Waveletové rady a rámce

Redundancia SWT (oba parametre a, b sú spojité) sa dá znížiť, prípadne odstrániť *vzorkovaním a*, *b*. Potom hovoríme o *waveletových rámcoch (Wavelet Frames – WF) resp. waveletových radoch (WR)*.

Pri voľbe vzorkovania sú dôležité otázky kompletnosti, redundancie a minimálnosti výslednej množiny funkcií.

Štandardná voľba *typu* vzorkovacej mriežky

- $a = a_0^m$.
- $b = nb_0 a_0^m$ (volíme tak, aby bola pomocou σ_{ab_t} pri danej mierke a "pokrytá" celá časová os)

T.j.

Parameter **m** určuje *úroveň rozlíšenia*
Parameter **n** určuje *posun v čase*

Pre $\psi(t)$ (a analogicky pre $\tilde{\psi}(t)$) dostávame množinu funkcií:

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(a_0^{-m} t - nb_0\right), \quad m, n \in Z$$

Každú $f(t) \in L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť superpozíciou vo *waveletových rámcoch(Wavelet Frames – WF)*:

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle \qquad m, n \in Z$$

Koeficienty $d_{m,n}$ nazývame waveletové koeficienty.

Rekonštrukcia je možná, ak

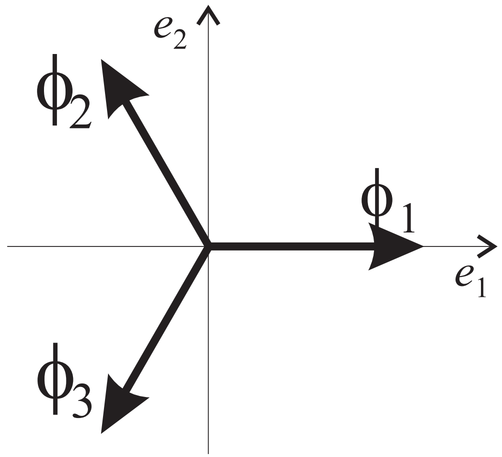
$$A\|f\|^2 \le \sum_{m,n} \left| \langle f, \psi_{m,n} \rangle \right|^2 \le B\|f\|^2; \qquad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Možností na voľbu $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ je viacero. Štandardná voľba je tzv. *duálny rámec*:

$$B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{m,n} \left| \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \right|^2 \le A^{-1}\|f\|^2 \quad \forall f(t) \in L^2(R)$$

Ak A = B, rámec sa nazýva *tesný* a naviac, ak $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom A udáva *mieru nadbytočnosti rámca* (napr. ak A = 3, stačí na rekonštrukciu 1/3 spektrálnych koeficientov)

Ak $A = B = 1$, $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí *ortonormálnu bázu* v $L^2(R)$. Funkciu $\psi \in L^2(R)$ potom nazývame *ortonogonálny* resp. *ortonormálny wavelet*.



Príklad 1: Označme jednotkové vektory v rovine v smere x a y ako e_1 a e_2. Definujme vektory $\phi_1 = e_1$, $\phi_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$, $\phi_2 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$. Zistite, či množina $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ je tesný rámec v rovine (t. j. v priestore R^2). Ak áno, zistite jeho nadbytočnosť.

Riešenie:

1) $A\|f\|^2 \le \sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 \le B\|f\|^2$, aké sú A a B ? Rozpísaním na zložky a úpravami zisíme, že $\sum_i |\langle f, \phi_i \rangle|^2 = \frac{3}{2}\|f\|^2$. Zároveň platí $\|\phi_i\| = 1$. T.j. nadbytočnosť je 3/2.

2) Zostrojme rámcovú maticu $\mathbf{\Phi} = \left(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3\right)$; $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T = \frac{3}{2}\mathbf{I}_2$. T.j. nadbytočnosť je 3/2

Príklad 2: K rámcu $\mathbf{\Phi}$ nájdite duálny rámec $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ a overte vzťahy pre doprednú a spätnú transformáciu

Riešenie:

Pre duálny rámec platí: $B^{-1}\|f\|^2 \le \sum_i \left|\left\langle f, \tilde{\phi}_i \right\rangle\right|^2 \le A^{-1}\|f\|^2$. T.j. v našom prípade (A=B=3/2) $\sum_i \left|\left\langle f, \tilde{\phi}_i \right\rangle\right|^2 = {}^2\!/_3\|f\|^2$. Vieme, že $\sum_i \left|\left\langle f, \phi_i \right\rangle\right|^2 = \frac{3}{2}\|f\|^2$. T.j. $\sum_i \left|\left\langle f, \phi_i \right\rangle\right|^2 = \frac{9}{4}\sum_i \left|\left\langle f, \tilde{\phi}_i \right\rangle\right|^2$. Vidíme že voľbou $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{3}\phi_i$ rovnosť zabezpečíme. T.j. $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \frac{2}{3}\mathbf{\Phi}$.

Pre transformáciu do/z rámca platí:

$$d_i = \left\langle f, \phi_i \right\rangle \qquad \bar{d} = \mathbf{\Phi}^T \bar{f} \qquad \text{dopredná}$$

$$f = \sum_i d_i \tilde{\phi}_i \qquad \bar{f} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\bar{d} \qquad \text{spätná}$$

T.j. po doprednej a spätnej transformácii dostaneme pôvodný signál:

$$\bar{f} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\bar{d} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\left(\mathbf{\Phi}^T\bar{f}\right) = \left(\tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}^T\right)\bar{f} = \left(\tfrac{2}{3}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T\right)\bar{f} = \left(\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{3}{2}\mathbf{I}\right)\right)\bar{f} = \bar{f}$$

Poznámka: Z $\tilde{\mathbf{\Phi}}\tilde{\mathbf{\Phi}}^T = \tfrac{2}{3}\mathbf{I}_2$ nevyplýva, že nadbytočnosť je 2/3 (t.j."nedostatočnosť"), lebo $\left\|\tilde{\phi}_i\right\| \ne 1$.

Príklad 3: Na základe predchádzajúceho príkladu ukážte, že môže existovať viacero rôznych reprezentácií jedného vektoru $f \in R^2$ v rámci $\tilde{\Phi}$.

Riešenie: Podľa predchádzajúceho príkladu platí $f = \sum_i \langle \phi_i, f \rangle \tilde{\phi}_i$, kde $\tilde{\phi}_i = \frac{2}{3}\phi_i$. Zároveň platí $\sum_i \phi_i = 0 = \sum_i \tilde{\phi}_i$. Ak chceme novú reprezentáciu, musíme na doprednú transformáciu použiť iný nový Φ. Zvoľme napr.:

$$\phi_{new_i} = \phi_i + x, \qquad x = (\alpha, \beta),\ x \in R^2$$

T.j. situáciu, keď ľubovoľný vektor x pričítame ku každému rámcovému vektoru. Potom

$$d_{new_i} = \langle f, \phi_{new_i} \rangle = \langle f, \phi_i + x \rangle = \langle f, \phi_i \rangle + \langle f, x \rangle$$

má samozrejme iné hodnoty (posunuté o $\langle f, x \rangle$) . Pre rekonštrukciu platí:

$$\hat{f} = \sum_i d_i \tilde{\phi}_i = \sum_i \left(\langle f, \phi_i \rangle + \langle f, x \rangle \right) \tilde{\phi}_i = \sum_i \left(\langle f, \phi_i \rangle \right) \tilde{\phi}_i + \langle f, x \rangle \overbrace{\sum_i \tilde{\phi}_i}^{0} = \sum_i \left(\langle f, \phi_i \rangle \right) \tilde{\phi}_i .$$

T.j. vidíme, že $\hat{f} = f$, t.j. dostávame znovu pôvodný signal.

Najbežnejšia sa redundancia reprezentácie vo waveletových rámcoch odstraňuje voľbou vzorkovacej mriežky :

$$a_0 = 2, b_0 = 1$$

Platí :

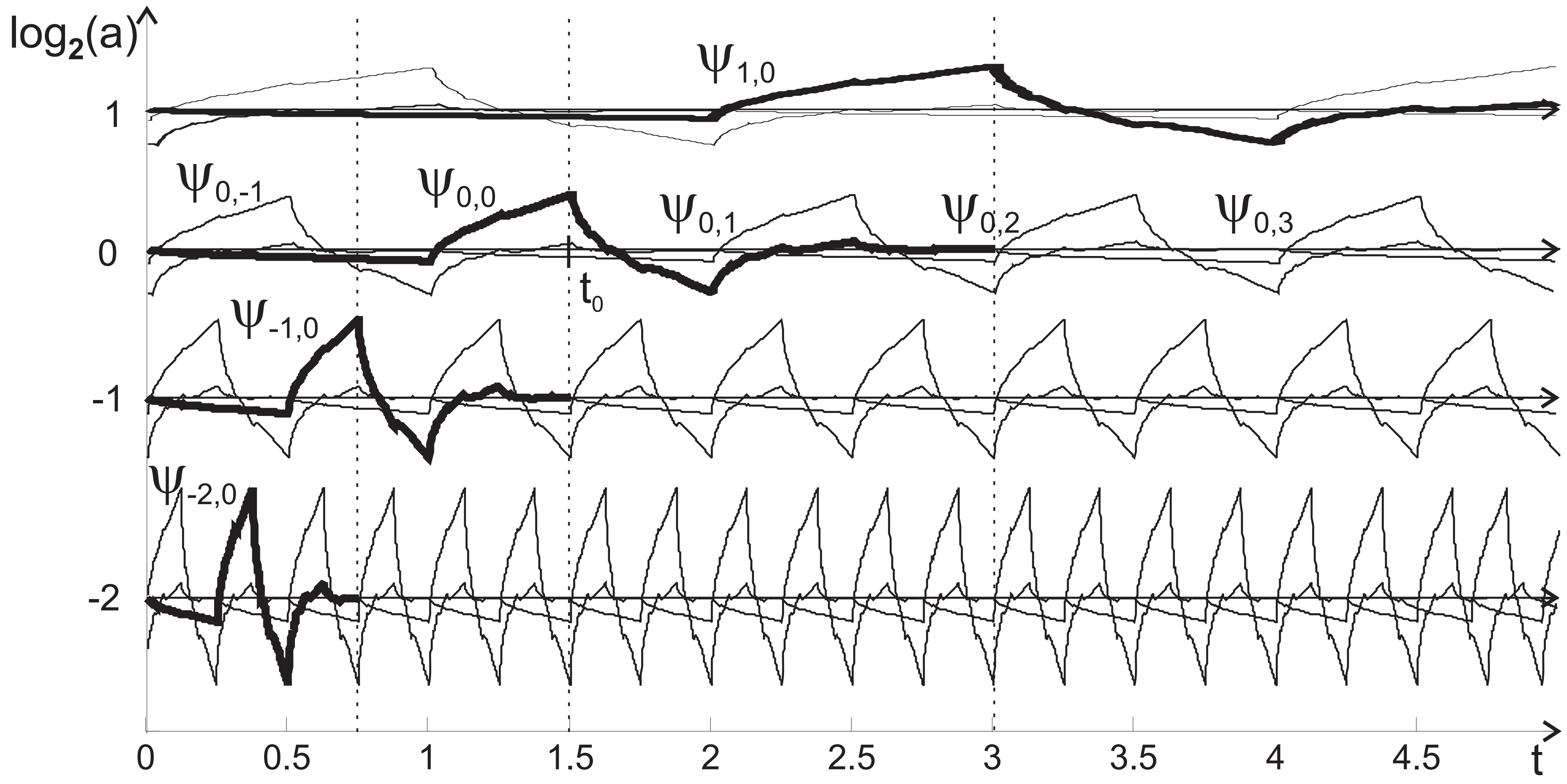
$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi\left(2^{-m} t - n\right)$$

funkciu $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadický wavelet* a vzťahmi (WF):

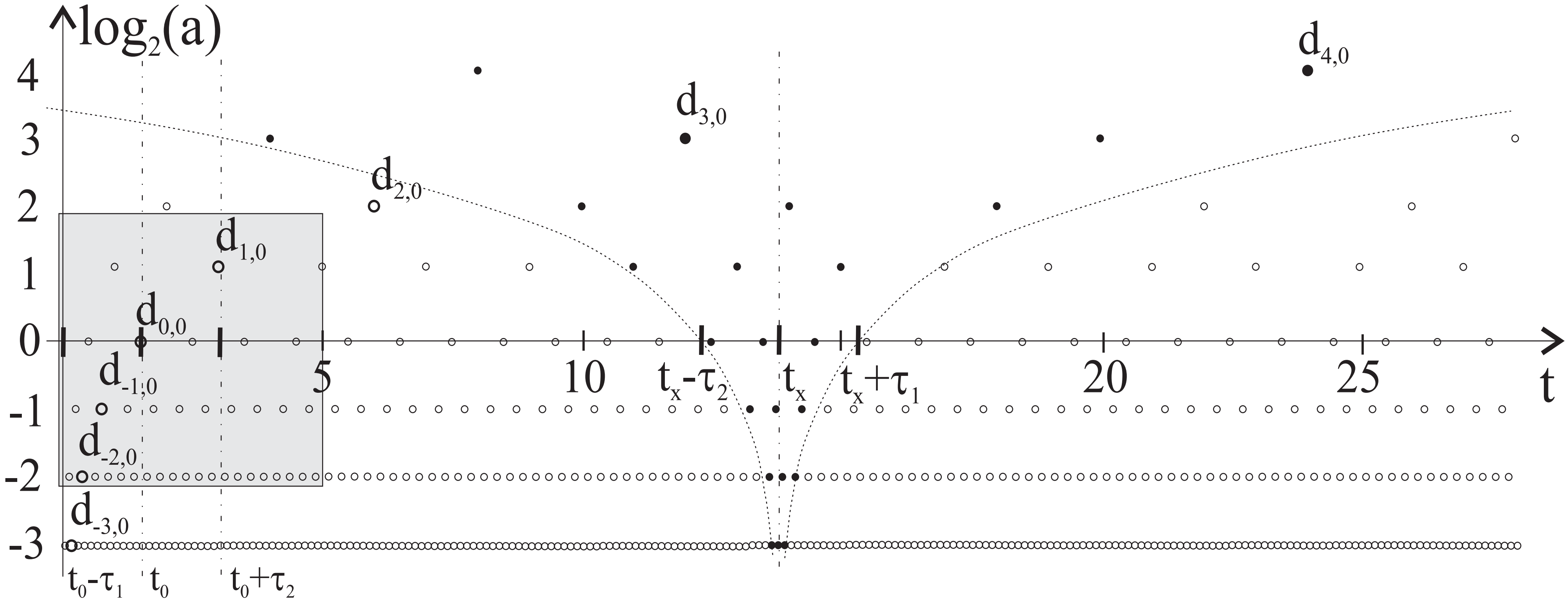
$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \tilde{\psi}_{m,n}(t) \qquad d_{m,n} = \left\langle f(t), \psi_{m,n}(t) \right\rangle \qquad m, n \in Z$$

sú definované *waveletové rady (WR)*.

Triadické wavelety? M-adiclké wavelety?

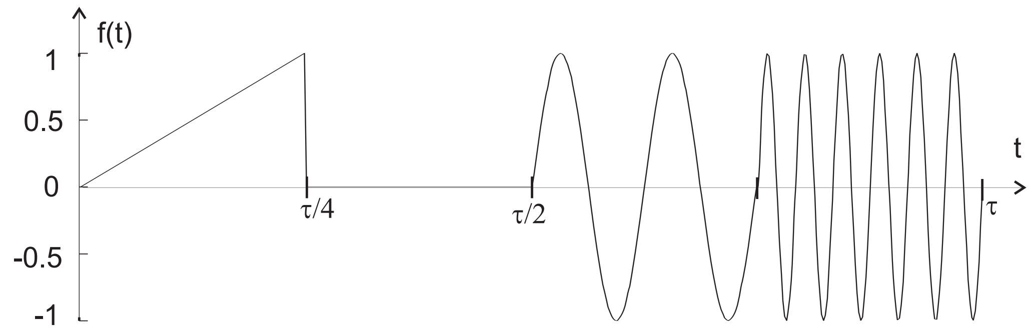


Poloha bázových funkcií (odvodených od Db2) v TS rovine pri dyadických waveletových radoch

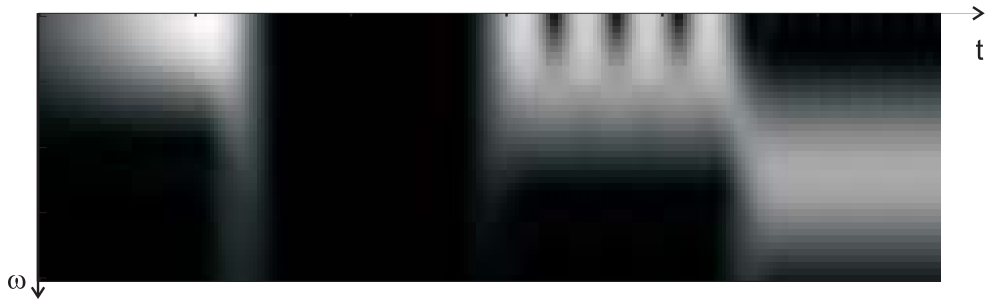


Príklad zobrazenia koeficientov $d_{m,n}$ v TS rovine. Koeficienty $d_{m,0}$ sú zvýraznené. V strede je znázornená sféra vplyvu signálu v čase t_x na koeficienty $d_{m,n}$ pri $\psi_{m,n}(t)$ s kompaktným nosičom na intervale $\langle t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_2 \rangle$.

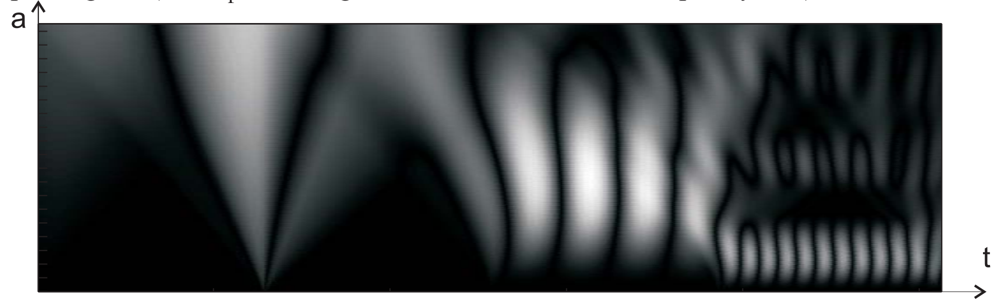
Oblasť TS roviny použitá v predchádzajúcom obrázku je sivo zvýraznená.



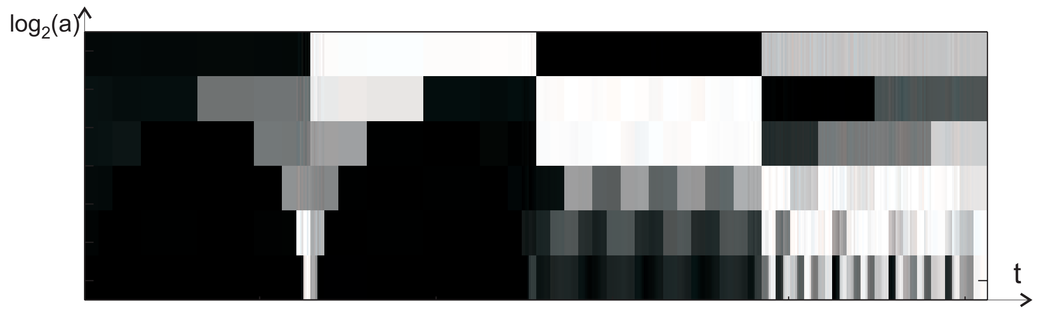
a) vstupný signál



b) spektrogram ($STFT_f$, Hanningovo okno, veľkosť okna 50, prekryv 48)



c) škálogram (SWT_f, ako $\psi(t)$ použitý Db2)



d) diskrétny škálogram (WR_f, ako $\psi(t)$ použitý Db2)

Ortogonalita, biortogonalita a semiortogonalita

Pre ortonormálne wavelety platí $\tilde{\psi} \equiv \psi^*$ a

$$\left\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \right\rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \qquad j,k,l,m \in Z$$

čo charakterizuje ortogonalitu v rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku *biortogonality* (hovoríme o *biortogonálnych waveletoch*), ak množiny $\{\psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce prodmienku biortogonality:

$$\left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \right\rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \qquad j,k,l,m \in Z$$

Wavelet $\psi \in L^2(R)$ $j,k,l,m \in Z$ sa nazýva *semiortogonálny* (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

$$\left\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \right\rangle = \delta(j-l) \qquad j,k,l,m \in Z$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

Prechod k analýze viacúrovňovým rozlíšením

(**M**ulti**R**esolution **A**nalysys - MRA)

Označme :

$$W_m = L\left(\left\{\psi_{m,n}\right\}, n \in Z\right)$$
$$\widetilde{W}_m = L\left(\left\{\widetilde{\psi}_{m,n}\right\}, n \in Z\right)$$

$L^2(R)$ potom môžeme vyjadriť ako priamu sumu podpriestorov W_m resp. $\widetilde{W}_m$:

$$L^2(R) = \ldots \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \ldots$$
$$L^2(R) = \ldots \oplus \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_0 \oplus \widetilde{W}_{-1} \oplus \ldots$$

Ako odstrániť nekonečné sumy pri reprezentácii resp. aproximácii signálu ???