

Wavelety

*Prípustné wavelety
(zaručená rekonštrukcia)*

Wavelety s nekonečnou regularitou

Vlastnosti: + funkcia mierky $\varphi(\tau)$ existuje
+ analýza je ortogonálna
+ symetrické $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$
- $\psi(\tau)$ a $\varphi(\tau)$ nemajú kompaktný nosič
- rýchly algoritmus neexistuje

Použitie: SWT až DWT (s NIO filtrami)

Príklady: Meyerove, sinc wavelety

Približne prípustné wavelety

Vlastnosti: + $\psi(\tau)$ vyjadrené v uzavretom tvare
+ možná symetria $\psi(\tau)$
- rekonštrukcia nie je zaručená
- $\psi(\tau)$ nemajú kompaktný nosič
- funkcia mierky $\varphi(\tau)$ neexistuje
- analýza nie je ortogonálna
- rýchly algoritmus neexistuje

Použitie: analýza spojitých signálov

Príklady: Gaussov a Morletov wavelet
, mexický klobúk

▲ Semiortogonálne spline wavelety
bez kompaktného nosiča

Wavelety s kompaktným nosičom pre $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$ a rýchlym algoritmom výpočtu

Ortogonalné wavelety

Vlastnosti: + $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$ majú istý počet nulových momentov
+ KIO filtre pri implementácii WT
- možné iba asymetrické $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$, maximálne približne symetrické

Použitie: SWT až DWT rýchlym algoritmom

Príklady: Daubechies(Db), symlety, Coiflety, Burt-Adelson, Battle-Lemarie wavelety

Biortogonalný pár waveletov

Vlastnosti: + $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$ a ich duály majú istý počet nulových momentov
+ KIO filtre pri implementácii WT
+ možné iné vlastnosti analýzy a syntézy
+ možné symetrické $\psi(\tau)$, $\varphi(\tau)$
- strata ortogonality
a vlastnosti postupnej aproximácie

Použitie: SWT až DWT rýchlym algoritmom

Príklady: Biortogonalné spline, Cohononen-Daubechies-Feauveau (CDF) a Desaulerious-Dubuc(DD) wavelety

Analýza vlastností funkcií mierky a waveletov v ortogonálnom prípade

Označenie:

$\varphi(t), \psi(t)$ - funkcia mierky a wavelet spĺňajúca relácie zmeny rozlíšenia

$h(n), g(n)$ - zjednodušené označenie koeficientov pre zmenu rozlíšenia $h_{mr}(n), g_{mr}(n)$

$H(\omega), G(\omega)$ - DTFT koeficientov $h(n)$ a $g(n)$

Teorém 1 : Ak platí $\int \varphi(t)dt \neq 0$ potom $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$. Pozn.: podmienka $\int \varphi(t)dt \neq 0$ je nutná aby MRA bola kompletná.

Teorém 2 : Ak celočíselné posuny $\varphi(t)$ sú navzájom ortonormálne, t.j. $\int \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta(k)$ potom $\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$.

Dôsledky:

$$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1) = \sqrt{2}/2$$

$$\sum_n |h(n)|^2 = 1$$

Teorém 3 : Ak $\varphi(t)$ má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, N-1 \rangle$ a $\varphi(t-k)$ sú lineárne nezávislé, potom $h(n)$ má kompaktnú podporu na $0 \leq n \leq N-1$, t.j. $h(n) = 0$ pre $n < 0$ a pre $n > N-1$, dĺžka sekvencie $h(n)$ je N .

Vlastnosti $\varphi(t), \psi(t)$	Vlastnosti $h(n), g(n)$	Vlastnosti $H(\omega), G(\omega)$	Poznámka
$\int \varphi(t) dt = 1$	$\sum_n h(n) = \sqrt{2}$	$H(0) = \sqrt{2}$	Teorém 1
$\int \varphi(t)\varphi(t-k) dt = \delta(k)$	$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k)$ ak $k = 0$ platí $\sum_n h(n) ^2 = 1$	$ H(\omega) ^2 + H(\omega + \pi) ^2 = 2$	Teorém 2
$\sum_l \varphi(t-l) = \sum_l \varphi(l) = 1$	$\sum_n h(2n) = \sum_n h(2n+1)$	$H(\pi) = 0$	
$\int \psi(t) dt = 0$	$\sum_n g(n) = 0$	$G(0) = 0$	
$\int \varphi(t-n)\psi(t-m) dt = 0$	$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n)$	$ G(\omega) = H(\omega + M\pi) $	M je nepárne
	$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0$	$ H(\omega) ^2 + G(\omega) ^2 = 2$	

Prehľad vlastností pri ortonormálnych WR a DWT

- Aby mohli byť splnené podmienky pre $h(n)$, treba aby N , dĺžka $h(n)$ bola párna.
- $h(n)$ a $g(n)$ sa navzájom jednoznačne určujú. Potom ...
- K danému ortogonálnemu waveletu existuje jediná funkcia mierky (a naopak).
- Ak $h(n)$ spĺňa uvedené podmienky, sú zaručené iba základné vlastnosti $\varphi(t)$ (integrovateľnosť, ortonormalitu, ...) pričom $\varphi(t)$ môže mať extrémne neregulárny, prípadne fraktálový charakter.
- regularita waveletu a k nemu náležiackej funkcie mierky je rovnaká (wavelet je ich konečná lineárna kombinácia)
- Pri návrhu $h(n)$ s dĺžkou N , ostáva po splnení nutných $N/2+1$ podmienok ešte $N/2-1$ stupňov voľnosti. Tieto môžeme využiť aby $\varphi(t), \psi(t)$ resp. $h(n), g(n)$ mali požadované vlastnosti, ako napr. istú regularitu, aproximačné vlastnosti ...

Pozn.1: nutných $N/2+1$ podmienok je:

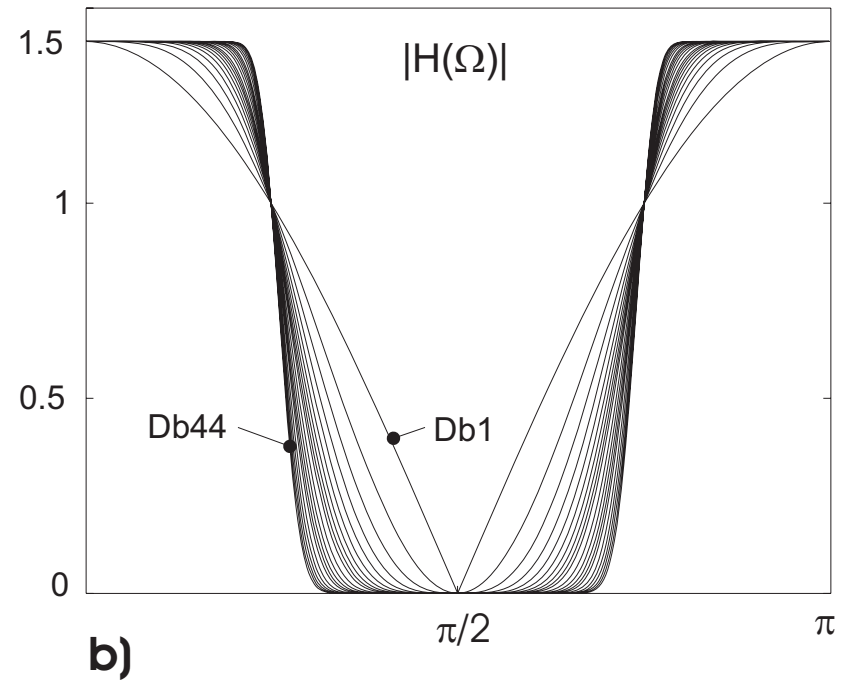
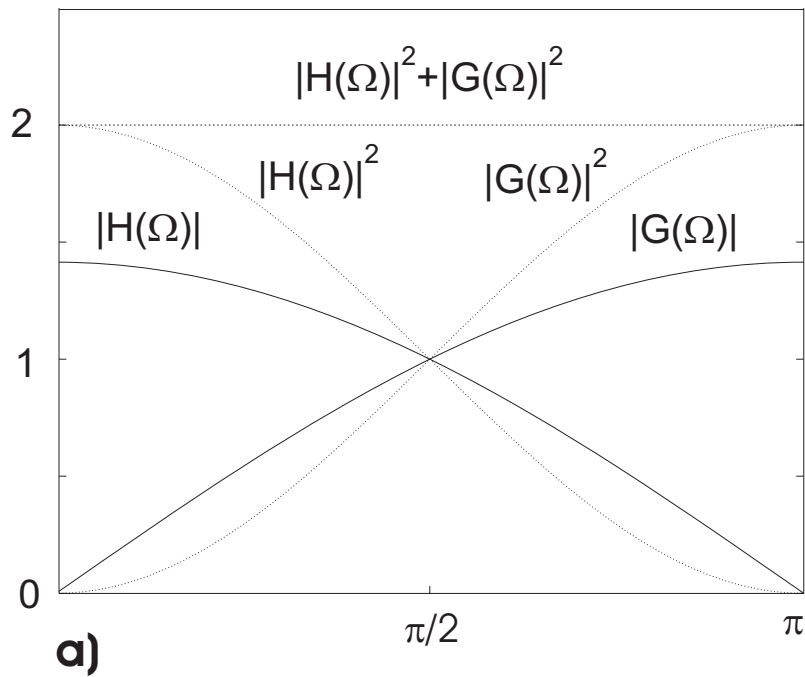
a) 1.podmienka: $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$ kvôli existencii $\varphi(t)$

b) $N/2$ podmienok kvôli ortonormalite $\varphi(t)$:

$$\sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

Pozn.2: Nech $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2$. Označme $P(\omega) = |H(\omega)|^2$. Potom P je tzv.

Polpásmový filter t.j. v Z rovine platí : $P(z) + P(-z) = 2$



DTFT dilatačných koeficientov a ich vlastnosti: a) celková situácia pri Db1 (Haarov) wavelete b) vplyv rádu waveletu na frekvenčné vlastnosti koeficientov mierky pri systéme Daubechieovej waveletov

Kaskádové algoritmy, generovanie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ vo frekvenčnej a časovej oblasti.

Ako vypočítať $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky?

Vychádzajme z rovníc:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

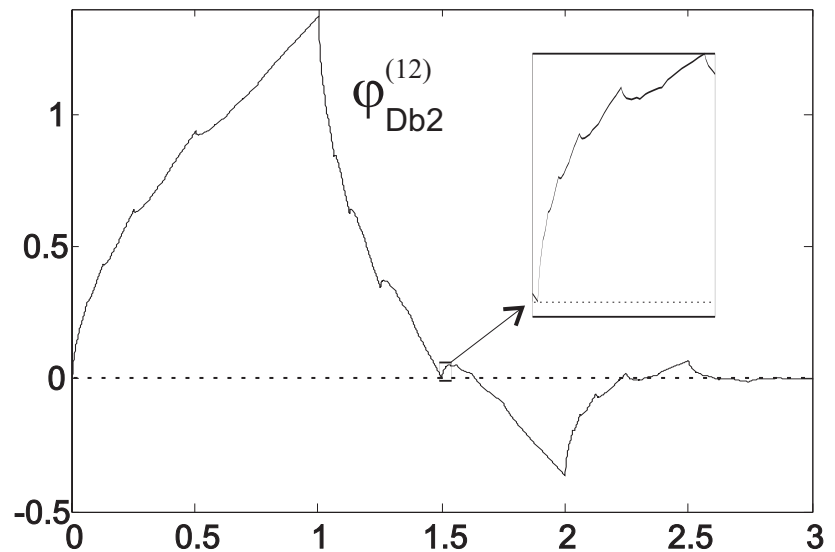
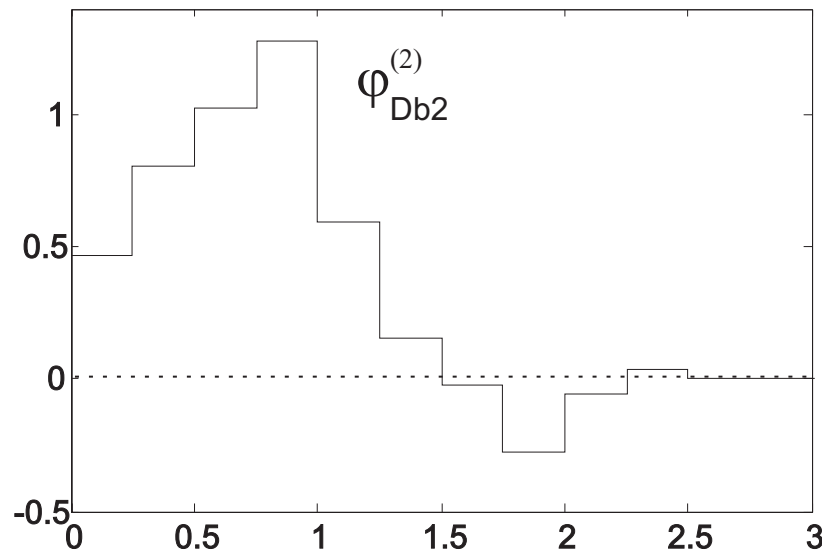
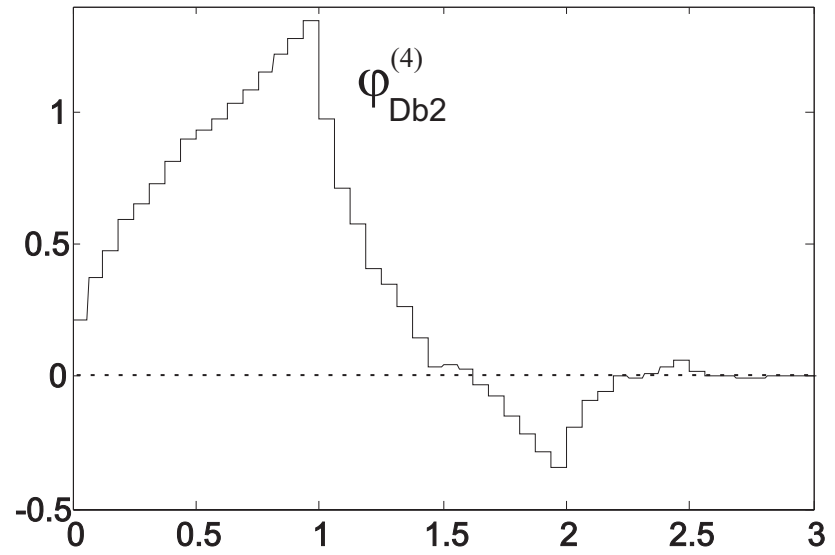
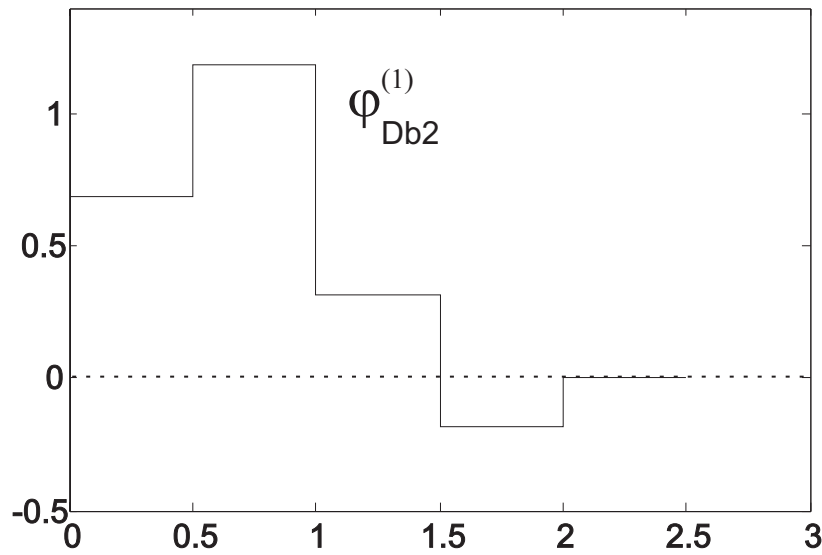
$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Tieto rovnice môžeme riešiť *iteračne*, pričom ak postup bude konvergovať k pevnému bodu, potom je pevný bod hľadaným riešením. Iterácie sú definované:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi^{(k)}(2t - n)$$

$$\psi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \psi^{(k)}(2t - n)$$

Uvedený iteračný postup sa nazýva aj *kaskádový algoritmus*.



Generovanie funkcie mierky Db2 waveletu kaskádovým algoritmom v čase. Výpočet zobrazený po 1,2,4 a 12 iteráciách. Počiatočný signál bola "Box" funkcia. Vpravo dole je zo zväčšeniny zrejмый fraktálový charakter. Porovnajete s tvarmi bázových funkcií priestorov V

Hľadáme teraz riešenie vo frekvenčnej oblasti.

Použitím Fourierovej transformácie dostaneme:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi^{(k)}(2t - n) \quad \rightarrow \quad \Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2) \Phi^{(k)}(\omega/2)$$

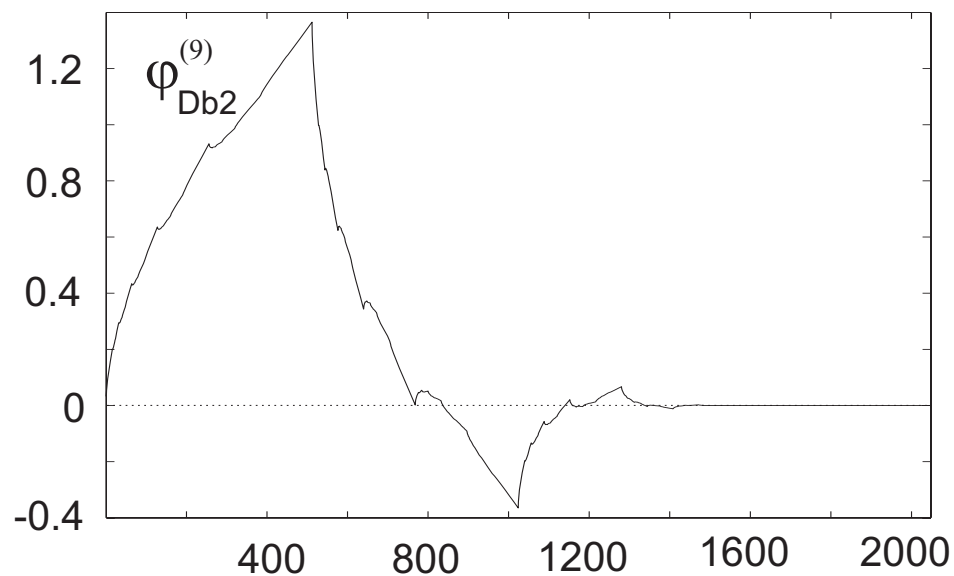
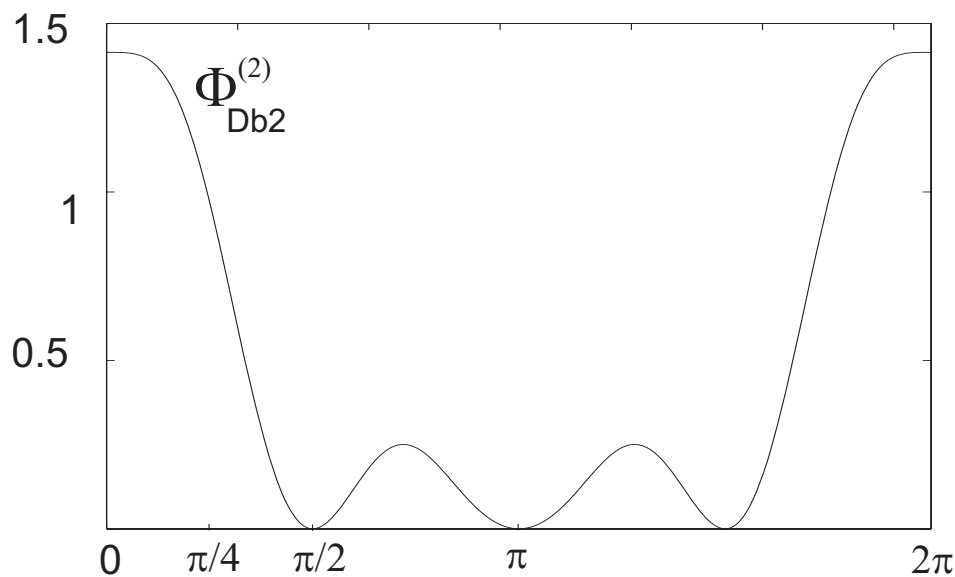
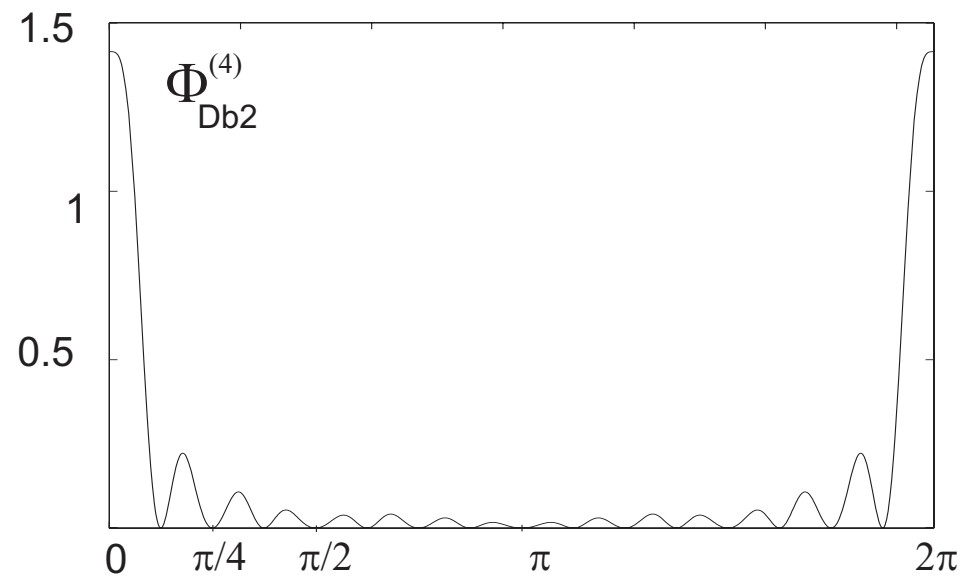
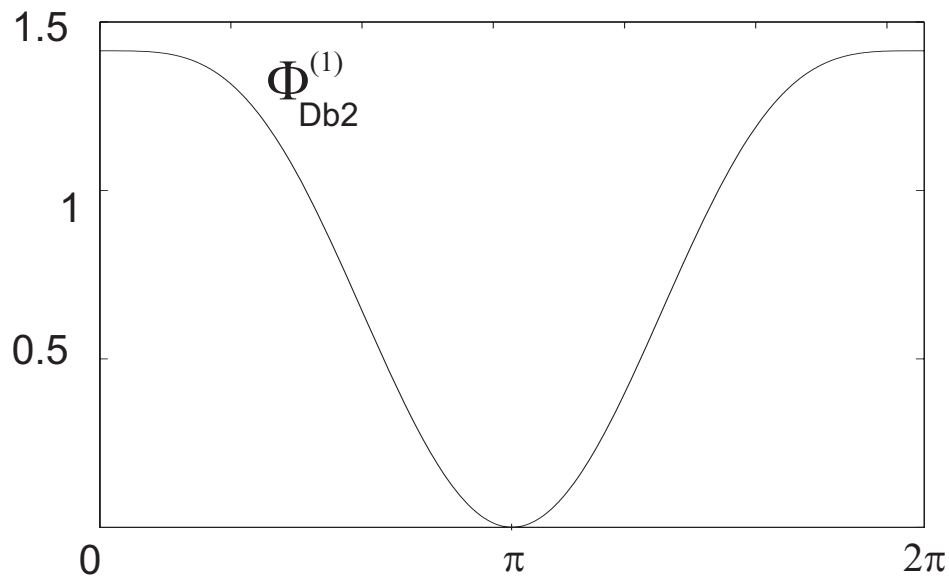
riešením tejto rovnice pre $k \rightarrow \infty$ dostávame

$$\Phi^{(\infty)}(\omega) = \Phi^{(\infty)}(0) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2^k) \right]$$

Ak táto limita existuje a je spojitá v $\omega = 0$ potom $\Phi(\omega) = \Phi^{(\infty)}(\omega)$. Analogicky:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_{mr}(\omega/2) \prod_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}(\omega/2^k) \right]$$

Výsledok oboch prípadoch nezávisí od tvaru $\varphi^{(0)}(t)$ ale iba od hodnoty $\Phi^{(k)}(0) = \int \varphi^{(k)}(t) dt = A_0 > 0$, ktorá je invariantná vzhľadom na iterácie.



Generovanie funkcie mierky Db2 waveletu kaskádovým algoritmom vo frekvencii.
 Zobrazená iterácia $n=1,2,4$ (vždy iba prvá perióda) Výsledná funkcia mierky je
 vypočítaná pre $n=9$ vzorkovaním periódy na 2048 vzoriek a následnou IDFT.

Momentové vlastnosti

k-te momenty $\varphi(t), \psi(t)$ sú definované:

$$m_{\varphi}(k) = \int t^k \varphi(t) dt \qquad m_{\psi}(k) = \int t^k \psi(t) dt$$

diskrétne k-te momenty $h(n), g(n)$ sú definované:

$$\mu_h(k) = \sum_n n^k h(n) \qquad \mu_g(k) = \sum_n n^k g(n)$$

z diskrétnych momentov μ_h, μ_g môžeme vypočítať *spojité momenty* pomocou:

$$m_{\varphi}(k) = \frac{1}{(2^k - 1)\sqrt{2}} \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \mu_h(l) m_{\varphi}(k-l) \qquad m_{\psi}(k) = \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \mu_g(l) m_{\varphi}(k-l)$$

na začiatku výpočtu si treba uvedomiť, že $m_{\varphi}(0) = 1$.

Počet nulových momentov $m_\psi(k)$ dáva informáciu o plochosti $H(\omega)$ a hladkosti $\psi(t)$ ktoré rastú priamo úmerne. Okrem toho, čím viac máme waveletových momentov je nulových, tým lepšiu aproximáciu získame pri projekcii signálu $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ do V_m .

Čím väčší počet nulových momentov $m_\varphi(k)$ je dôležitý pri aproximácii signálu $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ vo V_m pomocou vzoriek $f(t)$ namiesto projekčných koeficientov. Takisto sa zlepšuje aj symetria $\varphi(t)$.

Príkladom waveletového systému, ktorého dizajn je založený na momentových vlastnostiach $\varphi(t), \psi(t)$ sú tzv. *Coiflets*. Je to ortonormálny systém v ktorom sa snažíme nulovať momenty waveletu a rovnako aj funkcie mierky:

$$m_\varphi(k) = 0, \quad m_\psi(k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, L - 1$$

K-regulárne filtre

FIR filter s impulzovou odpoveďou $h(n)$, ktorá spĺňa podmienky v Tab.1 sa nazýva *K-regulárny* vtedy ak platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia:

1) $H(\omega)$ má *K-násobnú nulu* v $\omega = \pi$

2) prvých K -diskrétnych aj spojitých waveletových momentov je nulových, t.j.:

$$m_{\psi}(k) = 0, \mu_{\psi}(k) = 0, \text{ pre } k = 0, 1, \dots, (K - 1)$$

3) polynomicke sekvencie stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$.

4) polynómy stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $\varphi(t)$

Ak je $h(n)$ K -regulárny, potom Z transformáciu $h(n) : H(z) = \sum_n h(n)z^{-n}$ môžeme napísať v tvare:

$$H(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^K L(z)$$

pričom $L(z)$ nemá žiadne póly v $z = e^{i\pi}$. Ak N je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynóm $H(z)$ je stupňa $N-1$ a $L(z)$ stupňa $N-1-K$. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných $N/2$ podmienok pre ortogonalitu, musí byť aspoň stupňa $N/2-1$. Potom $K \leq N/2$.

Zároveň z podmienky existencie $\varphi(t)$ automaticky platí, že $h(n)$ je aspoň $K=1$ regulárne. Takže platí :

$$1 \leq K \leq N/2$$

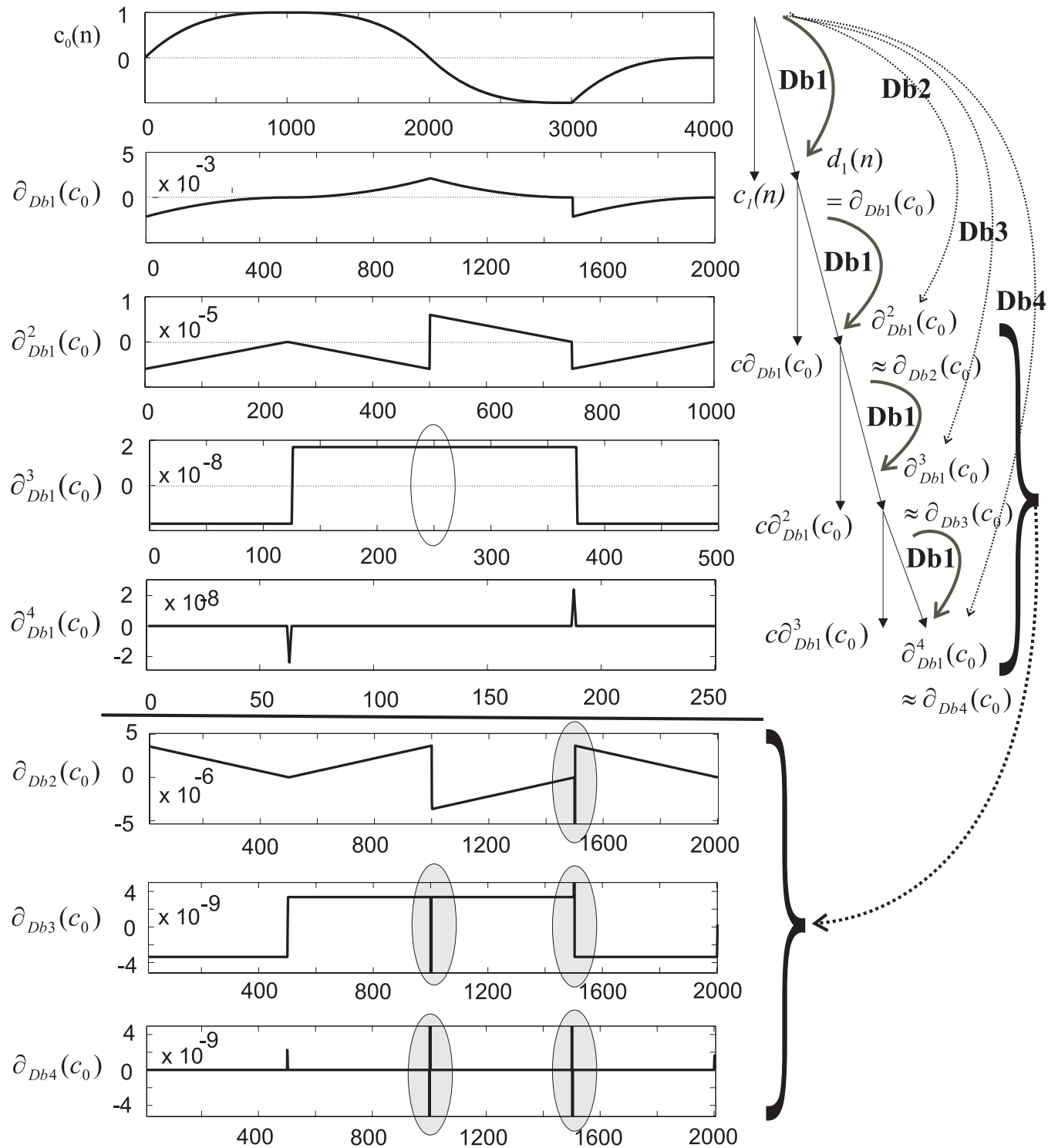
Wavelety ako diferenciálne operátory

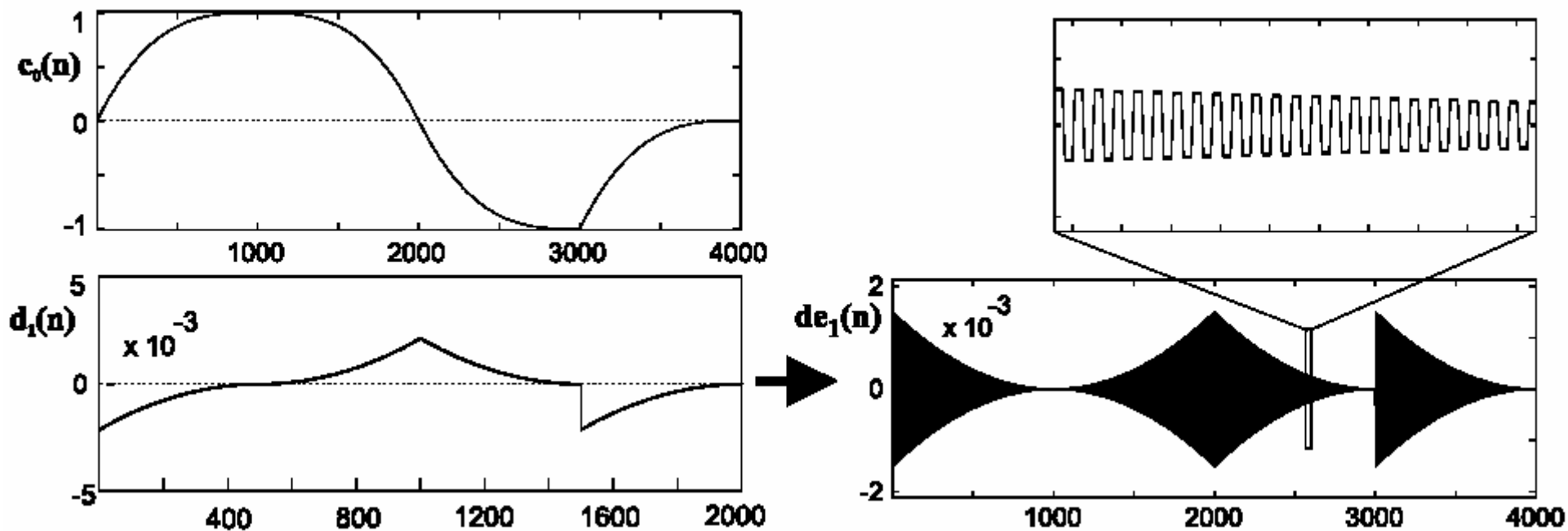
- Wavelety môžu slúžiť ako viacú rovňový derivátor (diferenciálny operátor)
- Nech $h(n)$ je K -regulárny filter, generujúci $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Potom waveletové koeficienty (spektrálne koeficienty po DWT) zodpovedajú K -tej derivácii vyhladenej verzie analyzovaného signálu:

$$\langle f(x), \psi(x-u) \rangle = \partial^K \{ \gamma * f \}(u)$$

kde \mathcal{Y} je vyhladzujúci operátor definovaný vo frekvencii ako

$$\Gamma(\omega) = \Psi^*(\omega) / (j\omega)^K$$





Obr. 2.6. Waveletové koeficienty signálu $c_0(n)$ na prvej úrovni rozkladu a ich detail (de_1), pri použití Db1 waveletu. Rozliatie detailu je dôsledkom nedostatočnej regularity Db1. (t. j. na obr. 2.5 by nemali rozliaty detail iba koeficienty $\partial_{Db4}(c_0) \approx \partial_{Db1}^n(c_0)$)

Príklady ortogonálnych waveletových systémov

- Haarov wavelet
- Sinc wavelety
- Battle-Lemarie wavelety(ortogonalizované Spline wavelety)
- Daubechies wavelety
- Coiflets

Príklady návrhu ortogonálnych waveletov

- Ortogonalizácia (napr. Battle Lemarie)
- *Parametrizácia koeficientov mierky
- *Spektrálna faktorizácia – wavelety s K nulovými waveletovými momentmi (napr. Daubechies)
Pozn. Analogicky sú navrhované *biortogonálne* CDF(Cohen-Daubechies-Feauveau) spline wavelety
- wavelety s K nulovými waveletovými momentmi a K nulovými momentmi funkcie mierky(Coiflets)
- wavelety s minimalizovanými momentmi(Odegard)
- *lifting schéma*

Parametrizácia koeficientov mierky

System 0. rádu - dĺžka $h(n)$ je 2

Nemá žiadne stupne voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0) + h(1) = \sqrt{2}$$

$$h^2(0) + h^2(1) = 1$$

Riešením je $h(n) = \{\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$

System 1. rádu - dĺžka $h(n)$ je 4

Má jeden stupeň voľnosti. Podmienky sú:

$$h(0) + h(1) + h(2) + h(3) = \sqrt{2}$$

$$h^2(0) + h^2(1) + h^2(2) + h^2(3) = 1$$

$$h(0)h(2) + h(1)h(3) = 0$$

Riešením je

$$h(0) = (1 - \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

$$h(1) = (1 + \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

$$h(3) = (1 + \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

$$h(2) = (1 - \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) / (2\sqrt{2})$$

Pozn:

Ak $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ → Haarov wavelet

Ak $\alpha = \pi/3$ → Daubechies2 wavelet

B-Spline wavelety

Spliny sú po častiach polynomickej funkcie daného stupňa s plynulým prechodom medzi jednotlivými časťami. B-Spline $\varphi_{SM}(t)$ stupňa M je tvorený M násobnou konvolúciou „Box“ funkcie:

$$B(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

a má kompaktnú podporu na intervale $\langle 0, M+1 \rangle$, $M-1$ spojitéch derivácií.

Platí: $\varphi_{S0}(t) = B(t) = \varphi_{Haar}(t)$, takže $\varphi_{S0}(t)$ môžeme generovať pomocou

koeficientov $h(n) = (1, 1)$ resp. ich N -násobnými konvolúciami. To odpovedá

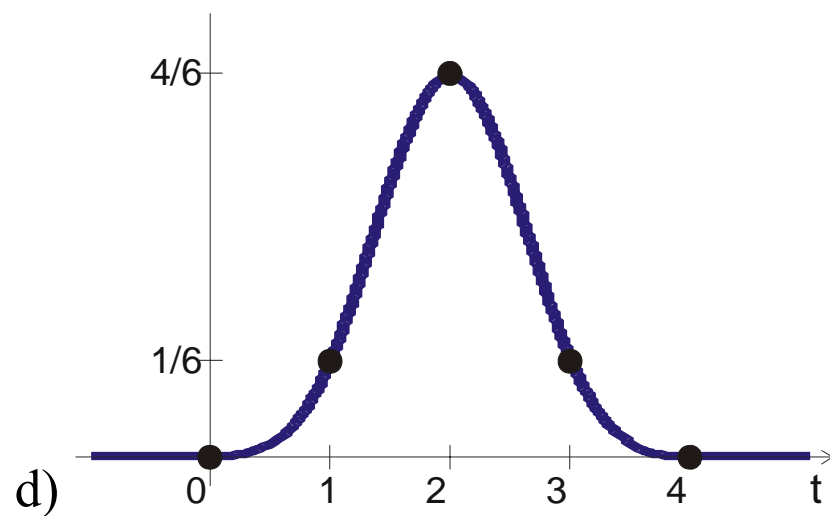
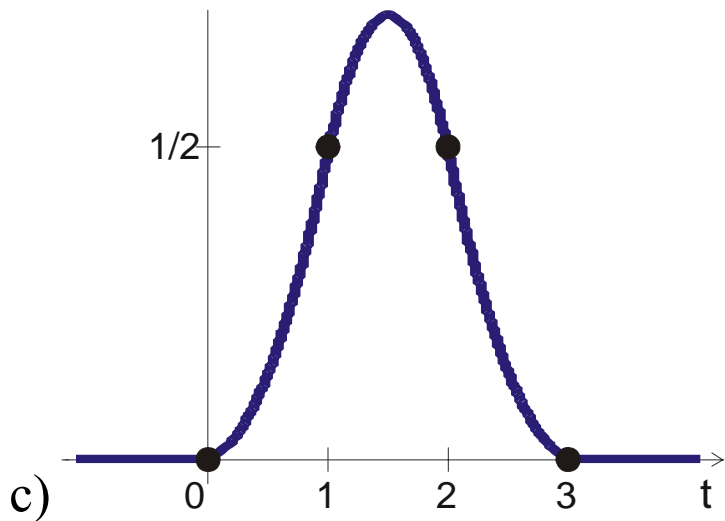
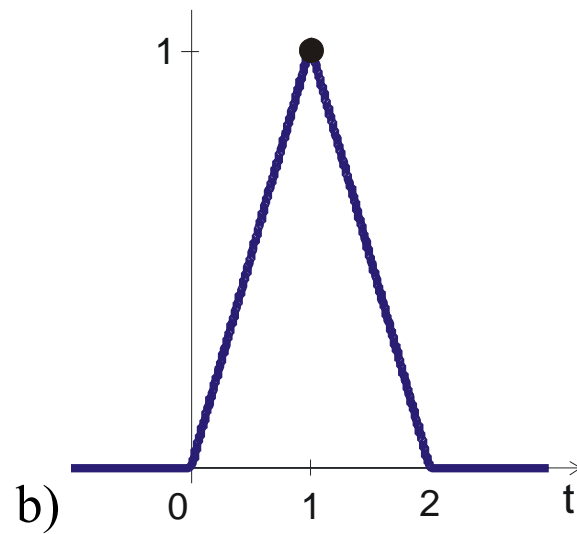
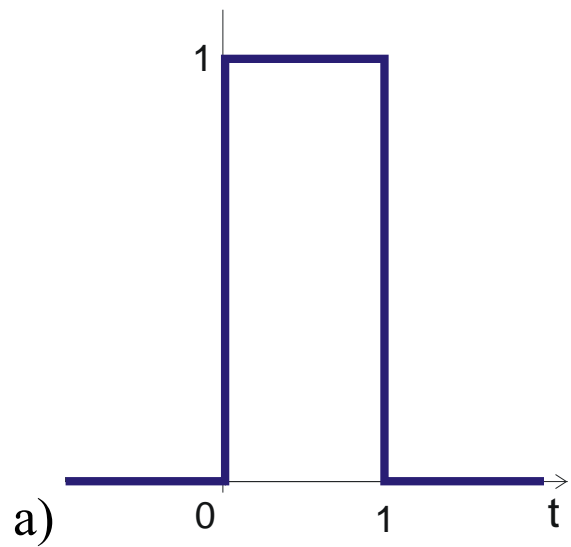
Pascalovmu rojuholníku na určenie kombinačných čísel. Koeficienty $h(n)$ pre B-spline funkcie mierky sú potom:

$$h_{S0}(n) = (1, 1) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad - \text{konštantný (spline nultého rádu)}$$

$$h_{S1}(n) = (1, 2, 1) \frac{\sqrt{2}}{4} \quad - \text{lineárny (spline prvého rádu)}$$

$$h_{S2}(n) = (1, 3, 3, 1) \frac{\sqrt{2}}{8} \quad - \text{kvadratický(...)}$$

$$h_{S3}(n) = (1, 4, 6, 4, 1) \frac{\sqrt{2}}{16} \quad - \text{kubický(...)}$$



B-Splínové funkcie mierky: a)Konštantná b)Lineárna c)Kvadratická d)Kubická

N-násobnej konvolúcii $h(n)$ odpovedá násobenie v Z rovine, t.j:

$$H_{SM}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{M+1}$$

Takže Spline majú $K=M+1$ násobnú nulu v $z=-1$. Dĺžka $h_{SM}(n)$ je $M+2$.

- Platí $\int \varphi_{SM}(t) dt = 1$ a $\sum_n h_{S0}(n) = \sqrt{2}$
- Základná otázka: Formujú funkcie $\varphi_{SM}(t)$ bázy V_0 ?
Formujú, lebo $\varphi_{SM,m,n}(t)$ spĺňajú dilatačné rovnice. $\varphi_{SM}(t)$ potom môžeme považovať za funkcie mierky.
- Spline majú symetrické $h(n)$, symetrické bázové funkcie, t.j. nemôžu tvoriť ortogonálne systémy (okrem triviálneho prípadu)
- Spline nie sú navzájom ortogonálne, t.j:
 $\langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle = a(k)$, pričom $a(k) \neq \delta(k)$

Semiortogonálne spline wavelety

Množiny $\{\phi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m . Semiortogonálne wavelety $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy W_m , pre ktoré platí:

$$V_m \perp W_m \quad V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

T.j. v MRA existuje len jedna hierarchia aproximačných podpriestorov

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

Oproti Biortogonálnemu prípadu to znamená že

$$V_m = \tilde{V}_m \quad W_m = \tilde{W}_m$$

Pri spline rádu M vypočítame koeficienty $g_{mr}(n)$ z koeficientov $h_{mr}(n)$ nasledovne:

$$g_{mr}(n) = \pm (-1)^n h_{mr}(M+1-n) a_M(M+1-n)$$

kde

$$a_M(k) = \langle \phi_{SM}(t), \phi_{SM}(t+k) \rangle$$

Prakticky

$$a_M(k) = 2^{M+1/2} h_{S(M+2)}(k)$$

POZOR: ak použijeme $g_{mr}(n)$ a $h_{mr}(n)$ v tomto tvare (KIO filtre) pri analýze, pri syntéze je nutné použiť NIO filtre (a naopak).

Biortogonálne spline wavelety

Množiny $\{\varphi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy V_m avšak $\{\psi_{SM,m,n}(t)\}$ tvoria neortogonálne bázy W_m tak, aby výsledná štruktúra podpriestorov bola birtogonálna, t.j. $L^2(\mathbb{R})$ potom existujú dve MRA

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

$$\dots \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots$$

atd...

Konkrétny spôsob návrhu Biortogonálnych B-spline waveletov uvedieme neskôr.

Návrh waveletov s K nulovými momentmi

Nech $h(n)$ s dĺžkou N je *K-regulárny filter*. Potom:

$$H(\Omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^K L(\Omega)$$

spĺňa $|H(\Omega)|^2 + |H(\Omega + \pi)|^2 = 2$ vtedy a len vtedy, ak

$$|L(\Omega)|^2 = Q(\sin^2(\Omega/2)) \quad \sin^2(\Omega/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}(e^{i\Omega} + e^{-i\Omega}) \right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

kde

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K-1+k}{k} y^k + y^K R(1/2 - y)$$

a $R(y)$ je *antisymetrický polynóm* taký, že $Q(y) \geq 0$ pre $y \in \langle 0, 1 \rangle$.

Ak $R(y) = 0$ ostávajú wavelety s maximálnym počtom nulových momentov N , tzv. *Daubechies* wavelety.

Ak $N > 2K$ potom $R(y)$ nám vyjadruje stupne voľnosti, ktoré môžeme použiť na modifikáciu vlastností waveletov.

Ako nájsť $L(z)$ pri danom $Q(z)$ také, pre ktoré $|L(\Omega)|^2 = Q(\Omega)$?

Autokorelácia a spektrálna faktorizácia.

Autokoreláciou sekvencie $h(n)$ budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k - n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k - n) e^{-i\Omega n} = H^*(\Omega) H(\Omega) = |H(\Omega)|^2$$

Platí:

$$\begin{aligned} |H^*(\Omega)| &= |H(\Omega)| & H(\Omega) H(\Omega) &\neq |H(\Omega)|^2 \\ & & |H(\Omega)^2| &\neq |H(\Omega)|^2 \end{aligned}$$

$P(\Omega)$ je reálna nezáporná funkcia

$$P(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \quad \leftrightarrow \quad Q(\Omega) = |L(\Omega)|^2$$

Vyjadrením $P(\Omega) = H^*(\Omega)H(\Omega)$ v Z -rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1})H(z)$$

, kde označenie * znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$, t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Navyše ak $h(n)$ je reálne, potom $P(z)$ má nuly aj v z_k^* a $1/z_k$.

Platí:

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left((1 - z_{1_i} z^{-1})(1 - z_{1_i}^* z) \right) \prod_{i=1}^{N_2} \left((1 - z_{2_i} z^{-1})(1 - z_{2_i}^* z) \right)$$

, kde N_1 je počet párov núl na jednotkovej kružnici (platí $|z_{1_i}|=1$, pár je vlastne dvojnásobný koreň) a N_2 je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice (platí $|z_{2_i}|<1$).

Pre danú $P(z)$ sa vyhovujúce $H(z)$ nazývajú *spektrálne faktory* $P(z)$. Tieto faktory nie sú jedinečné, pričom ortogonálne riešenie získame použitím iba jednej nuly z každého páru núl $P(z)$. Tieto riešenia majú rovnakú magnitudovú charakteristiku, líšia sa iba vo fázovej charakteristike. Dôležité je *riešenie s minimálnou fázou*, t.j. pri vytváraní $H(z)$ použijeme iba nuly v a na jednotkovej kružnici. Potom:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{i=1}^{N_1} (1 - z_{1_i} z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - z_{2_i} z^{-1})$$

Príklad: Zistite koeficienty $h(n)$, pre Daubechies wavelety s minimálnou fázou ak $N=6$.

Riešenie: Chceme max. počet nulových momentov, t.j. $K=3$, $R=0$.

Potom $Q(y) = 1 + 3y + 6y^2$,

$$y = \sin^2(\omega/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\omega)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) \right) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

$$Q(z) = \frac{3}{8}z^2 - \frac{9}{4}z^1 + \frac{19}{4} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}$$

$$\frac{8}{3}z^2 Q(z) = z^4 - 6z^3 + \frac{38}{3}z^2 - 6z^1 - 6z^0$$

nájdeme nulové body:

$$z_0 = 0.28725 - 0.15289i \quad 1/z_0 = 2.71275 + 1.44389i$$

$$z_0^* = 0.28725 + 0.15289i \quad 1/z_0^* = 2.71275 - 1.44389i$$

$$Q(z) = \frac{3}{8} z^{-2} (z - (0.28725 - 0.15289i))(z - (0.28725 + 0.15289i)) \\ (z - (2.71275 + 1.44389i))(z - (2.71275 - 1.44389i))$$

Výsledok však musíme dostať do tvaru:

$$H(z) = \sqrt{\alpha} \prod_{i=1}^{N_1} (1 - z_{1_i} z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - z_{2_i} z^{-1})$$

Úpravami dostaneme (prvé dva členy na pravej strane vynásobíme z^{-1} , z druhých vyjmemme nuly $1/z_0$ a $1/z_0^*$ a presunieme ich do α):

$$Q(z) = \alpha (1 - z^{-1}(0.28725 - 0.15289i))(1 - z^{-1}(0.28725 + 0.15289i)) \\ (1 - z/(2.71275 + 1.44389i))(1 - z/(2.71275 - 1.44389i))$$

kde

$$\alpha = \frac{3}{8} (2.71275 + 1.44389i)(2.71275 - 1.44389i) = \frac{3}{8} 9.443814$$

vytvoríme faktor s minimálnou fázou:

$$L(z) = \sqrt{\alpha} (1 - (0.28725 - 0.15289i)z^{-1}) (1 - (0.28725 + 0.15289i)z^{-1})$$

Potom:

$$H_{\min}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^3 L_{\min}(z)$$

čo je numericky

$$H_{\min}(z) = 0.33267z^3 + 0.80689z^2 + 0.45988z - 0.13501 - 0.08544z^{-1} + 0.03523z^{-2}$$

Výsledok odpovedá nekauzálnemu filteru. Kauzalitu dosiahneme vynásobením $H_{\min}(z)$ faktorom z^{-3} , t.j. oneskorením $h(n)$ o 3 takty. Potom

$$h(n) = \{0.33267, 0.80689, 0.45988, -0.13501, 0.08544, 0.03523\}$$

Pozn: pri výbere faktoru s *maximálnou fázou* dostaneme:

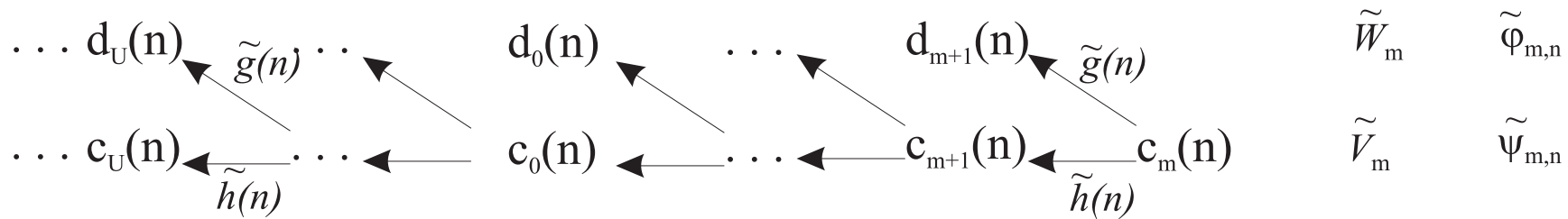
$$H_{\max}(z) = 0.03523z^5 - 0.08544z^4 - 0.13501z^3 + 0.45988z^2 + 0.80689z^1 + 0.33267$$

t.j. otočenú a posunutú verziu filteru s minimálnou fázou.

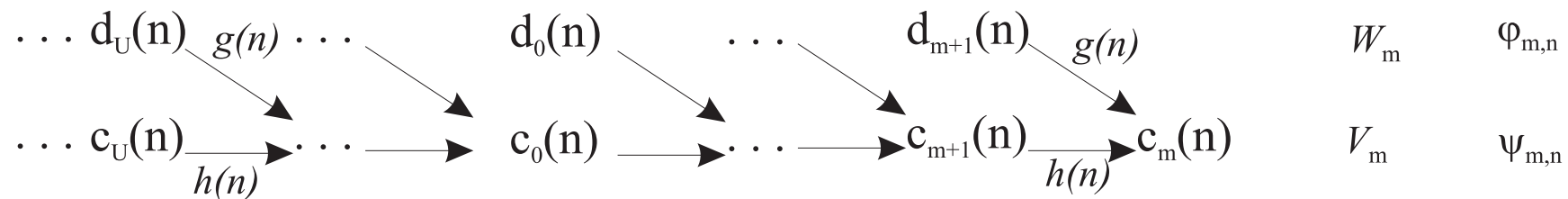
Biortogonálne wavelety a spektrálna faktorizácia

Opakovanie: Biortogonálny rozklad a rekonštrukcia:

Rozklad



Rekonštrukcia



Predpokladajme všeobecné riešenie faktorizácie $P(z)$ v tvare $P(z) = F(z)H(z)$.

Nulové body $P(z)$ označme z_i . Potom platia nasledovné pravidlá:

- 1) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie *reálnych filtrov*, z_i a z_i^* musíme použiť v pároch
- 2) aby $F(z)$ a $H(z)$ boli prenosové funkcie filtrov s *Lineárnou fázou*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť v pároch
- 3) Aby $F(z)$ a $H(z)$ mohli tvoriť *ortogonálne wavelety*, z_i a $1/z_i$ musíme použiť oddelene.

Zároveň platí:

Symetrický ortogonálny FIR filter s prenosovou funkciou $H(z)$, môže mať maximálne 2 nenulové koeficienty, pričom platí :

$$H(z) = \left(1 + z^{-N}\right) / \sqrt{2}$$

a N je nepárne.

Pri **ortogonálnom** riešení

- Z dvojice $F(z), H(z)$ použijeme $H(z)$ s minimálnou fázou a z neho vygenerujeme ortogonálny systém

Pri **biortogonálnom** riešení

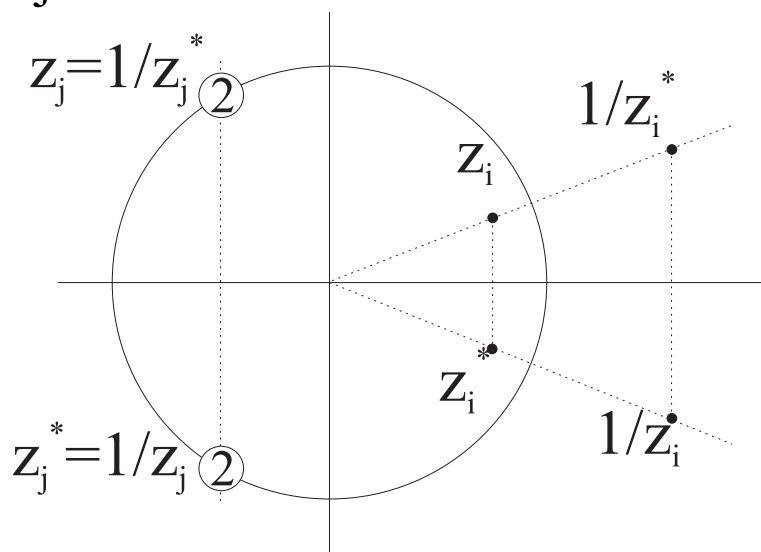
- Dvojicu $F(z), H(z)$ použijeme tak, že $H(z)$ a $\tilde{H}(z) = F(z)$ budú spolu generovať biortogonálny systém

Návrh Biortogonálnych waveletov

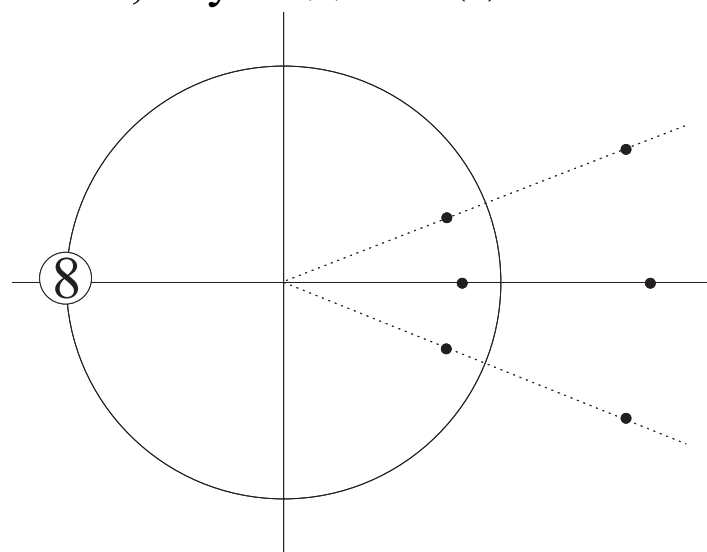
Začneme navrhovať ortogonálny wavelet s K nulovými momentmi avšak výsledok faktorizujeme až po získaní polpásmového filtra :

$$P(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^{2K} Q(z)$$

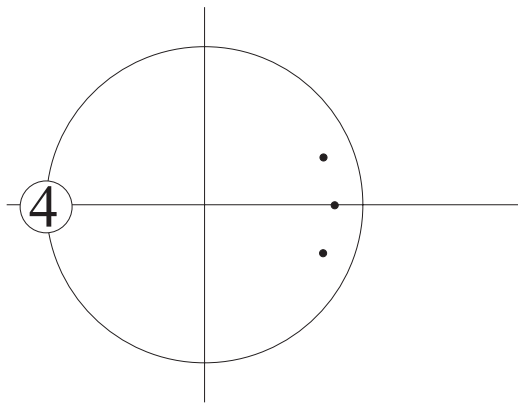
T.j hľadáme takú faktorizáciu $P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$, aby $H(z)$ a $\tilde{H}(z)$ mali lienárnu fázu.



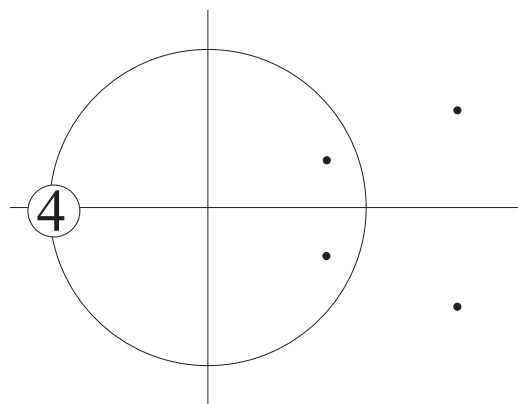
Všeobecné umiestnenie núl $P(z)$



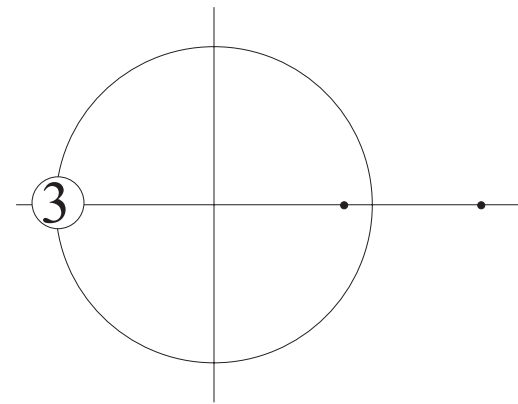
Umiestnenie núl pre maximálne hladký polpásmový filter so 14 nulami v $P(z)$



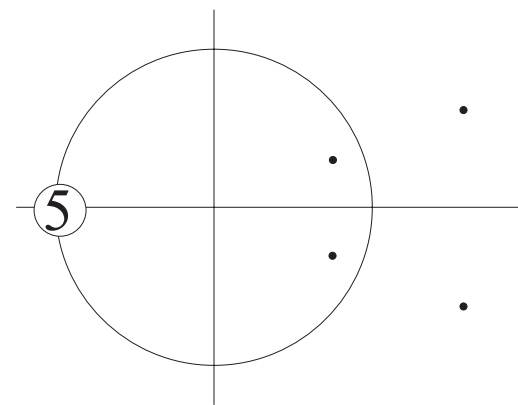
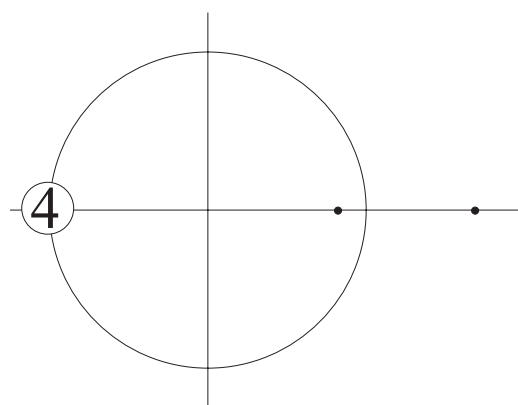
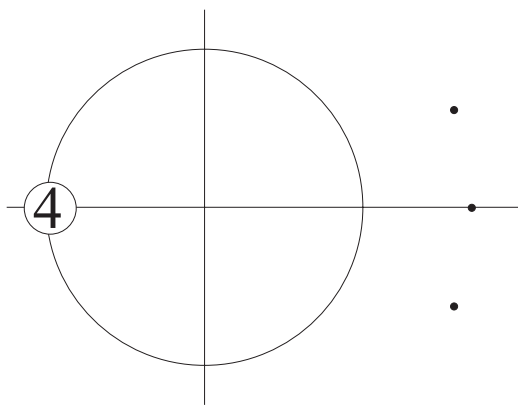
8/8 ortogonálne



9/7 symetrické



6/10 symetrické



Príklady faktorizácie $P(z)$ maximálne hladkého filtra so 14 nulami

Sú možné nasledujúce tvary $H(z)$ resp. $\tilde{H}(z)$ FIR filtrov pre wavelety:

- 1) filtre pre ortogonálne wavelety, $h(n)$ je nesymetrické

- 2) filtre s lineárnou fázou, biortogonálne, symetrické $h(n), \tilde{h}(n)$
- oba sú s *nepárnu* dĺžkou impulzovej odpovede
 - oba sú s *párnu* dĺžkou impulzovej odpovede

Návrh Biortogonálnych B-spline waveletov

Polpásmový filter

$$P(z) = \tilde{H}(z)H(z)$$

faktorizujeme tak, aby jeden faktor obsahoval iba nuly v $z=-1$, t.j. bol v tvare:

$$H(z) = H_{SM}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{M+1}$$

Príklad:

Pre Db2 dostávame návrhom pre $K=2$ nulových momentov:

$$Q(z) = -\frac{1}{2}z + 2 - \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \left[1 - \frac{(2-\sqrt{3})}{z} \right] \left[1 - \frac{z}{(2+\sqrt{3})} \right]$$

Potom $P(z) = 2\left(\frac{1+z}{2}\right)^4 Q(z)$. Ak chceme utvoriť Biortogonálny wavelet, môžeme vzhľadom na umiestnenie koreňov manipulovať iba s koreňmi v $z=-1$. Takže $Q(z)$ nebolo treba faktorizovať. Môžeme vytvoriť verzie:

$$1) \text{ Rbio1.3: } \quad H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^1 \quad \tilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 Q(z)$$

$$h(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \tilde{h}(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1/8, 1/8, 1, 1, 1/8, -1/8)$$

$$2) \text{ Rbio2.2: } \quad H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 \quad \tilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 Q(z)$$

3) Rbio3.1 (Kvadratický B-Spline):

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^3 \quad \tilde{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^1 Q(z)$$