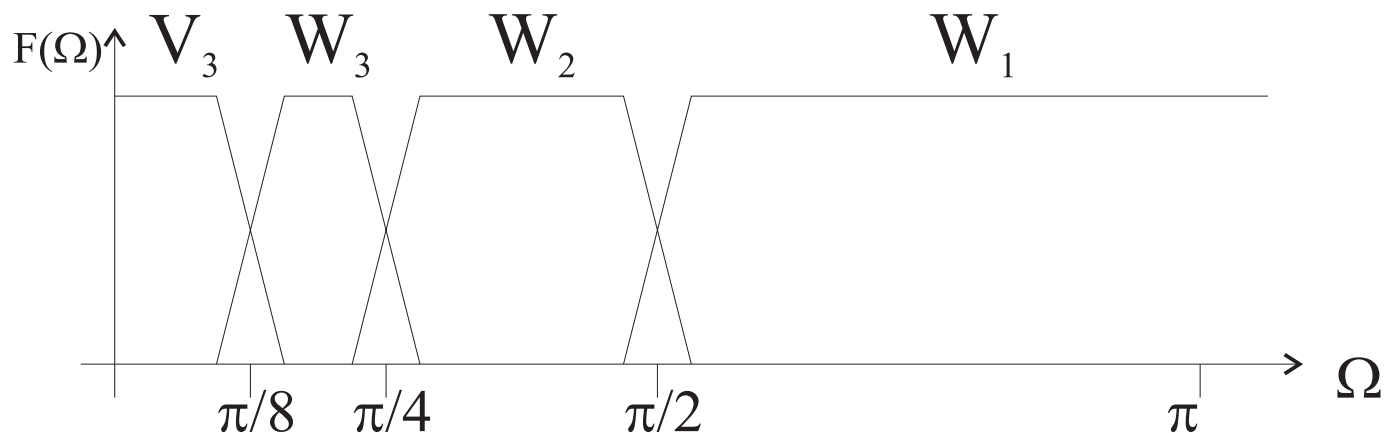
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$

Výpočet WR a DWT sa v praxi realizuje bankami filtrov.

Výsledná reprezentácia (spektrum)

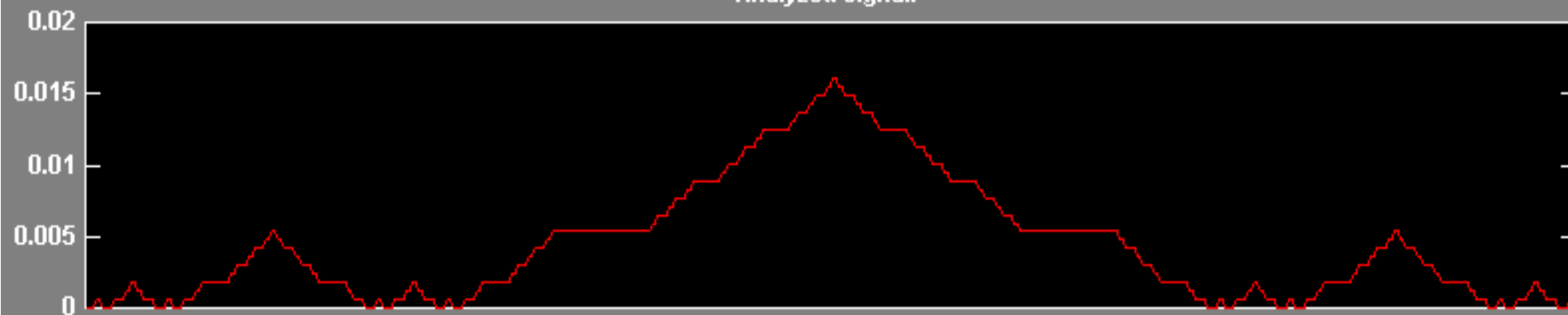


Výpočet koeficientov pri DWT a veľkosti vstupného vektora 8.

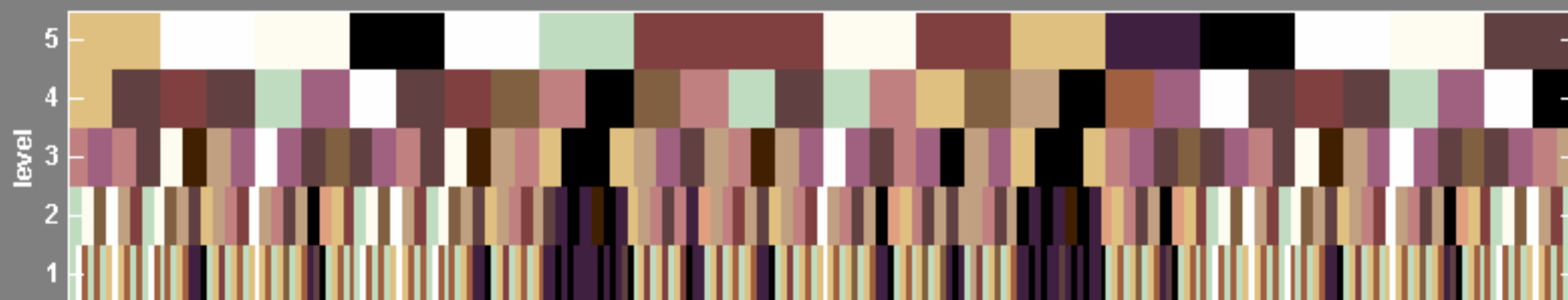


Označme diskretný vstup pre DWT ako $f(n)$. Na príklade jeho DTFT $f(\Omega)$ je znázornené, ktoré časti spektra budú vyjadrené v ktorých podpriestoroch.

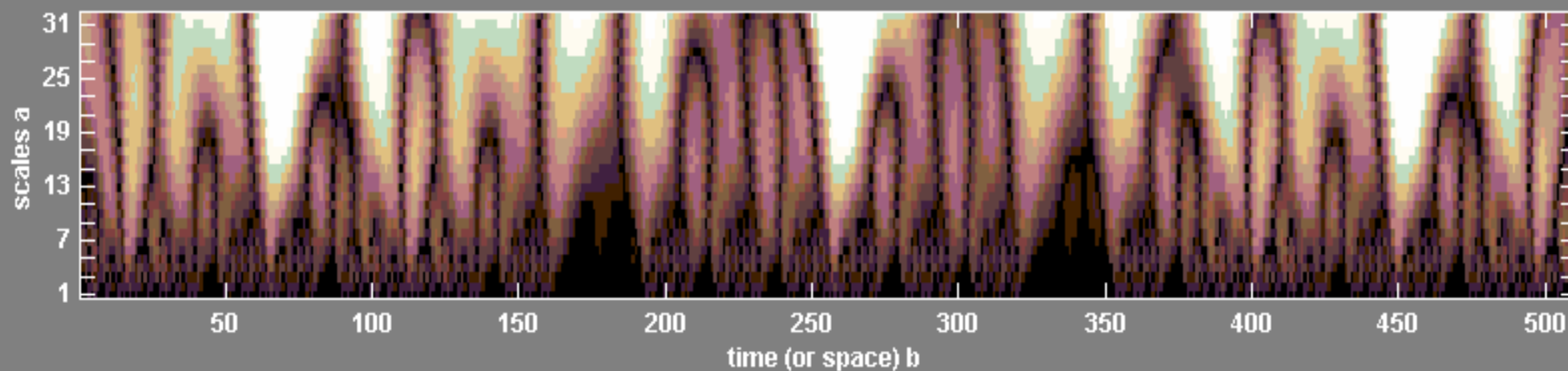
Analyzed signal.



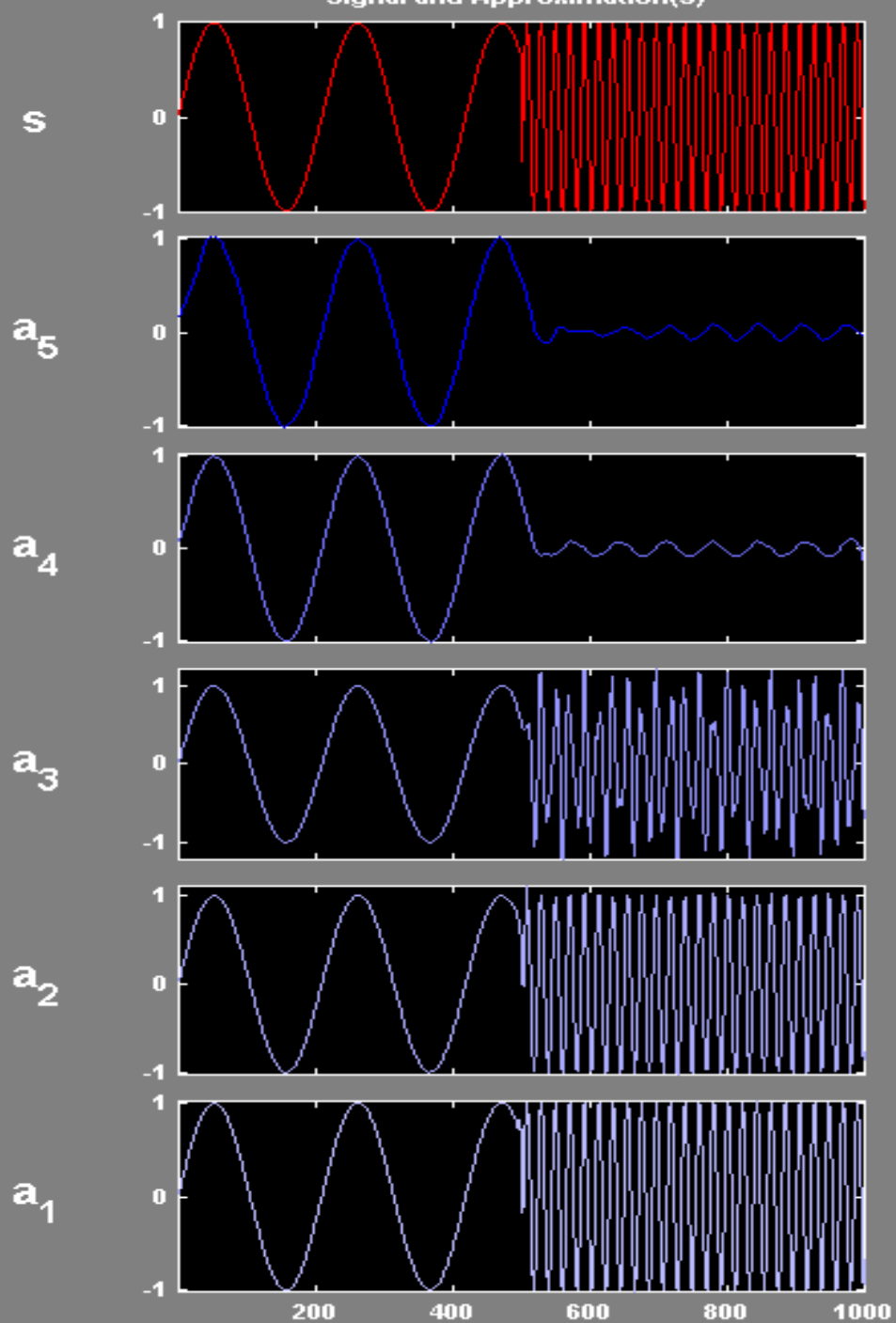
Discrete Transform, absolute coefficients.



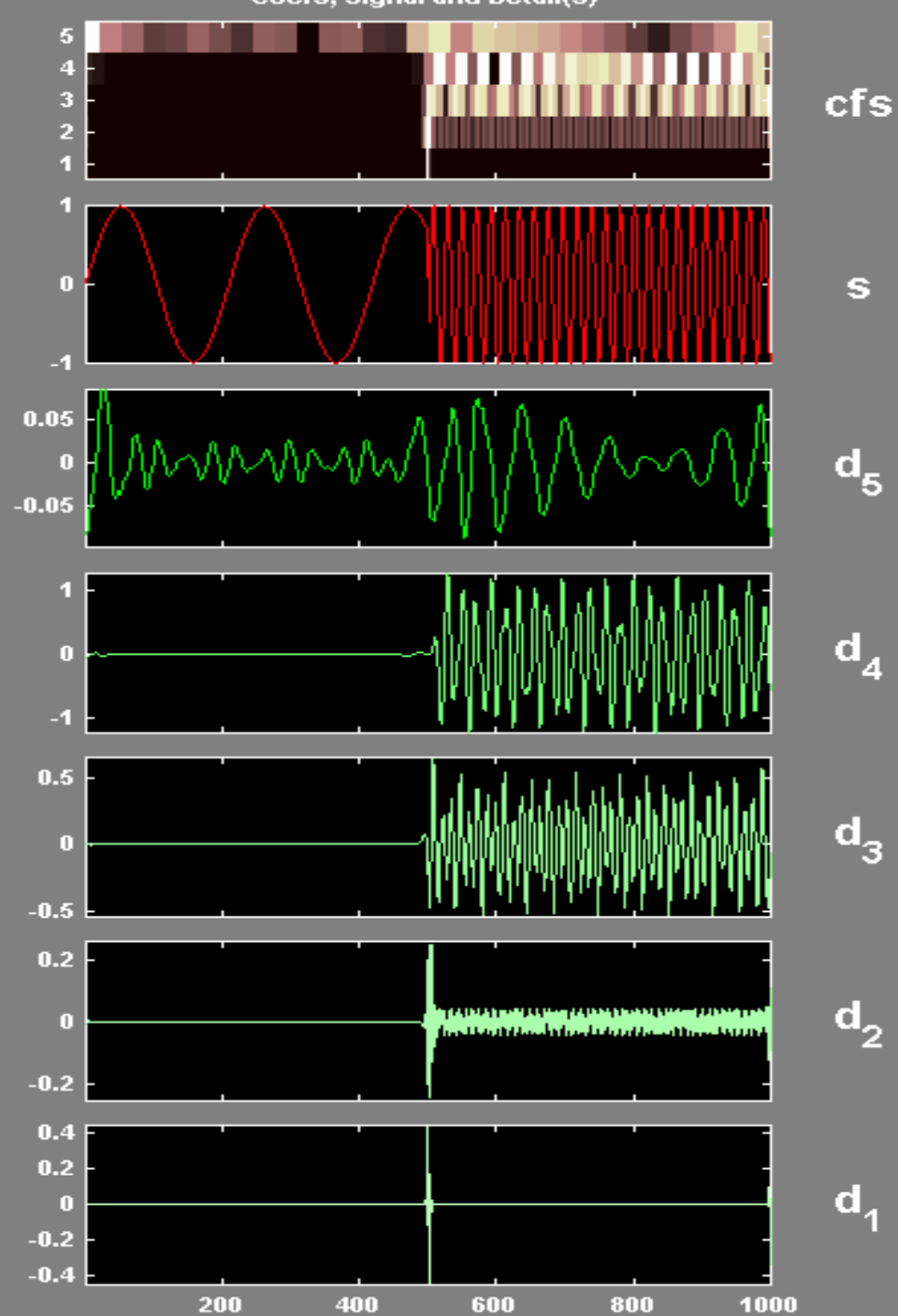
Absolute Values of $C_{a,b}$ Coefficients for $a = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots$



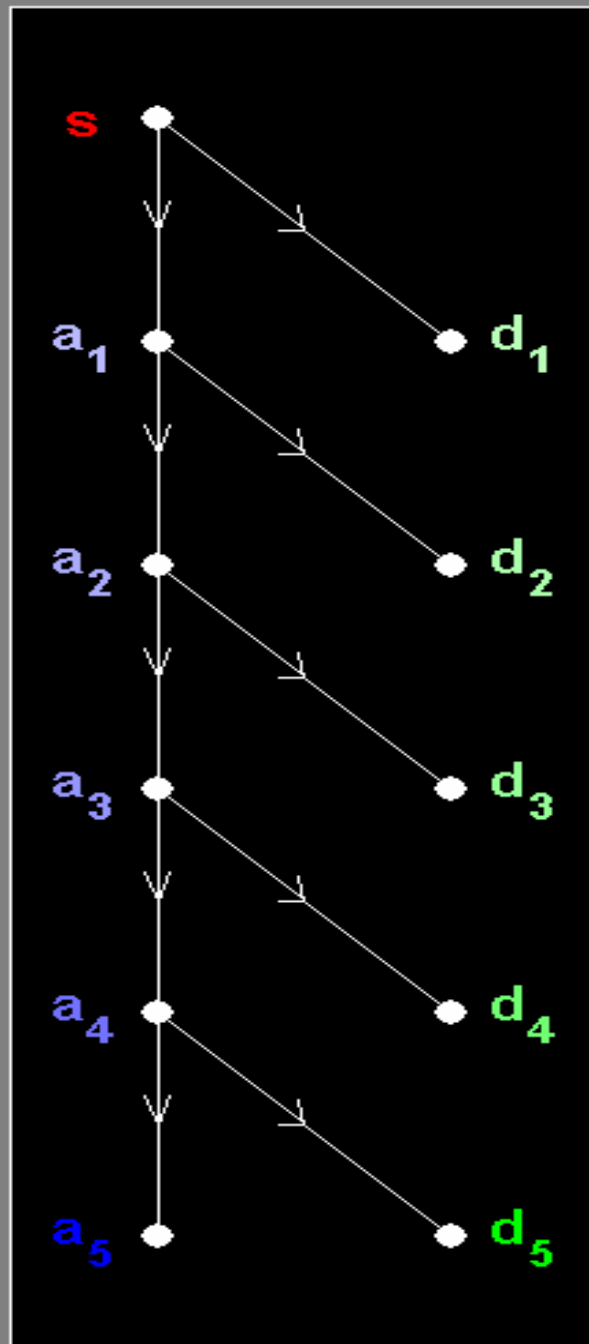
Signal and Approximation(s)



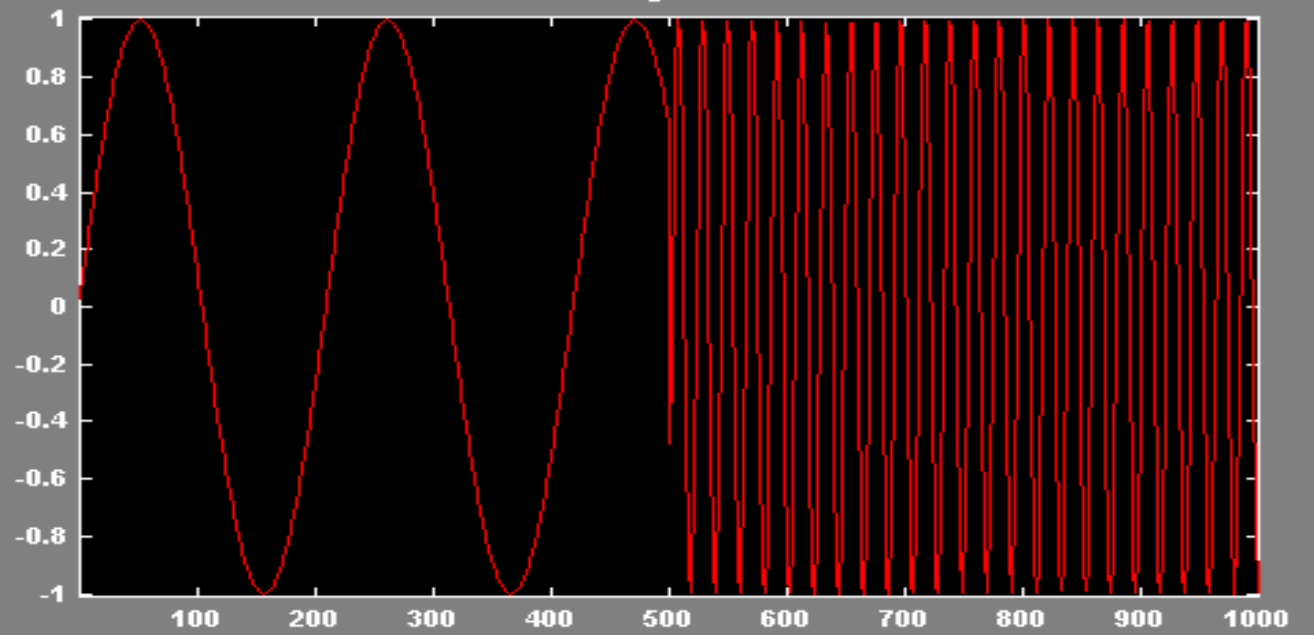
Coefs, Signal and Detail(s)



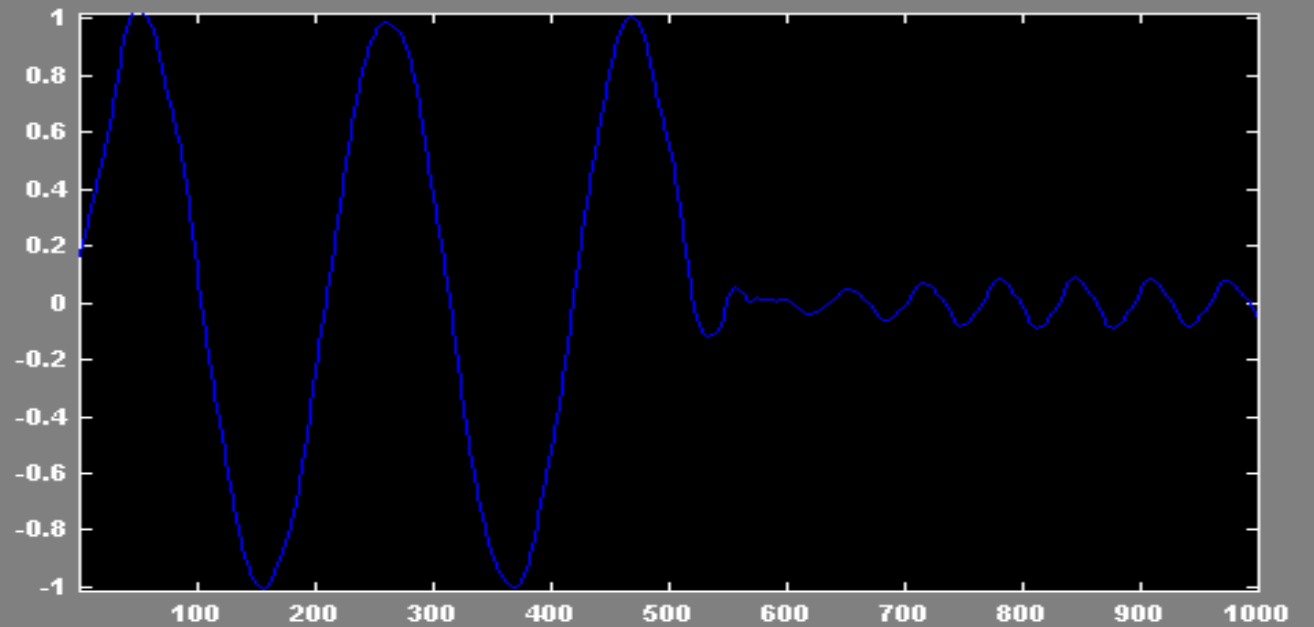
DWT : Wavelet Tree

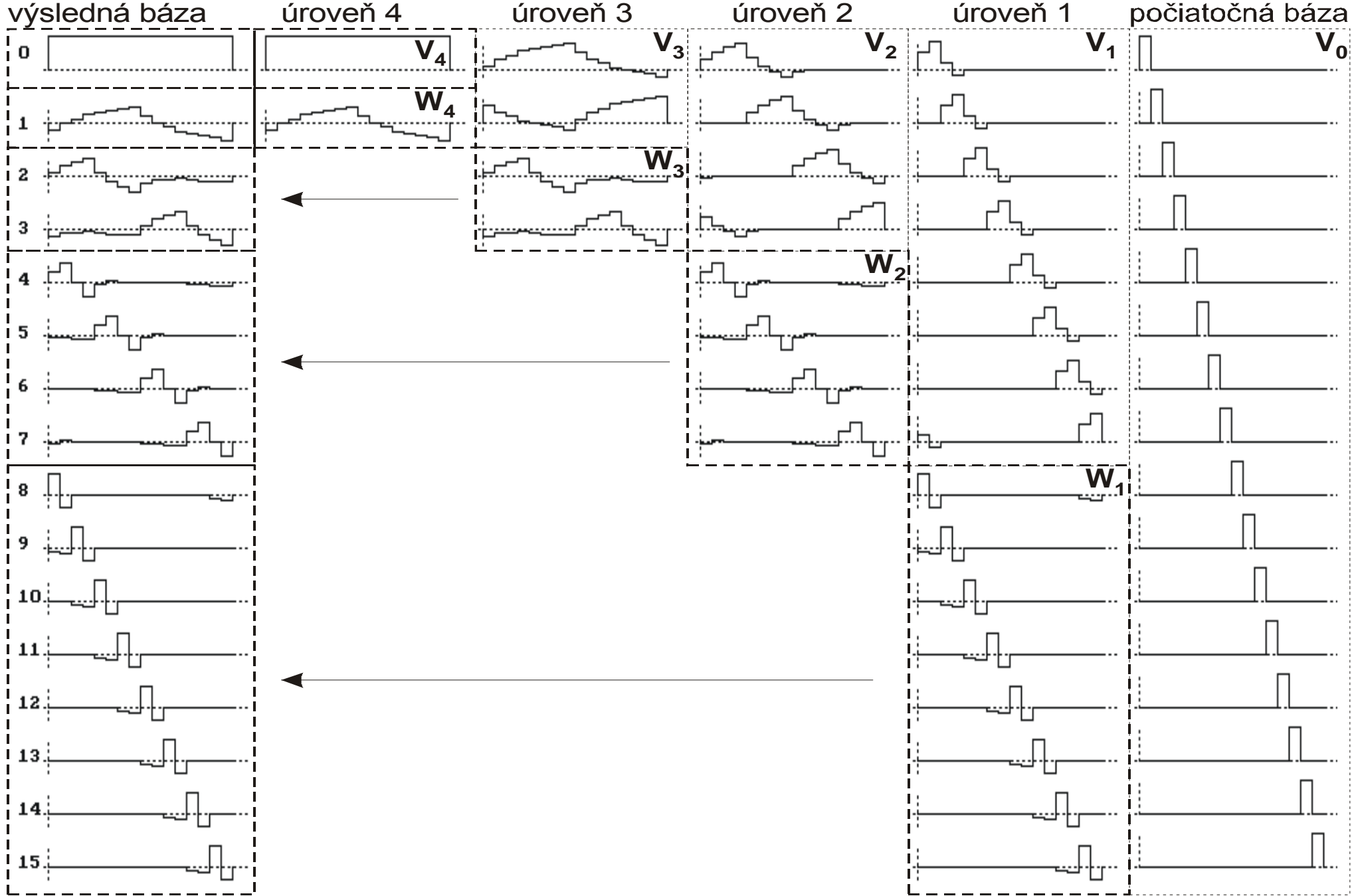


Signal

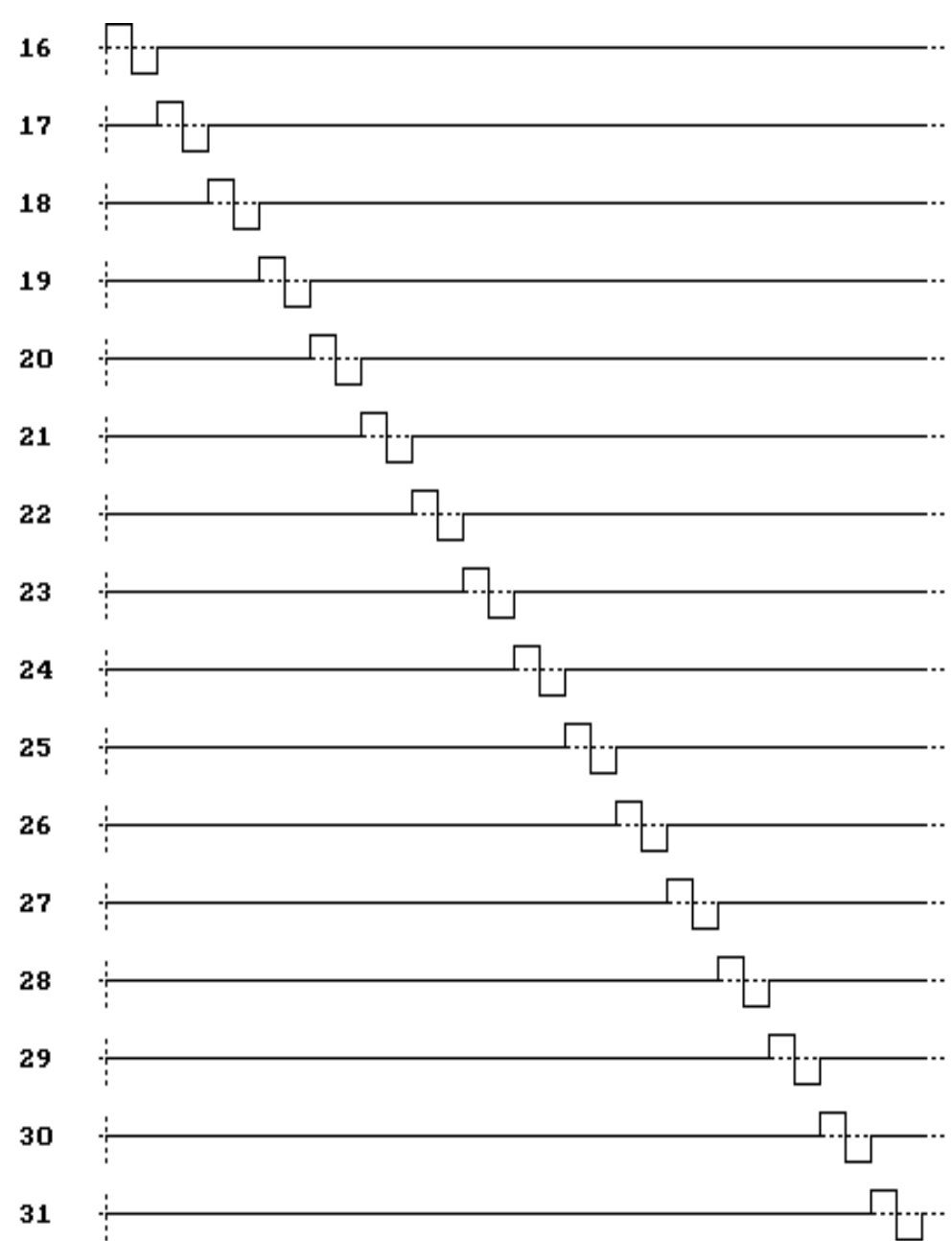
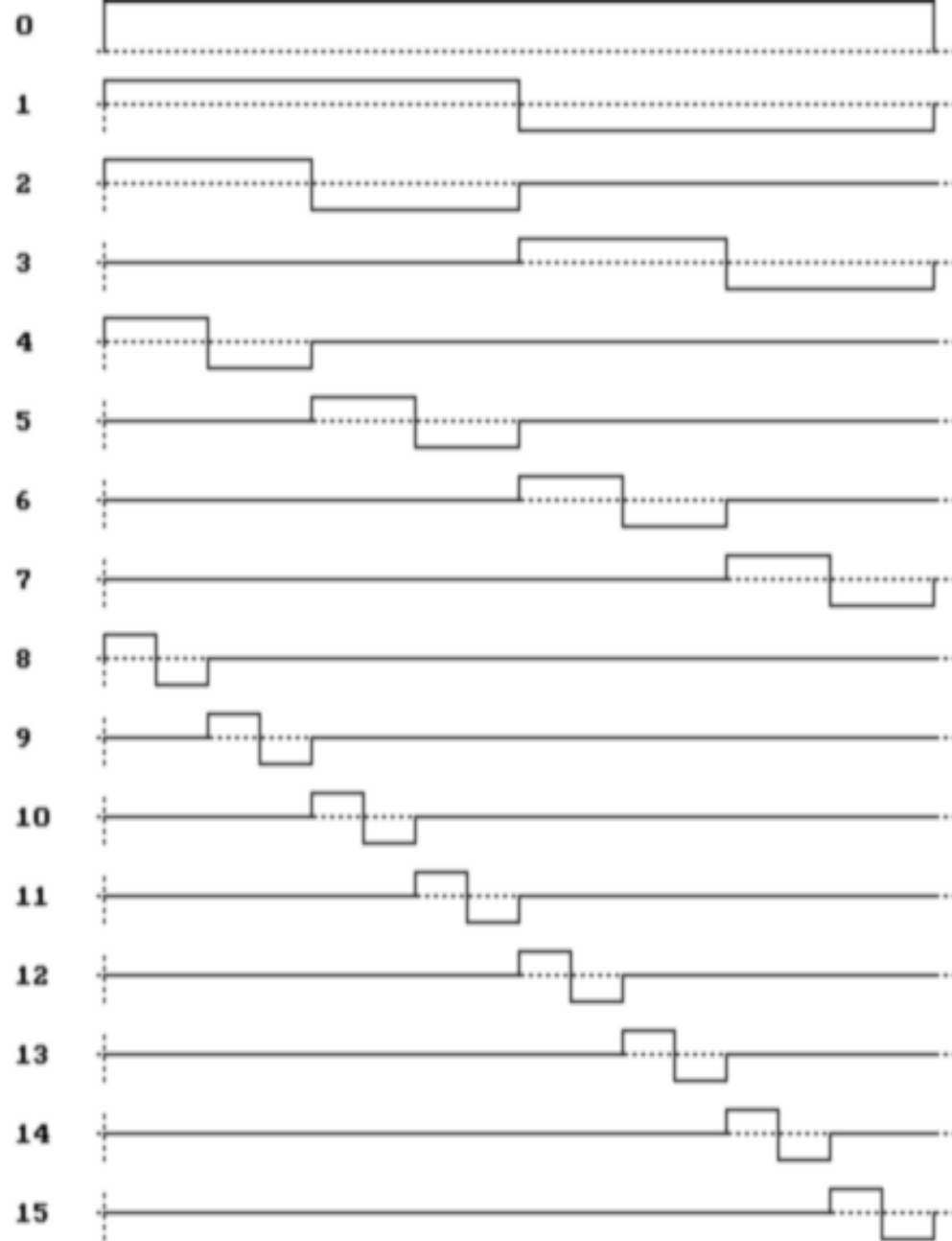


Approximation at level 5 (reconstructed).

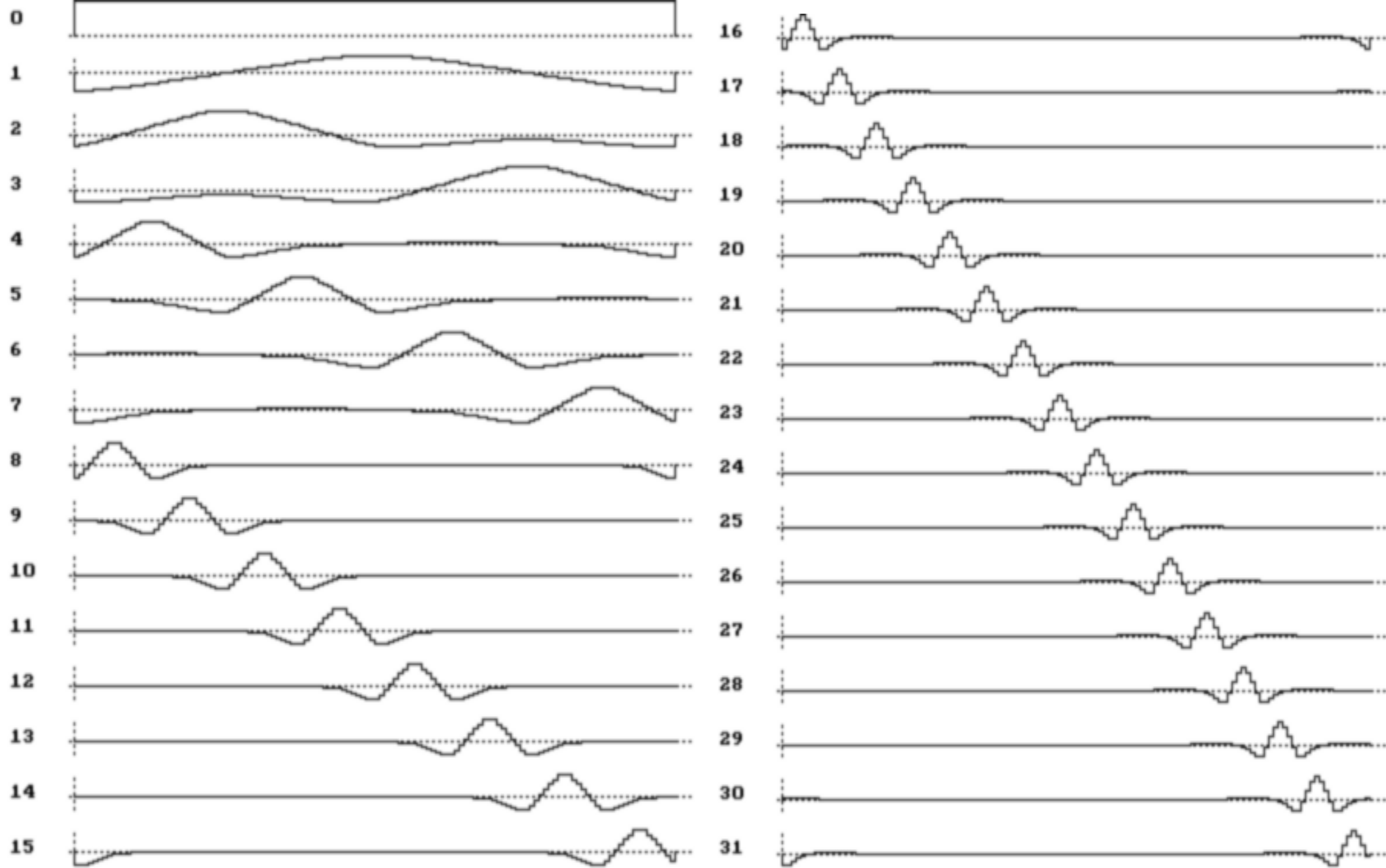




Štruktúra bázy pri ortogonálnej DWT s Db2. Pri vstupe do V_0 je báza tvorená posunmi jednotkových impulzov. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov predstavujú bázové vektory čoraz lepšiu aproximáciu waveletov.



Bázové funkcie diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=32$ pre Haarov wavelet



Prvých 32 bázových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

DWT v maticovom tvare.

Uvažujme nasledovné tvary rovníc:

Rozklad(analýza):
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

Rekonštrukcia(syntéza):
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{C}_m \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{T}_s \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

, kde T_a , T_s sú **štvorcové** transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu a \mathbf{C}_m resp. \mathbf{D}_m sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\mathbf{C}_m = (c_m(0), c_m(1), \dots, c_m(N_m - 1))^T$$

$$\mathbf{D}_m = (d_m(0), d_m(1), \dots, d_m(N_m - 1))^T$$

kde veľkosť vektorov je:

$$N_m = 2^{-m} N_0$$

Pozn.: v ďalšom texte budeme h_{mr} , g_{mr} používať bez označenia "mr".

Maticový zápis pri periodickom rozšírení signálu

$$\mathbf{H}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(-1) \\ \dots & h(-1) & h(0) & h(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & h(-1) & h(0) & h(1) \end{pmatrix}}^{N_m} \quad \mathbf{G}_m = \overbrace{\begin{pmatrix} g(0) & g(1) & \dots & \dots & \dots & g(-1) \\ \dots & g(-1) & g(0) & g(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & g(-1) & g(0) & g(1) \end{pmatrix}}^{N_m} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(-1) \\ \dots & h(-1) & h(0) & h(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & h(-1) & h(0) & h(1) \end{pmatrix}} \right\} \frac{N_m}{2}$$

$$\mathbf{H}_m^T = N_m \begin{pmatrix} h(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ h(1) & h(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & h(1) & \dots & h(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & h(0) \\ h(-1) & \vdots & \dots & h(1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_m^T = N_m \begin{pmatrix} g(0) & \vdots & \dots & \vdots \\ g(1) & g(-1) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & g(1) & \dots & g(-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & g(0) \\ g(-1) & \vdots & \dots & g(1) \end{pmatrix}$$

Analýza: $\mathbf{C}_{m+1} = \mathbf{H}_m \mathbf{C}_m \quad \mathbf{D}_{m+1} = \mathbf{G}_m \mathbf{C}_m$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix}$$

Syntéza: $\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m^T & \mathbf{G}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m^T & \mathbf{G}_m^T \end{pmatrix}$

Všeobecne

$$\mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

Vyjadrame:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0}_{N/2} \\ \mathbf{0}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T & \mathbf{G}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}\mathbf{H}^T & \mathbf{H}\mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}\mathbf{H}^T & \mathbf{G}\mathbf{G}^T \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{I} \quad \mathbf{H}\mathbf{G}^T = \mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakříž“ = podmienky *biortogonality*. A zároveň, aby bola splnená rovnosť na pravej strane, musia spĺňať $g_{mr}(n)$ dodatočnú podmienku:

$$g_{mr}(n) = \pm(-1)^n h_{mr}(M-n), \quad M\text{-nepárne}$$

V prípade Haarovej DWT:

- Rozklad (= dopredná transformácia)

$$c_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{h}_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k \tilde{g}_{mr}(k-2n)c_m(k)$$

$$\mathbf{C}_{m+1} = \tilde{\mathbf{H}}_m \mathbf{C}_m$$

$$\mathbf{D}_{m+1} = \tilde{\mathbf{G}}_m \mathbf{C}_m$$

$$\tilde{h}_{mr} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$$

$$\tilde{g}_{mr} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Príklad vstupného signálu:

$$c_0(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)^T \quad N_0 = 8$$

$$c_1(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} (3, 7, 11, 15)^T \quad d_1(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1, -1, -1, -1)^T$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_m \\ \tilde{\mathbf{G}}_m \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Reprezentácia signálu po jednom transformačnom kroku:

$$(c_1(n), d_1(n)) = \frac{\sqrt{2}}{2} (3, 7, 11, 15, -1, -1, -1, -1)^T$$

→ Ďalšie kroky analogicky ... (ešte 2 kroky)

• **Rekonštrukcia (= spätná transformácia)**

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n-2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n-2k)d_{m+1}(k)$$

$$\mathbf{C}_m = (\mathbf{H}_m \quad \mathbf{G}_m) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_s \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektory bázy, do ktorej sme transformovali, sú stĺpcové vektory z matice \mathbf{T}_s .