

Analýza signálu viacúrovňovým rozlíšením

Signál pri *analýze viacúrovňovým rozlíšením* (AVR) rozkladáme do systému hierarchických podpriestorov, pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále. AVR pozostáva zo sekvencie uzavretých podpriestorov priestoru $L^2(R)$:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots L^2(R)$$

← horšia aproximácia lepšia →

Vlastnosti MRA:

- kompletnosť

$$\mathcal{V}_\infty = \{0\} \quad \mathcal{V}_{-\infty} = \{L^2(\mathcal{R})\} .$$

- Invariancia vzhľadom na

$$\text{zmenu mierky} \quad - \quad f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in V_0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{posun v čase} \quad - \quad f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

- Existencia bázy - existuje také $\varphi \in V_0$, že množina $\{\varphi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou V_0 . Funkciu $\varphi \in V_0$ nazývame *funkcia mierky*
- Existencia *bázy ortogonálneho doplnku*. Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1} . Potom existuje taký ortonormálny wavelet $\psi \in W_0$, že množina $\{\psi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru W_0 .

Dôsledky:

- Aby AVR bola úplná, musia mať funkcie mierky *jednosmernú zložku*, t.j.

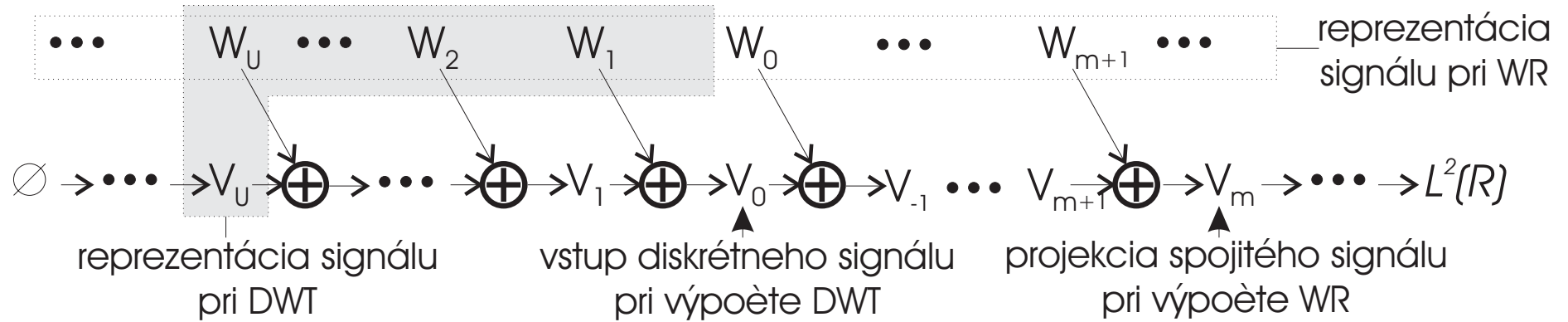
$$\int \varphi(t) dt \neq 0$$

- $\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in Z\}$ je bázou V_m .
- $\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), n \in Z\}$ je bázou W_m

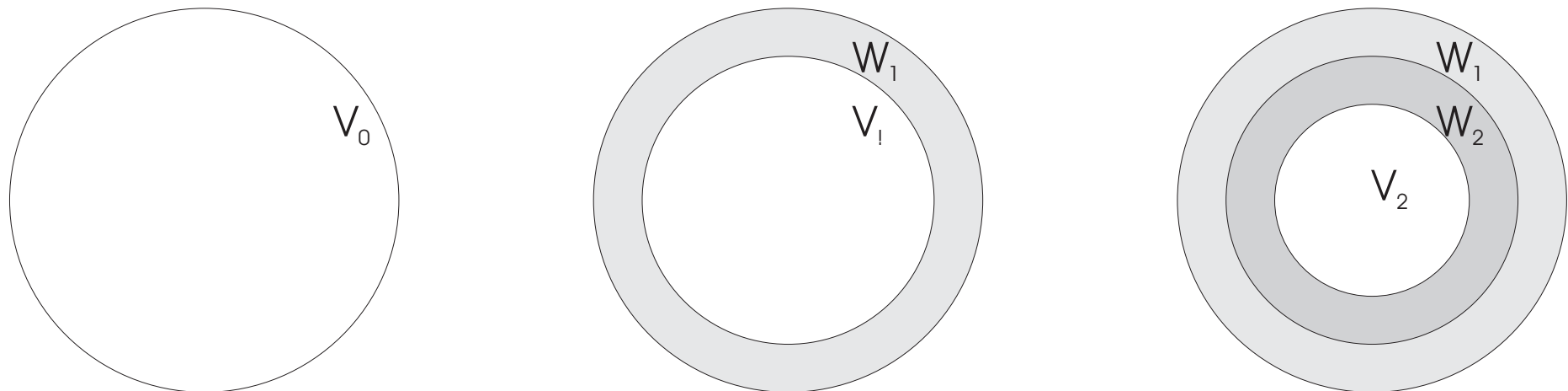
Platia nasledovné relácie:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} \quad L_2(R) = \underbrace{\dots \oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_0}_{V_1} \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \dots$$

Vidíme, že priestory V_m majú *aproximačný charakter*, pričom W_m obsahujú iba *detaily* na rôznych úrovniach rozlíšenia.



Hierarchia aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v MRA



Znázornenie hierarchie aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov v rovine.

Keďže V_0 je obsiahnuté vo V_{-1} , pre $\varphi(t) \in V_0$ platí aj, že $\varphi(t) \in V_{-1}$. Bázou vo V_{-1} je $\{\sqrt{2}\varphi(2t - n), n \in Z\}$, takže $\varphi(t)$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Na základe vlastností ortogonálnom doplnku platí analogicky

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

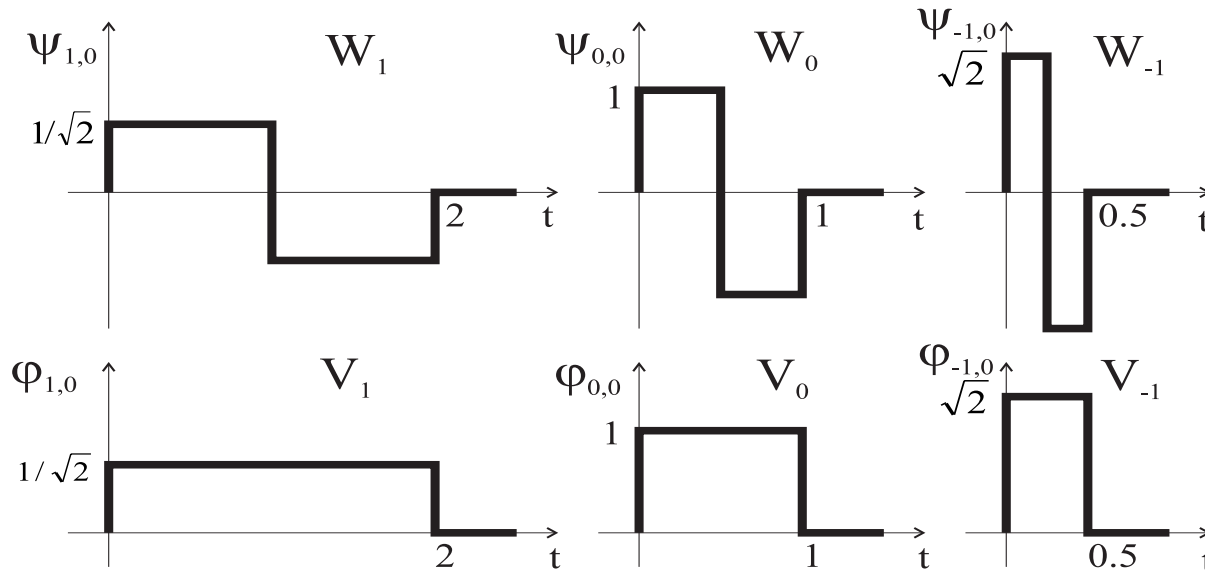
Tieto dva vzťahy sa nazývajú *relácie zmeny rozlíšenia* resp. *dilatačné rovnice*.

Koeficienty h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa *koeficienty pre zmenu rozlíšenia* resp. *dilatačné koeficienty*

Uvedomme si, že platí (na základe vlastností AVR)

$$\varphi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \varphi_{m,n}(t/2)$$

$$\psi_{m+1,n}(t) = 2^{-1/2} \psi_{m,n}(t/2)$$

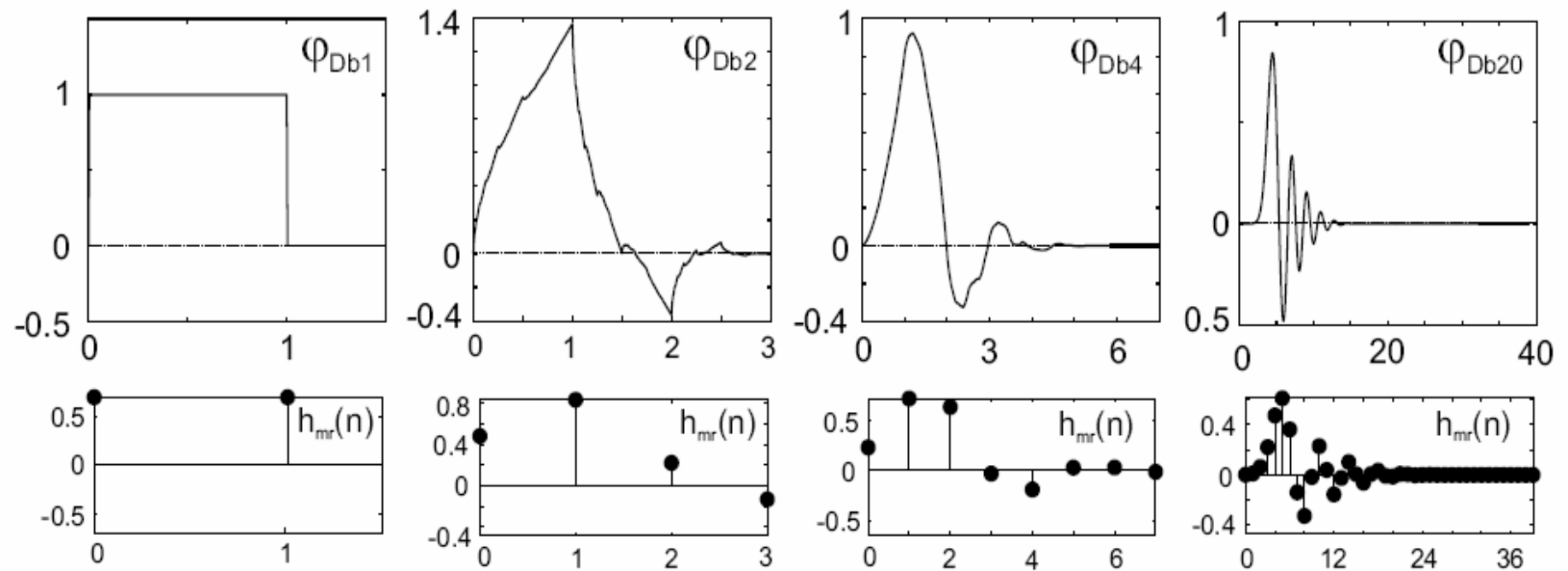


Na báзовých funkciách pre Haarovu WT môžeme vidieť, že

- 1) Priamy súčet podpriestorov V_1 a W_1 je V_0 , t.j. báзовé funkcie V_0 sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia báзовých funkcií V_1 a W_1
- 2) Bázy vo V_1 a W_1 môžeme vyjadriť pomocou bázy V_0 , t.j.:

$$\varphi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) + \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad h_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\psi_{1,n}(t) = (\varphi_{0,n}(t) - \varphi_{0,n+1}(t)) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad g_{mr} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



Obr. 1.14. Príklady funkcií mierok $\varphi(t)$ a zodpovedajúcich dilatačných koeficientov $h_{mr}(n)$ pre Daubechieovej (Db) wavelety rádu 1, 2, 4, 20. Vidíme, že dĺžky $h_{mr}(n)$ presne zodpovedajú *nosičom* funkcií mierky.

Algoritmus výpočtu Waveletových radov a disktrétnej waveletovej transformácie

Nech funkcie $f(t) \in V_m$. Potom $f(t)$ môžeme vyjadriť ako:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n) \varphi_{m,n}(t)$$

,kde $c_m(n) = \langle f(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$ je množina *projekčných* koeficientov $f(t)$ vo V_m nazývaných *koeficienty mierky*. Projekciou $f(t)$ do V_{m+1} a W_{m+1} môžeme získať koeficienty:

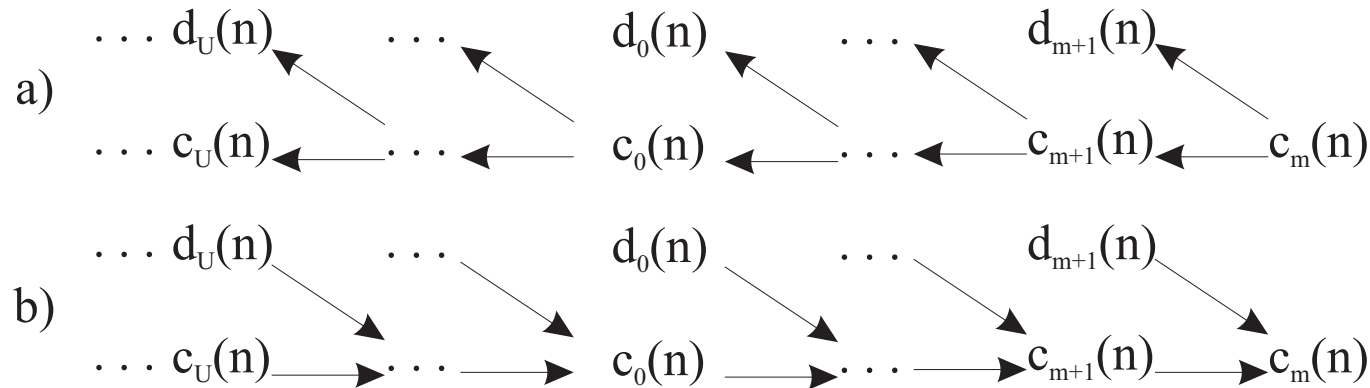
$$c_{m+1}(n) = \langle f(t), \varphi_{m+1,n}(t) \rangle$$

$$d_{m+1}(n) = \langle f(t), \psi_{m+1,n}(t) \rangle$$

Použitím vzťahu opisujúcom vzťahy medzi bázami podpriestorov na susedných úrovniach rozlíšenia, vlastností MRA a následnou úpravou dostávame:

rozklad:
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

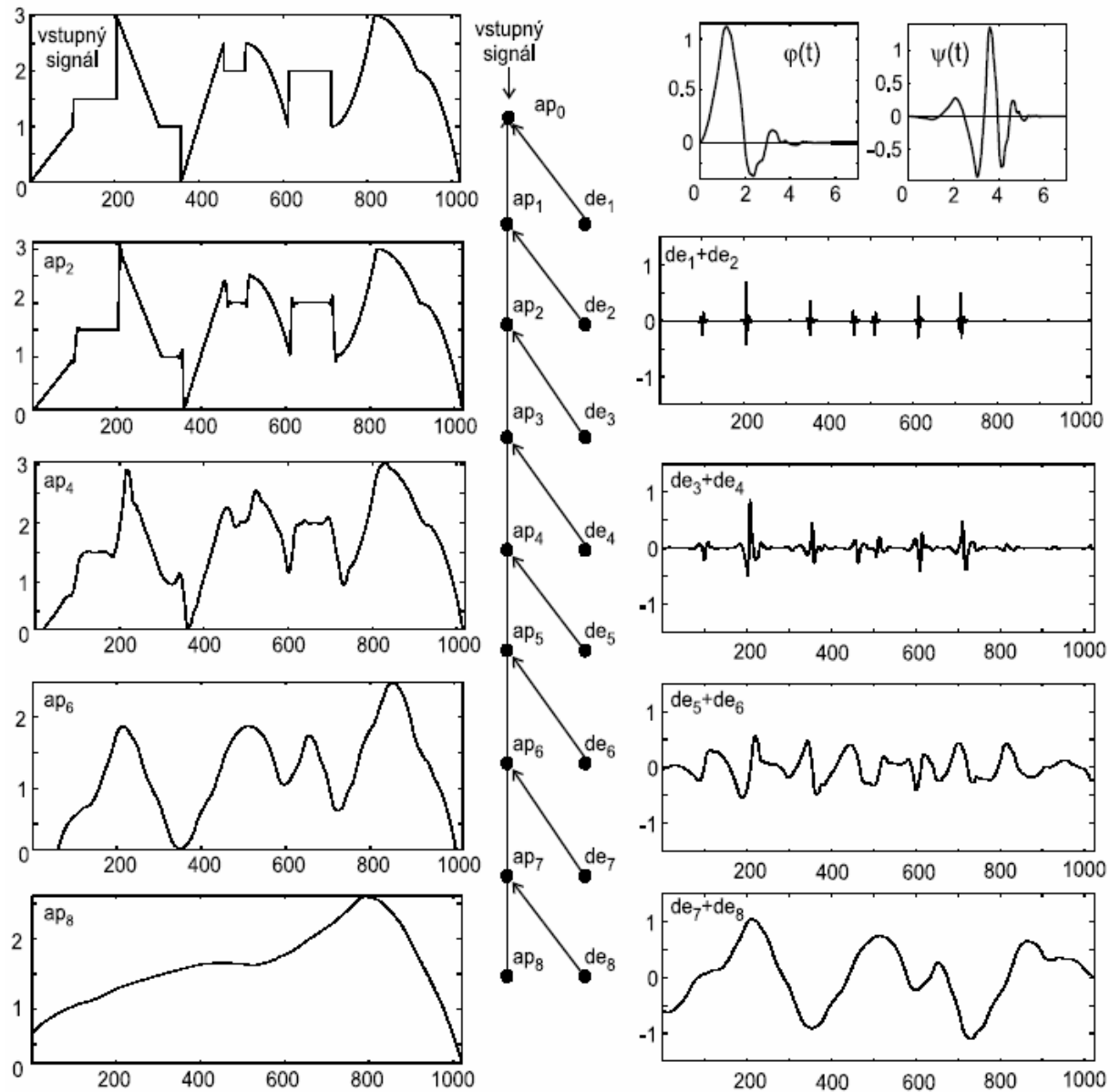
Výpočet waveletových radov

Pri výpočte *waveletových radov* z $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ môžeme zvoliť počiatočné V_m tak, aby $f(t) \in V_m$ aproximovalo $s(t)$ s ľubovoľnou presnosťou. T.j. začneme:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{n,m}(t) \rangle$$

a ďalej pokračujeme v diskkrétnej oblasti pomocou vzťahu na výpočet rozkladu, často iba po želanú úroveň rozkladu (napr. U). V tejto reprezentácii môžeme $s(t)$ vyjadriť sumou rekonštrukcií signálu z koeficientov v príslušnom podpriestore, t.j. aproximácie signálu $s_v^U(t)$ a postupným pridávaním detailov $s_w^i(t)$:

$$s(t) = s_v^U(t) + s_w^U(t) + \dots + s_w^{m+2}(t) + s_w^{m+1}(t)$$



Výpočet DWT

Pri výpočte *diskrétnej waveletovej transformácie* (DWT) interpretujeme vstupné dáta $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ nejakého spojitého signálu $s(t)$ do V_0 a ďalej pokračujeme rozkladmi ako pri WR.

Ak je signál konečnej dĺžky L , potom pre max. počet úrovní rozkladu U platí

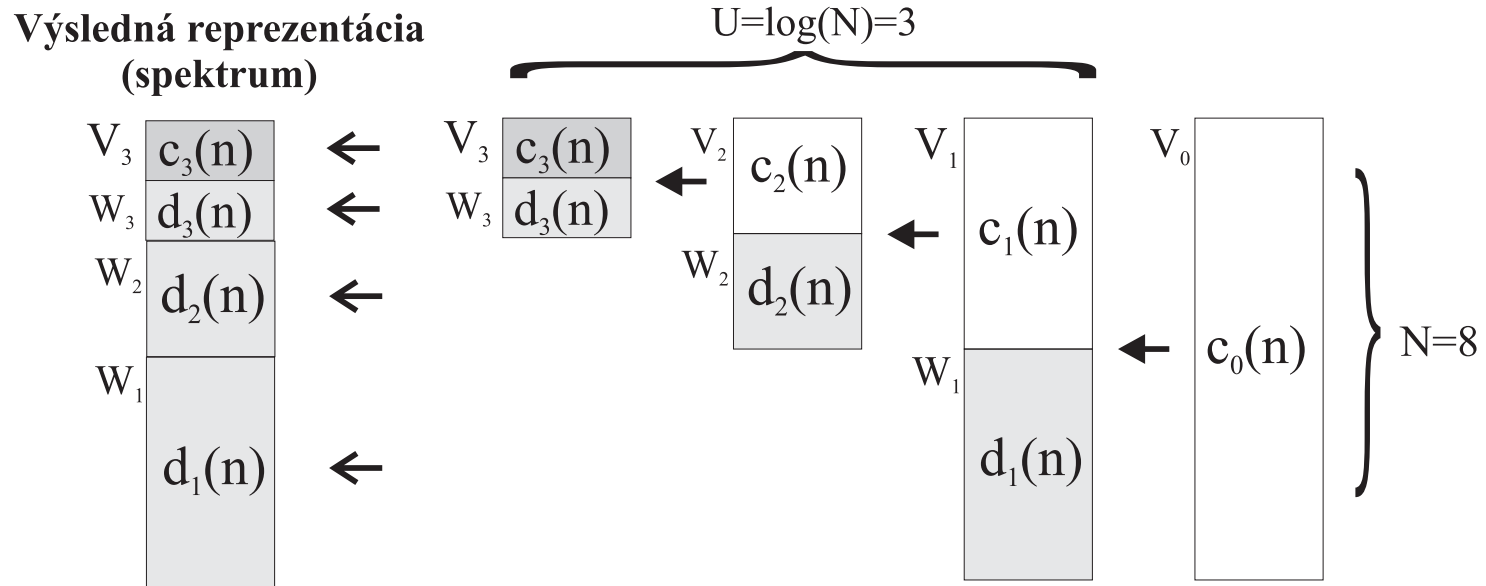
$$U \leq \log_2 L$$

Keďže vstupný signál aj výpočet projekčných koeficientov je diskrétny v čase, *báza projekčných priestorov bude diskrétna, vytvorená z koeficientov pre zmenu rozlíšenia*. Celá transformácia potom môže byť vyjadrená v maticovom tvare ako ostatné diskrétne lineárne transformácie.

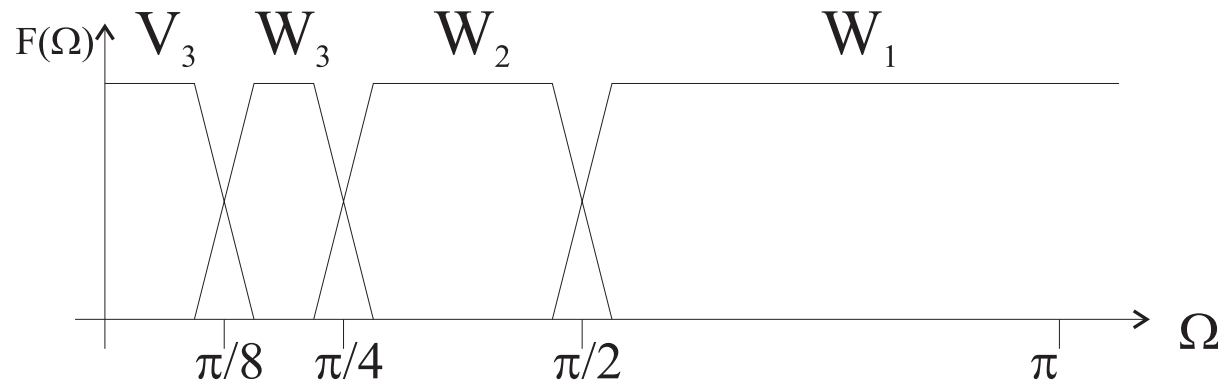
rozklad:
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

rekonštrukcia:
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$

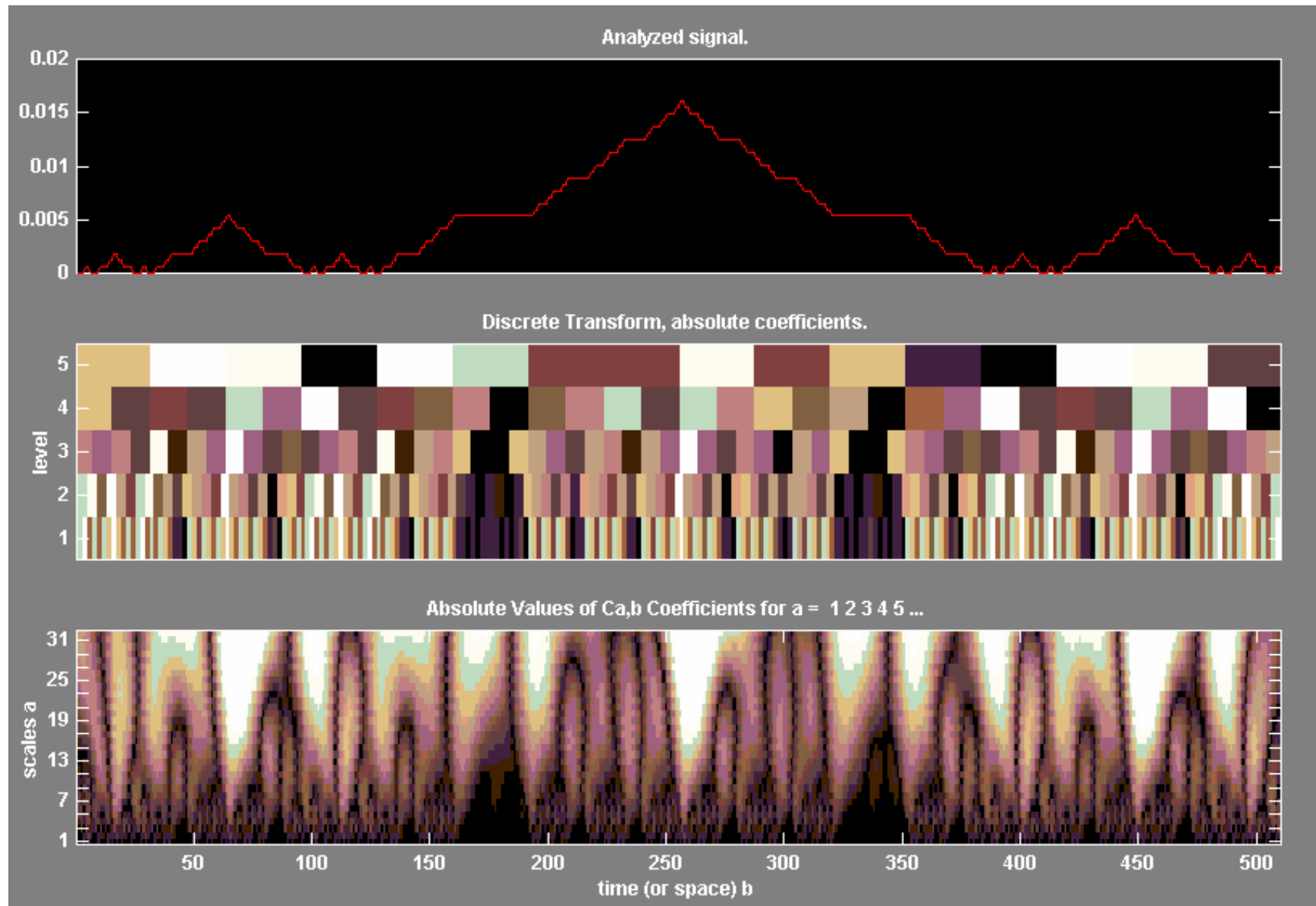
Výpočet WR a DWT sa v praxi realizuje bankami filtrov.

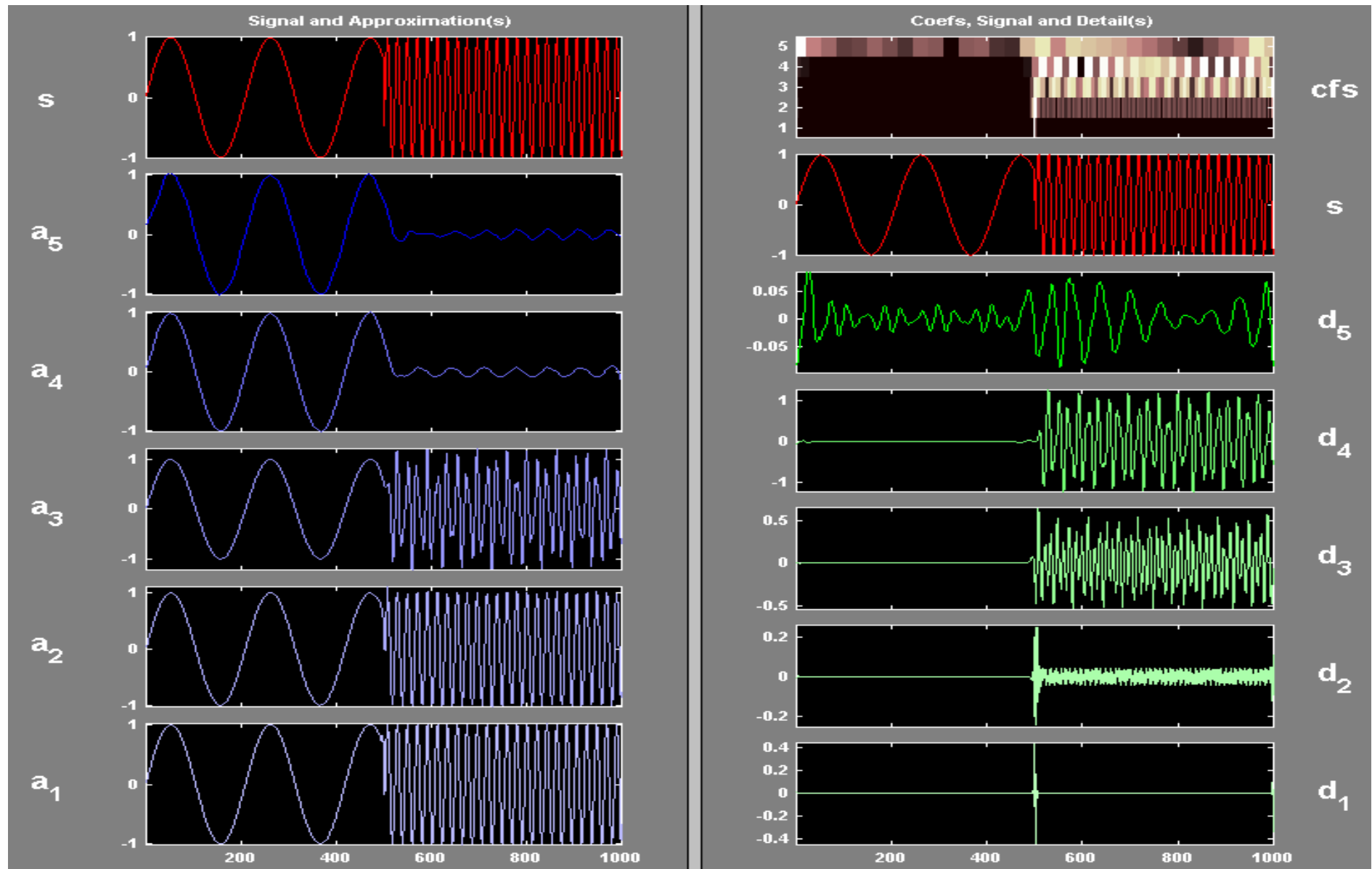


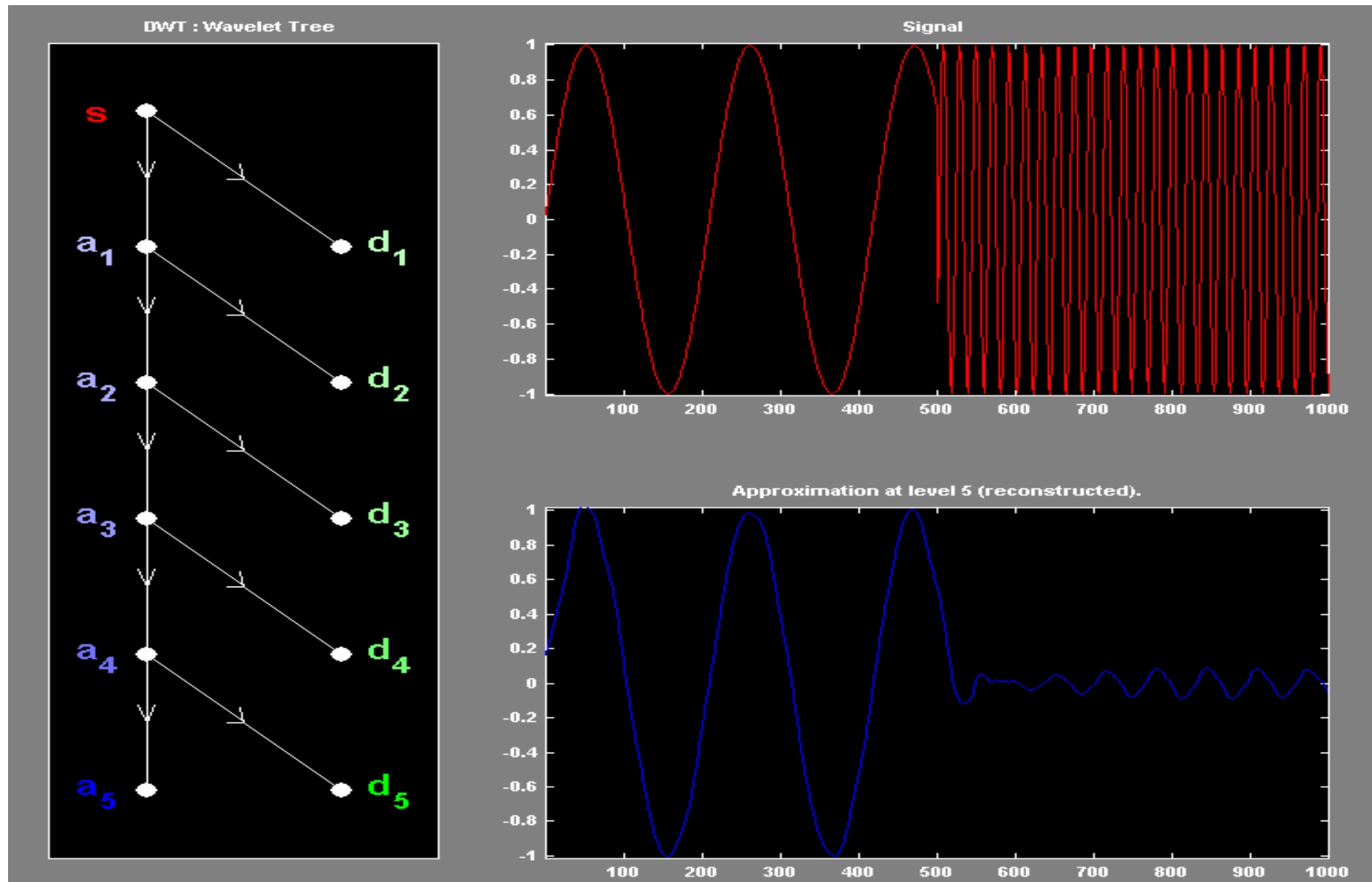
Výpočet koeficientov pri DWT a veľkosti vstupného vektora 8.

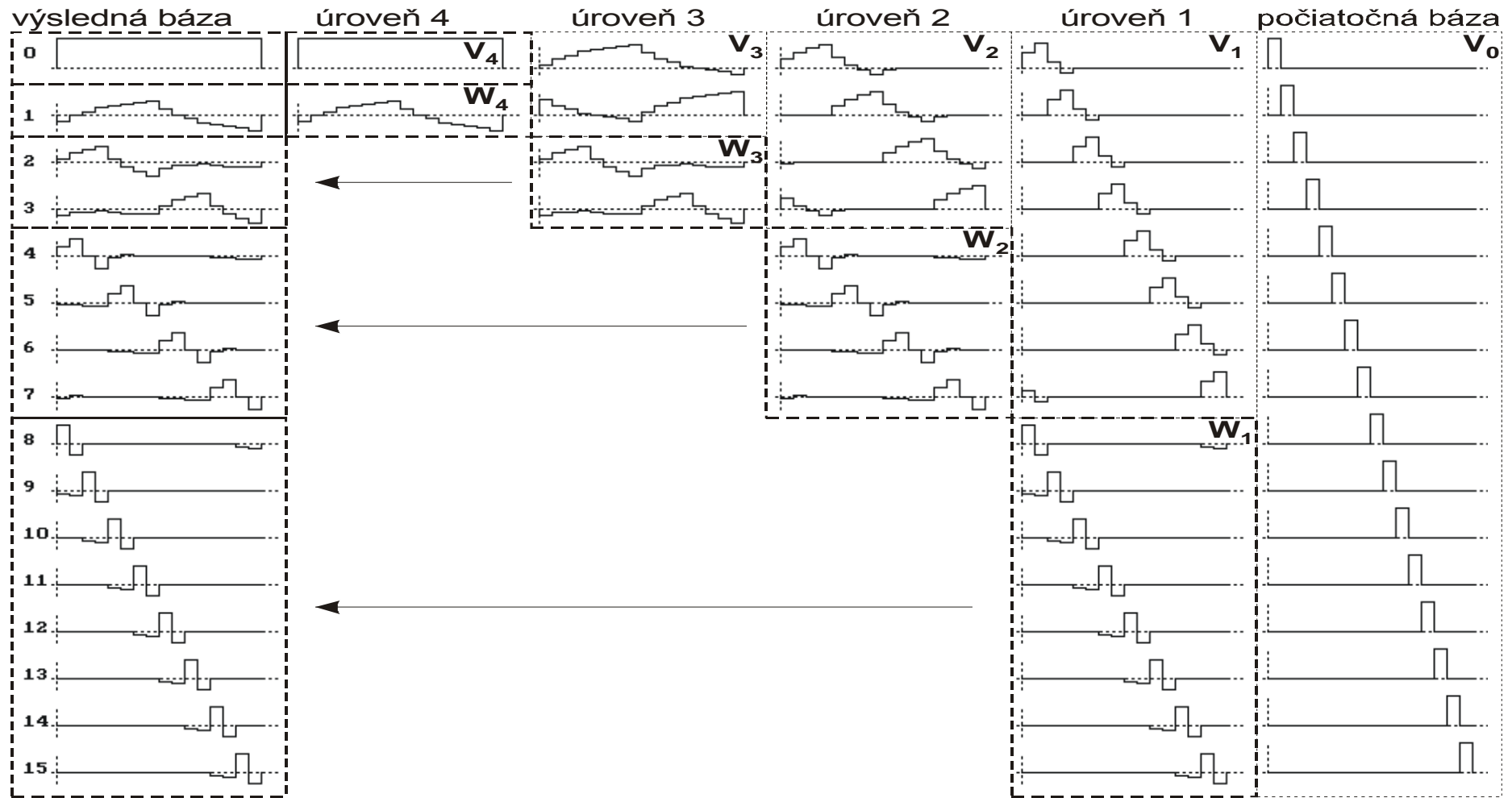


Označme diskretný vstup pre DWT ako $f(n)$. Na príklade jeho DTFT $f(\Omega)$ je znázornené, ktoré časti spektra budú vyjadrené v ktorých podpriestoroch.

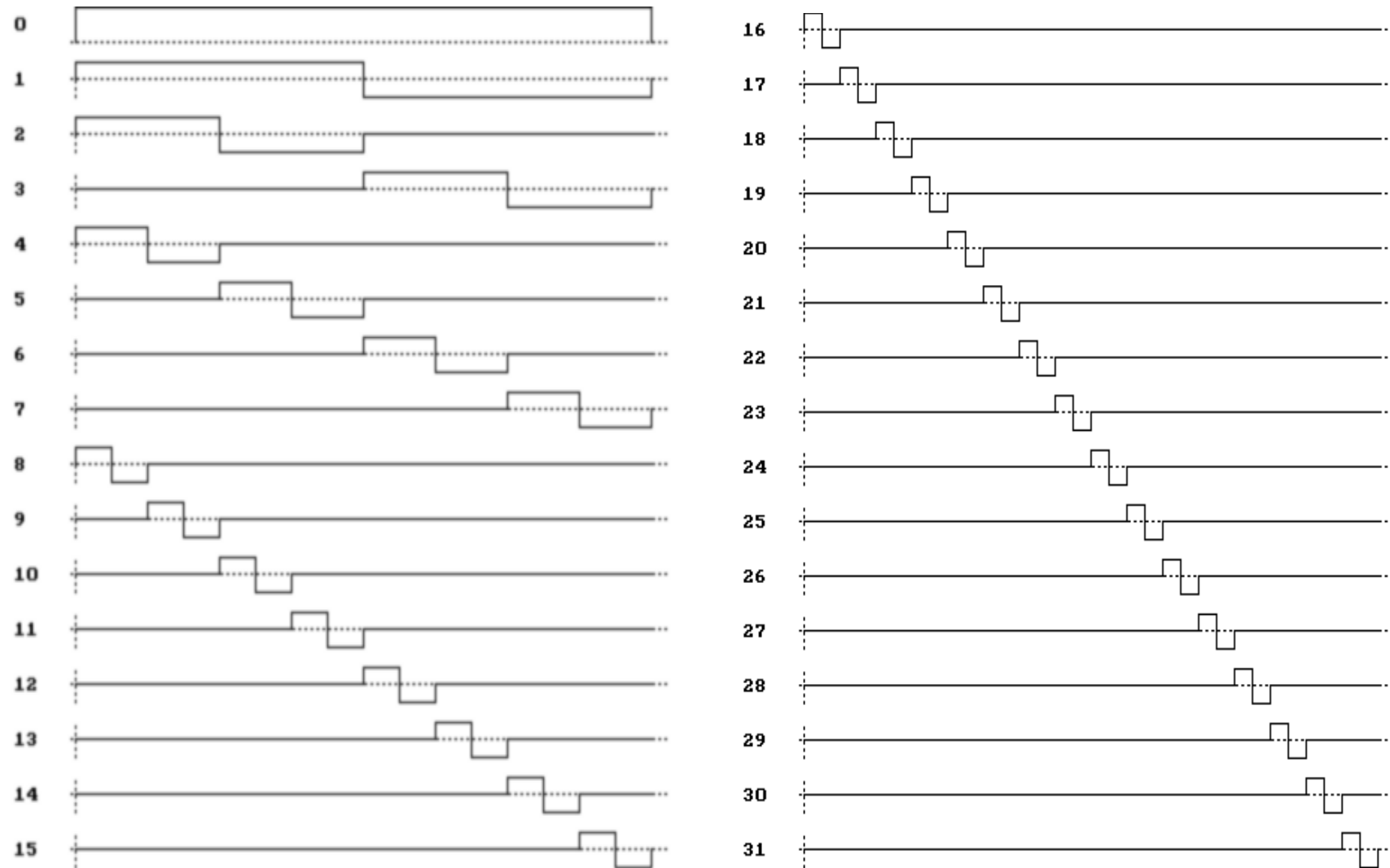




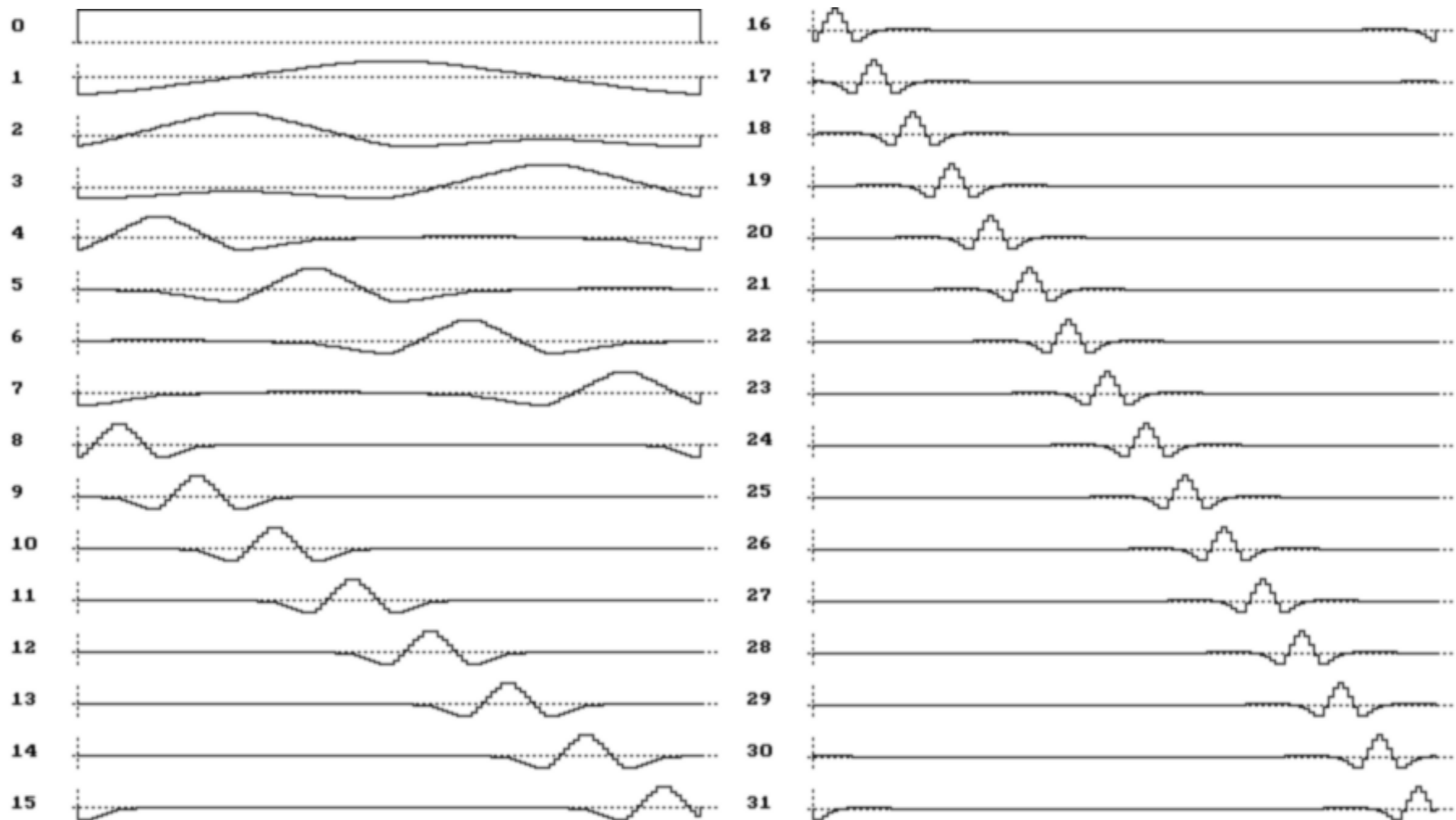




Štruktúra bázy pri ortogonálnej DWT s Db2. Pri vstupe do V_0 je báza tvorená posunmi jednotkových impluzov. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov predstavujú bázové vektory čoraz lepšiu aproximáciu waveletov.



Bázové funkcie diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=32$ pre Haarov wavelet



Prvých 32 bázových funkcií diskkrétnej waveletovej bázy o veľkosti $N=128$ pre FBI(9,7) wavelet

DWT v maticovom tvare.

Uvažujme nasledovné tvary rovníc:

Rozklad(analýza):
$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n)c_m(k)$$

Rekonštrukcia(syntéza):
$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k)c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k)d_{m+1}(k)$$

Tieto vzťahy môžeme prepísať do maticového tvaru ako transformácie:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{C}_m \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{T}_s \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix}$$

, kde T_a , T_s sú **štvorcové** transformačné matice pre analýzu, resp. pre syntézu a \mathbf{C}_m resp. \mathbf{D}_m sú stĺpcové vektory (matice) :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m &= (c_m(0), c_m(1), \dots, c_m(N_m - 1))^T \\ \mathbf{D}_m &= (d_m(0), d_m(1), \dots, d_m(N_m - 1))^T \end{aligned}$$

kde veľkosť vektorov je:

$$N_m = 2^{-m} N_0$$

Pozn.: v ďalšom texte budeme h_{mr} , g_{mr} používať bez označenia "mr".

Maticový zápis pri periodickom rozšírení signálu

$$\mathbf{H}_m = \left. \begin{array}{c} \overbrace{\left(\begin{array}{cccccc} h(0) & h(1) & \dots & \dots & \dots & h(-1) \end{array} \right)}^{N_m} \\ \dots & h(-1) & h(0) & h(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & h(-1) & h(0) & h(1) \end{array} \right\} N_m$$

$$\mathbf{G}_m = \left. \begin{array}{c} \overbrace{\left(\begin{array}{cccccc} g(0) & g(1) & \dots & \dots & \dots & g(-1) \end{array} \right)}^{N_m} \\ \dots & g(-1) & g(0) & g(1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & g(-1) & g(0) & g(1) \end{array} \right\} N_m$$

Analýza: $\mathbf{C}_{m+1} = \mathbf{H}_m \mathbf{C}_m \quad \mathbf{D}_{m+1} = \mathbf{G}_m \mathbf{C}_m$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \mathbf{C}_m \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{pmatrix}$$

Syntéza: $\mathbf{C}_m = \left(\mathbf{H}_m^T \quad \mathbf{G}_m^T \right) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{m+1} \\ \mathbf{D}_{m+1} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}_s = \left(\mathbf{H}_m^T \quad \mathbf{G}_m^T \right)$

Všeobecne

$$\mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \mathbf{I}_N = \mathbf{T}_s \mathbf{T}_a$$

Vyjadrieme:

$$\mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0}_{N/2} \\ \mathbf{0}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^T & \mathbf{G}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}\mathbf{H}^T & \mathbf{H}\mathbf{G}^T \\ \mathbf{G}\mathbf{H}^T & \mathbf{G}\mathbf{G}^T \end{pmatrix}$$

z čoho vyplýva:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{I} \quad \mathbf{H}\mathbf{G}^T = \mathbf{G}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$$

T.j. impulzové charakteristiky filtrov sú ortogonálne k párnym posunom svojich duálov a ortogonálne navzájom „nakriž“ = podmienky *biortogonality*. A zároveň, aby bola splnená rovnosť na pravej strane, musia spĺňať $g_{mr}(n)$ dodatočnú podmienku:

$$g_{mr}(n) = \pm(-1)^n h_{mr}(M-n), \quad M\text{-nepárne}$$