

Na skúšku z WaBF v zs 2004/2005 bude vybraných 5 otázok z nasledovných, formulovaných presne tak, ako sú tu uvedené. Spolu budú za 50 bodov.

Hilbertove priestory a rozklady signálov

Čo je to (nevyžadujem presné matematické formulácie):

- Veľkosť vektora

Definícia 6.6 *Veľkosť vektora x (označujeme $\|x\|$) je v Hilbertových priestoroch daná skalárnym súčtom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

skripta str. 118

- Priama suma porpiestorov, Ortoigonálny doplnok

Definícia 6.8 *Nech \mathcal{M}_i sú podpriestory Hilbertovho priestoru \mathcal{E} . Ak každý vektor $x \in \mathcal{E}$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ pričom $x_i \in \mathcal{M}_i$, potom \mathcal{E} je priamou sumou podpriestorov \mathcal{M}_i . Píšeme $\mathcal{E} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_k$.*

Definícia 6.9 *Nech \mathcal{M} je podpriestor Hilbertovho priestoru \mathcal{E} . Potom **ortogonálny doplnok** k \mathcal{M} v \mathcal{E} je množina $\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{E}; x \perp \mathcal{M}\}$.*

skripta str. 118

- Priestor $l^2(\mathcal{Z})$, Priestor $L^2(\mathcal{R})$

Priestor $l^2(\mathcal{Z})$

Vektormi x v priestore $l^2(\mathcal{Z})$ sú postupnosti $x(n) \in \mathcal{C}$, $n \in \mathcal{Z}$ s konečnou energiou $\|x\| < \infty$. Zvyčajne reprezentujú signály diskkrétne v čase. Skalárny súčin je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n)^* \quad x, y \in l^2(\mathcal{Z}). \quad (6.17)$$

Priestor $L^2(\mathcal{R})$

Vektormi x v priestore $L^2(\mathcal{R})$ sú funkcie $x(t) \in \mathcal{C}$, $t \in \mathcal{R}$, ktoré sú kvadraticky integrovateľné a navyše $\|x\| < \infty$. Skalárny súčin je definovaný ako:

$$\langle x, y \rangle = \int_{t \in \mathcal{R}} x(t) y(t)^* dt \quad x, y \in L^2(\mathcal{R}). \quad (6.18)$$

skripta str. 119

- Ortonormálna báza, Čo sú biortogonálne resp. duálne bázy

6.4.2 Ortonormálne bázy

Množina $B = \{b_i\}$ tvorí **ortonormálny systém** v priestore \mathcal{E} , ak platí:

$$\forall b_i, b_j \in B; \quad \langle b_i, b_j \rangle = \delta(i - j). \quad (6.19)$$

Ortonormálny systém B tvorí **ortonormálnu bázu** priestoru \mathcal{E} , ak všetky $x \in \mathcal{E}$ môžeme vyjadriť ako:

$$x = \sum_k \alpha_k b_k, \quad (6.20)$$

kde α_k nazývame **spektrálne koeficienty** a vypočítame ich ako

$$\alpha_k = \langle b_k, x \rangle. \quad (6.21)$$

Pre takýto systém platí **Parsevalova rovnosť**

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle b_i, x \rangle|^2 \quad \forall x \in \mathcal{E}. \quad (6.22)$$

Analogické tvrdenia platia aj pre *ortogonálne systémy*, vo vzťahoch je iba pridaná normalizačná konštanta.

6.4.3 Biortogonálne bázy

Nech množiny $B = \{b_i\}$ a $\tilde{B} = \{\tilde{b}_i\}$ sú bázami priestoru \mathcal{E} . Tieto bázy sú navzájom **duálne** resp. **biortogonálne**, ak:

- Ich bázové vektory sú **navzájom ortogonálne**, t. j. **biortogonálne**:

$$\langle b_i, \tilde{b}_j \rangle = \delta(i - j) \quad \forall i, j \in \mathcal{Z} \quad (6.23)$$

- zároveň existujú kladné konečné konštanty $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$, že pre $\forall x \in \mathcal{E}$ platí:

$$C \|x\|^2 \leq \sum_k |\langle b_k, x \rangle|^2 \leq D \|x\|^2 \quad \tilde{C} \|x\|^2 \leq \sum_k |\langle \tilde{b}_k, x \rangle|^2 \leq \tilde{D} \|x\|^2. \quad (6.24)$$

Potom signál $x \in \mathcal{E}$ môžeme vyjadriť ako

$$x = \sum_k \langle b_k, x \rangle \tilde{b}_k = \sum_k \langle \tilde{b}_k, x \rangle b_k. \quad (6.25)$$

Parsevalova rovnosť má tvar:

$$\|x\|^2 = \sum_i \langle b_i, x \rangle^* \langle \tilde{b}_i, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{E}. \quad (6.26)$$

skripta str. 119 - 120

- Ortonormálna projekcia (priemet) vektora x do vektora s

Definícia 6.10 *Ortogonalná projekcia (príemet) vektora x do vektora s je zložka vektora x v smere vektora s nazývaná x_s*

$$x_s = \frac{\langle s, x \rangle}{\|s\|^2} s = x_{s1} s, \quad (6.27)$$

kde skalár x_s , nazývame **súradnicou vektora x vo vektore s** .
skripta str. 120

- Vlastnosť postupnej aproximácie

A) Nech S_k je ortonormálna báza S_k . Keďže s_i sú vzájomne ortogonálne, zachováva sa vlastnosť najlepšej aproximácie pri danom k v zmysle najmenších štvorcov a platí vlastnosť **postupnej aproximácie**:

$$\hat{x}^{(k+1)} = \hat{x}^{(k)} + \langle s_{k+1}, x \rangle s_{k+1}. \quad (6.30)$$

skripta str. 121

- Rámec, tesný rámec

Definícia 6.13 *Rámcom vo vektorovom priestore \mathcal{E} nazývame neprázdnu podmnožinu $B = \{\psi_i\}$, $B \subset E$ práve vtedy, ak $L(B) = \mathcal{E}$ a $\forall f \in \mathcal{E}$ existujú kladné konečné konštanty C, D také, že platí:*

$$C \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq D \|f\|^2. \quad (6.44)$$

skripta str. 123

Rámce nie sú nevyhnutne lineárne nezávislé množiny. Reprezentácia vektora pomocou rámcov môže byť nadbytočná a nejednoznačná. Ak $C = D$, rámec sa nazýva **tesný** a navyše ak $\|\psi_{m,n}\| = 1$, potom C udáva mieru redundancie rámca oproti báze (ak $C = 2$, potrebujeme 2x viac vektorov na vyjadrenie f). Ak $C = D = 1$ $\|\psi_{m,n}\| = 1$ rámec $\{\psi_{m,n}\}$ tvorí ortonormálnu bázu priestoru \mathcal{E} .

skripta str. 124

Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia

- Vlastnosti waveletov oproti Fourierovej transformácii z hľadiska časovo-frekvenčnej analýzy
Reprezentácia signálov

- ❖ poznáte reprezentáciu signálov v čase, vo frekvencii (FT)
- ❖ wavelety umožňujú flexibilnú a cieleňú reprezentáciu niekde medzi.

Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované iba zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie (základného waveletu)

Waveletová transformácia (WT) má oproti STFT funkcie formované

- ❖ zmenou mierky a
- ❖ posunom

?? čo viac ??

skripta str. 8 – 11; prednáška 1 (pred1.doc) ; prednáška 2 (02_pred2.doc)

- Čo je časovo-frekvenčná rovina, a časovo frekvenčné okno, Čo je princíp neurčitosti, o čom hovorí

Pre znázornenie časovo-frekvenčných vlastností funkcií resp. signálov sa často používa tzv. **časovo-frekvenčná (TF) rovina** [17]. V TF rovine je každý signál reprezentovaný tzv. **časovo-frekvenčným oknom**. To charakterizuje umiestnenie energie signálu v čase a frekvencií.

❖ TF okno nám hovorí o tom aké drobné detaily sme schopní v signále sledovať.

❖ Hranice okna sú definované “štatisticky”, t.j. neznamená to, že mimo okna má signál nulové hodnoty
skripta str. 8; prednáška 1

1.2.1 Princíp neurčitosti

Pre reprezentáciu signálov v časovo-frekvenčnej rovine platí tzv. *princíp neurčitosti* (niečo ako princíp neurčitosti z kvantovej fyziky). Nech pre $x(t) \in L^2(\mathcal{R})$ platí

$$t \cdot x(t), X(\omega), \omega \cdot X(\omega) \in L^2(\mathcal{R}). \quad (1.4)$$

Potom pre TF okno $x(t)$ platí [19, str. 56]:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4, \quad (1.5)$$

príčom rovnosť platí, ak $x(t)$ je **Gaussova funkcia**⁸ v tvare

$$x(t) = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha t^2} \quad \alpha \in \mathcal{R}, \alpha > 0. \quad (1.6)$$

Prakticky nám to hovorí, že signály sa nedajú s ľubovoľnou presnosťou lokalizovať naraz vo frekvencií aj v čase, t. j. získať ľubovoľne malú plochu TF okna. Plocha TF okna je vždy minimálne 2, príčom minimálnu plochu zaberajú signály, pre ktoré platí (1.6). Dôkaz princípu neurčitosti je uvedený napr. v [19, str. 58], [22, str. 68].

⁸Rovnosť zostáva zachovaná aj pri modulácii funkcie $x(t)$ a ako neskôr uvidíme aj pri zmene mierky funkcie, pozri vzťah (1.9).

skripta str. 11

- Čo je to SWT?, Ako ju vypočítame(vzorce), Vlastnosti SWT – redundancia, obsah časovo-frekvenčného okna, Škálogram, čo je to, na čo je to, ako vypočítam hodnoty v ňom ?

Spojité waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ je definovaná [17] ako zobrazenie $L^2(\mathcal{R}) \rightarrow L^2(\mathcal{R}^2)$ vzťahom:

$$SWT_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{[a,b]}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{[a,b]}(t) \rangle \quad a \in \mathcal{R}^+, b \in \mathcal{R}. \quad (1.7)$$

Expanzné funkcie $\psi_{[a,b]}(t)$ sú definované zo základného waveletu $\psi(t)$ pomocou parametrov zmeny mierky a posunu a, b takto:

$$\psi_{[a,b]}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \psi(t) \in L^2(\mathcal{R}). \quad (1.8)$$

Vidíme, že reprezentácia signálu pomocou spektrálnych koeficientov SWT je značne nadbytočná — parametre a aj b sú spojité. V závislosti od parametra a SWT poskytuje pružné časovo-frekvenčné rozlíšenie. Ak časovo-frekvenčné okno $\psi(t)$ má rozmery σ_t, σ_ω a stred v bode $S_{t\omega} = (t_0, \omega_0)$, potom pri wavelete $\psi_{[a,b]}(t)$ nastanú zmeny

$$\sigma_t \Rightarrow a\sigma_t \quad \sigma_\omega \Rightarrow \sigma_\omega/a \quad (t_0, \omega_0) \Rightarrow (at_0 + b, \omega_0/a). \quad (1.9)$$

Vidíme, že zmeny rozmerov okna sú funkciou parametra a , ktorým je daná **úroveň rozlíšenia** v čase aj frekvencií. Ak $a > 1$, wavelet v čase roztiahneme, čím znižujeme

⁹Porovnaj z CTFT, kde signál rozkladáme pomocou nekonečne dlho trvajúcich vln bez časovej lokalizácie.

¹⁰Porovnaj z STFT, kde funkcie tvoríme pomocou modulácie a posunu oknovej funkcie.

¹¹Pod rádom waveletu rozumieme počet **nulových momentov** waveletu (pozri časť 1.3.2, str. 15)

schopnosť rozlišovať signály v čase, získavame však lepšie rozlíšenie vo frekvencií.

skripta str. 12

Vlastnosti SWT

Linearita:

Vyplýva priamo z linearity skalárneho súčinu

Posun v čase:

$$g(t) = f(t - b_0) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f(a, b - b_0)$$

Zmena mierky:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \Rightarrow SWT_g(a, b) = SWT_f\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)$$

prednáška 2 str. 13

Redundancia SWT (oba parametre a, b sú spojité) sa dá odstrániť **vzorkovaním** a, b .

prednáška 2 str. 17

Spektrum SWT sa znázorňuje vo forme tzv. **škálogramu** (SCG) [32], [30], čo je vlastne istá forma zobrazenia časovo-frekvenčnej roviny s vynesými magnitudami spektrálnych koeficientov. Frekvenčná os je však nahradená parametrom zmeny mierky a , takže ide o zobrazenie v tzv. **TS (z angl. Time-scale) rovine**.¹⁴ V dôsledku posunu TF okien waveletov v závislosti od parametra a (pozri obr. 1.6, vzťah (1.9)) je škálogram a TS rovina oproti spektrogramu a TF rovine „hore nohami“. Ak premapujeme súradnice (t, a) na (t, ω) , stredu TS okien by sa nám zobrazili do stredov TF okien príslušných waveletov.¹⁵ Príklad škálogramu reálneho signálu je na obr. 1.7. Maximálne fluktuácie hodnôt škálogram vykazuje pri takej hodnote parametra a , pri ktorej sa stredná frekvencia $f(t)$ zhoduje so strednou frekvenciou waveletov $\psi_{[a,b]}$.

¹⁵Prepočet súradnic (t, a) na (t, ω) je triviálny, treba si uvedomiť, že súradnici $a = 1$ zodpovedá $\omega = \omega_0$, t. j. stredná frekvencia základného waveletu. Následne stačí použiť (vzťah 1.9) na posun vo frekvenciách.

skripta str. 14

Časovo - frekvenčná analýza a waveletová transformácia

10. Čo je to SWT?, Ako ju vypočítame(vzorce), Vlastnosti SWT – redundancia, obsah časovo-frekvenčného okna, Škálogram, čo je to, na čo je to, ako vypočítam hodnoty v ňom ?

Spojité waveletová transformácia (SWT) funkcie $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ je definovaná ako zobrazenie $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ vzťahom:

$$SWT_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$

Expanzné funkcie $\Psi_{a,b}(t)$ sú definované zo základného waveletu $\Psi(t)$ pomocou parametrov zmeny mierky a posunu a, b nasledovne:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \Psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

Vidíme, že reprezentácia signálu pomocou spektrálnych koeficientov SWT je značne **nadbytočná** – parametre a aj b sú spojité. V závislosti od parametra a SWT poskytuje pružné časovo-frekvenčné rozlíšenie. Ak časovo - frekvenčné okno $\Psi(t)$ má rozmery σ_b, σ_ω a stred v bode $S = (t_0, \omega_0)$ potom

$$\sigma_{ab} = a \cdot \sigma_t \quad \sigma_{a\omega} = \sigma_\omega / a \quad S_{ab} = (at_0 + b, \omega_0/a)$$

Z hore uvedeného vzťahu je zrejماً dôležitá vlastnosť waveletov, že obsah TF okna zostáva **konštantne 4 $\sigma_t \sigma_\omega$** nezávisle od parametrov a a b .

Spektrum SWT sa znázorňuje vo forme tzv. **škálogramu**(SCG), čo je vlastne istá forma zobrazenia časovo-frekvenčnej roviny s vynesými magnitudami spektrálnych koeficientov. Súradnicami koeficientov sú však priamo parametre posunu (b) a zmeny mierky (a), t.j. jedná sa o zobrazenie v tzv. **TS (z angl. Time-scale) rovine**. V dôsledku posunu TF okien waveletov v závislosti od parametra a je škálogram a TS rovina oproti spektrogramu a TF rovine „hore nohami“.

11. Pomocou akých dvoch operácií su formované bazove funkcie(+vzorce) pri SWT? Ako a prečo bazove funkcie normalizujeme?

12. Základné charakteristiky waveletov – kompaktná podpora, nulové momenty, regularita

Existencia *nosiča*. Uzavretý interval $\langle a, b \rangle$ nazývame **kompaktný nosič** funkcie (waveletu) ak daný wavelet má nenulové funkčné hodnoty len na danom intervale. Pre wavelety bez kompaktného nosiča sa zvykne uvádzať funkcia zhora ohraničujúca funkčné hodnoty (t.j. charakterizujúca rýchlosť ich klesania) alebo tzv. *efektívny nosič* $\langle a, b \rangle$, mimo ktorého majú iba zanedbateľne malé funkčné hodnoty.

Počet nulových momentov. K-ty moment $\Psi(t)$ definujeme ako $m(k) = \int t^k \psi(t) dt$. Platí, že ak $\Psi(t)$ je K krát *diferencovateľná* a pre $t \rightarrow \pm\infty$ klesá dostatočne rýchlo, potom prvých K-1 momentov bude nulových. Potom ak $f(t)$ je na nejakom intervale polynómom max. K-1 stupňa, pre wavelety $\Psi_{a,b}(t)$ s nosičom na tomto intervale budú príslušné waveletové koeficienty $SWT_f(a, b)$ nulové.

Regularita (Daubechieová 1988) poskytuje mieru hladkosti funkcie $f(t)$. Ak definujeme regularitu vo frekvenčnej oblasti, potom je to také maximálne číslo r pre ktoré platí:

$$|F(\omega)| \leq c / (1 + |\omega|^{r+1})$$

Potom $f(t)$ je r-1 krát spojite *diferencovateľná* pričom r-tá derivácia môže byť nespojitá .

13. ako sa odstraňuje redundancia SWT ? + vzorce

Redundancia SWT sa odstraňuje navorkovaním a a b . Potom hovoríme o *waveletových rámcoch* (WF - Wavelet Frames), ktoré stále môžu byť nadbytočné. Ak nadbytočnosť odstránime, hovoríme o *waveletových radoch* (WR).

Štandardná voľba vzorkovania parametra a je $a = a_0^m$ s $m \in Z$ a $a_0 \neq 1$. T.j. úroveň rozlíšenia (doteraz charakterizovaná spojitým parametrom a) je odteraz charakterizovaná disktrétnym parametrom m . Parameter b potrebujeme navzorkovať tak, aby wavelety rovnako efektívne pokrývali celú časovú os pri každej úrovni rozlíšenia. Výslednú vzorkovaciu mriežku dostaneme v tvare:

$$a = a_0^m, \quad b = nb_0 a_0^m, \quad m, n \in Z \quad a_0 > 1, b_0 > 0$$

Najbežnejšie sa nadbytočnosť reprezentácie SWT odstraňuje *dyadickým vzorkovaním*, t.j voľbou $a_0 = 2, b_0 = 1$ vo vzorkovacej mriežke. Dosadíme do predchádzajúcich vzťahov dostávame:

$$a = 2^m \quad b = n2^m \quad m, n \in Z$$

14. aký je rozdiel medzi WF a WR ?

Waveletové rámce(WF) môžu byť nadbytočné. Waveletove rady(WR) už majú odstránenú nadbytočnosť.

15. čo je to dyadický wavelet + vzorec

Najbežnejšie sa nadbytočnosť reprezentácie SWT odstraňuje *dyadickým vzorkovaním*, t.j voľbou $a_0 = 2, b_0 = 1$ vo vzorkovacej mriežke. Dosadíme do predchádzajúcich vzťahov dostávame:

$$a = 2^m \quad b = n2^m \quad m, n \in Z$$

Pre posuny a zmeny mierky základného waveletu platí:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m} t - n)$$

Funkcie $\psi_{m,n}(t)$ potom nazývame *dyadické wavelety*.

16. aký je základný rozdiel medzi ortogonálnymi, biortogonálnymi a semiortogonálnymi waveletmi ?

Wavelety môžeme podľa ortogonalít v bázach ktoré generujú rozdeliť na tri základné skupiny:

- Wavelet nazývame **Ψ ortonormálny**, ak platí:

$$\tilde{\psi} \equiv \psi^*$$

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j,k,l,m \in Z$$

T.j duálny wavelet sa od základného líši iba konjugáciou a báza $\{\Psi_{m,n}\}$ je ortonormálna, t.j. $\Psi_{m,n}$ sú na seba ortogonálne rovnakých úrovniach rozlíšenia a aj medzi rôznymi úrovňami.

- Wavelet $\psi \in L^2(R) \in Z$ sa nazýva **semiortogonálny** (nazývaný aj pre-wavelet), ak platí:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)$$

t.j. je zachovaná ortogonalita len medzi rôznymi úrovňami rozlíšenia.

- Pár $(\psi, \tilde{\psi})$ spĺňa podmienku **biortogonalita** (hovoríme o biortogonálnych waveletoch), ak množiny $\{\Psi_{m,n}\}$ a $\{\tilde{\Psi}_{m,n}\}$ sú duálne bázy, spĺňajúce podmienku **biortogonalita**:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta(j-l)\delta(k-m) \quad j,k,l,m \in Z$$

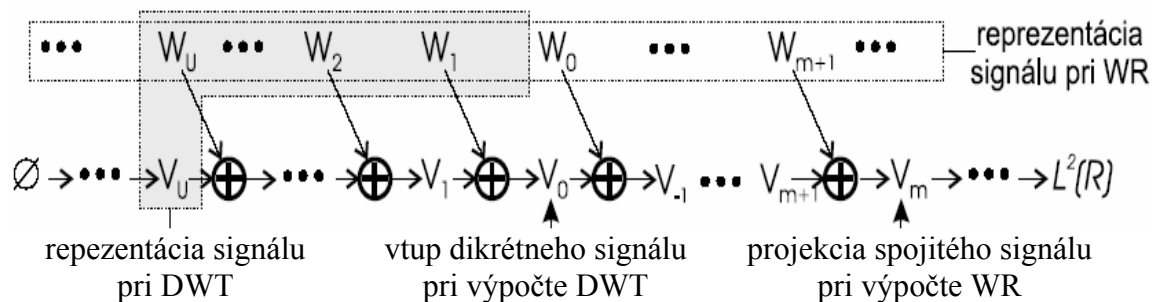
17. Ako vyzerá hierarchia priestorov pri MRA?

Cieľom pri *analýze viacúrovňovým rozlíšením (MRA - z angl. MultiResolution Analysis)* je rozložiť ľubovoľný signál $f(t) \in L^2(R)$ do systému hierarchických podpriestorov W_m , pričom každý z podpriestorov charakterizuje rôzne rýchle zmeny v signále. Aby sme to dosiahli definujeme MRA ako postupnosť uzavretých podpriestorov V_m priestoru $\in L^2(R)$ pre ktoré platí:

$$\{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(R)$$

←horšia aproximácia lepšia→

18. Aproximacne a diferencne priestory v MRA, nakreslite a vysvetlite preco je to tak.



Znázornenie hierarchie aproximačných (V_m) a diferenčných (W_m) podpriestorov v MRA s vyznačeným vstupom a reprezentáciou signálu pri WR a DWT.

Dôsledok 1:

$$\{\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}t - n), n \in Z\} \text{ je bázou } V_m.$$

Dôsledok 2:

$$\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), n \in Z\} \text{ je bázou } W_m.$$

Dôsledok 3:

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

Aproximačnú hierarchiu podpriestorov V_m potom môžeme skombinovaním vzťahov

$$V_\infty = \{0\} \quad V_{-\infty} = \{L^2(R)\}$$

$$V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

vyjadriť v tvare:

$$L^2(\mathbb{R}) = \underbrace{\dots \oplus W_2 \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \dots}_{V_1} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{V_0}$$

Z predchádzajúcich vzťahov je zrejmé, že priestorom V_m sa zlepšujú aproximačné schopnosti vďaka pridávaniu diferenčných priestorov W_m , ktoré sú schopné vyjadriť detaily na danej úrovne rozlíšenia.

19. Dilatačné rovnice – ich vzorce + vysvetlite princíp (prečo je to tak?)

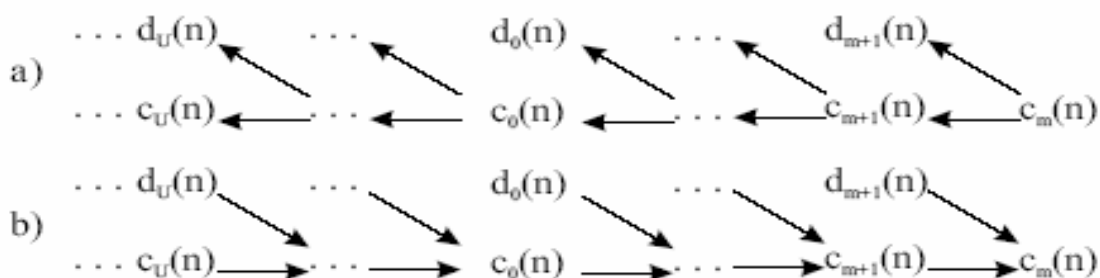
Relácia zmeny rozlíšenia resp. dilatačné rovnice:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n) \varphi(2t - n)$$

Postupnosti h_{mr} a g_{mr} charakterizujú vzťahy medzi bázami na susedných úrovniach rozlíšenia a nazývajú sa *koefficienty pre zmenu rozlíšenia* resp. *dilatačné koefficienty*.

20. Algoritmus výpočtu Waveletových radov + základne vzorce, obrázky



Rozklad(a) a rekonštrukcia(b) koeficientov mierky pri výpočte WR a DWT

Pri výpočte waveletových radov z $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ rýchlym algoritmom (RWT) postupujeme nasledovne:

1. Začneme s projekciou $s(t)$ do V_m pomocou vzťahu:

$$c_m(n) = \langle s(t), \varphi_{m,n}(t) \rangle$$

V_m môžeme pritom zvoliť tak, aby sme boli schopní pomocou koeficientov $c_m(n)$ aproximovať $s(t)$ s dostatočnou resp. ľubovoľnou presnosťou.

2. Pokračujeme rozkladmi v diskretnej oblasti pomocou vzťahov:

$$c_{m+1}(n) = \sum_k h_{mr}(k - 2n) c_m(k)$$

$$d_{m+1}(n) = \sum_k g_{mr}(k - 2n) c_m(k)$$

často iba po želanú úroveň rozkladu U .

Spätnú rekonštrukciu signálu $s(t)$ (označme ju $\hat{s}(t)$) z waveletových radov môžeme získať sčítaním získaných detailov signálu a prípadnej zbytkovej aproximácie v priestore V_U

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_{W_{m+1}}(t) + \hat{s}_{W_{m+2}}(t) + \dots + \hat{s}_{W_U}(t) \hat{s}_{V_U}(t)$$

alebo najprv spätnou rekonštrukciou koeficientov $c_m(n)$ pomocou vzťahu:

$$c_m(n) = \sum_k h_{mr}(n - 2k) c_{m+1}(k) + \sum_k g_{mr}(n - 2k) d_{m+1}(k)$$

a použitím aproximácie $f(t)$ vo V_m , t.j.:

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_{V_m}(t)$$

21. Škálogram v DWT, vlastnosti oproti skalogramu pri SWT, vlastnosti

- skalogram je vlastne ista forma zobrazenia casovo-frekvencnej roviny s vynesenyimi magnitudami spektralnych koeficientov.

Vlastnosti funkcie mierky a waveletov

22. Co su to $h_{mra}(n)$? Popiste 3 ich zakladne vlastnosti pre ortonormale wavelety.

- $h_{mr}(n)$ a $g_{mr}(n)$ sú koeficienty pre zmenu rozlíšenia alebo dilatačné koeficienty

- 1) aby mohli byť splnene podmienky pre $h(n)$, treba aby dĺžka $h(n)$ (oznacme ju N) bola parna
- 2) $h(n)$ a $g(n)$ sa navzajom jednoznacne urcuju ($h(n)$ a $g(n)$ –zjednodusene oznacenie)
- 3) k danemu waveletu existuje jedina funkcia mierky (a naopak)

vlastnosti matematicky (nie su to tie iste):

$$1) \sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad 2) \sum_n h(n)h(n-2k) = \delta(k) \quad 3) \sum_n g(n) = 0$$

23. Súvisí $h(n)$ s $g(n)$ pri ortonormalnych waveletoch? Ako je to v spektre? Základné vlastnosti $h(n)$ s $g(n)$ pri ortonormalnych waveletoch - popisat zhruba

- Ano suvisia:

$$g(n) = \pm(-1)^n h(M-n) \quad |G(\Omega)| = |H(\Omega + M\pi)|$$
$$\sum_n h(n)g(n-2k) = 0 \quad |G(\Omega)|^2 + |H(\Omega)|^2 = 2$$
$$|G(\Omega)||H(2\pi - \Omega)| + |H(\Omega)||G(2\pi - \Omega)| = 0$$

24. Ako vypočítat $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ ak poznáme koeficienty pre zmenu mierky? + vzorec pre vypocet v case aj frekvencií

- Vychadzame z dilatačných rovnic: [1.51] $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi(2t-n)$

$$[1.52] \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mr}(n)\varphi(2t-n)$$

Tieto rovnice mozeme riesit iteracne, pricom ak postupnosť bude konvergovat k pevnejmu bodu, potom je pevny bod hladanym riesenim. Iteracie su definovane:

$$\varphi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mr}(n)\varphi^{(k)}(2t-n) \text{ a } \psi(t) \text{ podľa [1.52]}$$

Uvedeny iteracny postup sa nazyva aj *kaskadovy algoritmus* (v case)

$$\Phi^{(k+1)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{mr}\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi^{(k)}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

toto je vo frekvencií

25. K- regulárny filter, co je to? Ake ma zakladne vlastnosti? Aky max. K regularny moze byt ortogonalny filter dĺžky N? Preto?

- Dolezity koncept, ktory spaja momentove vlastnosti, diferencovateľnosť, regularitu a vlastnosti dilatačných koeficientov, je koncept tzv. *K-regula rnych* filtrov. KIO filter s impulzovou odpoveďou

$h(n)$, ktorá splňa podmienky v tabuľke 2.1 a generuje funkciu mierky $\varphi(t)$ sa nazýva *K-regula rny* vtedy, ak platia nasledovne ekvivalentne tvrdenia:

1. $H(\omega)$ má K -nasobnú nulu v $\omega = \pi$
2. prvých K diskretných aj spojitych waveletových momentov sa rovnajú nule, t. j.:
 $m_{\psi}(k) = 0, \mu_{\psi}(k) = 0$ pre $k = 0, 1, \dots, (K - 1)$
3. polynomicke postupnosti stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov $h(n)$
4. polynomy stupňa $\leq (K - 1)$ môžu byť vyjadrené lineárnou kombináciou posunov φ .

Ak N je dĺžka filtra $h(n)$, potom polynom $H(z)$ má stupeň $N-1$ a $L(z)$ stupeň $N-1-K$. Aby $L(z)$ zabezpečilo splnenie nutných $N/2$ podmienok pre ortogonalitu, musí mať aspoň stupeň $N/2-1$.

Potom $K \leq N/2$. <-max reg.

26. Vyjadrite sa k waveletom a ich možnostiam zisťovať nespojitosti v signale a jeho deriváciach

- použitím DbK waveletu môžeme spoľahlivo detekovať nespojitosti v prvých $K - 1$ deriváciach.

Wavelety môžu slúžiť aj ako viacurovnový derivátor

Nech $h(n)$ je K -regulárny filter, generujúci $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Potom waveletové koeficienty zodpovedajú K -tej derivácii vyhladenej verzie analyzovaného signálu:

$$\langle f(x), \psi(x - u) \rangle = \partial^K \{ \gamma * f \}(u) \text{ kde } \Gamma(\omega) = \psi * (\omega) / (j\omega)^K$$

27. Aké poznáte metódy návrhu ortogonálnych waveletov? Ich základné princípy par vetami.

-Typy návrhov:

- Ortogonalizácia (napr. Battle-Lemarie wavelety)
- Parametrizácia koeficientov mierky
- Spektrálna faktorizácia – návrh waveletov s K nulovými waveletovými momentmi (Db.)

Parametrizácia koeficientov mierky

Jednoduchým využitím stupňov vol'nosti v $\sum_n h(n)h(n - 2k) = \delta(k)$ môžeme navrhovať základné

ortonormalné wavelety. Splníme nutné podmienky na ortonormalitu a zvyšok môžeme parametrizovať

- System 0. radu – dĺžka $h(n)$ je 2. Nema žiadne stupne vol'nosti.

$$\text{Podmienky sú: } h(0) + h(1) = \sqrt{2} \quad h(0)^2 + h(1)^2 = 1$$

$$\text{Riesením je: } h(n) = \left\{ \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right\}$$

- radu R – dĺžka $h(n)$ je $2R + 2$, má R stupňov vol'nosti

Parametrizáciou získané riešenia majú záručene iba minimálnu regularitu. Vhodnou vol'bou parametrov však môžeme dosiahnuť zlepšenie vlastností, prípadne ekvivalenciu (pri danej dĺžke $h(n)$) s ľubovoľným iným ortogonálnym waveletovým systémom.

Spektrálna faktorizácia

Metódy návrhu waveletov s K nulovými momentmi využívajú koncept K -regulárnych filtrov. Metóda na výpočet koeficientov mierky, ktoré generujú ortogonálne waveletové systémy s K nulovými momentmi waveletov.

Nech $H(\Omega)$, DTFT postupnosti $h(n)$ s dĺžkou N má K nulov v $\Omega = \pi$ a je v tvare:

$$H(\Omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{i\Omega}}{2} \right) L(\Omega) \text{ potom } H(\Omega) \text{ splňa podmienku } |L(\Omega)|^2 + |H(\Omega + \pi)|^2 = 2 \text{ vtedy a len}$$

$$\text{vtedy, ak: } |L(\Omega)|^2 = Q(\sin^2(\Omega/2))$$

$$\text{Ak } \sin^2(\Omega/2) = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^{-1}$$

potom musime najst $|L(z)|^2 = Q(z)$

Riesenie vzt'ahu nie je jednoznacne. $L(z)$ ziskame tzv. *spektralnou faktorizaciou*

28. B spline wavelety – co je to, na co to je dobre ? Cim sa lisia semiortogonalne a biortogonalne B-spline wavelety

Spline funkcie su po castiach polynomicke funkcie daneho stupna s plynulym prechodom medzi jednotlivymi castami. *B-Spline* funkcie $\phi_{SM}(t)$ stupna M su tvorene M -nasobnou konvoluciou „Box“ funkcie:

$$B(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,1) \\ 0 & \text{inde} \end{cases}$$

B-spline funkcie su *funkciami mierky* pre *B-spline wavelety*

Semiortogonalne wavelety tvoria neortogonalne bazy W_m , pre ktore plati:

$$V_m \perp W_m \quad V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$$

Pricom pre biortogonalne plati

$$V_m = \tilde{V}_m \quad W_m = \tilde{W}_m$$

29. Co plati pre nuly (reálnej) autokorelaciej funkcie zo sekvencie $h(n)$?

- * je konjugacia

ak z_k je nula $P(z)$ potom nula je aj $1/z_k^*$ – nuly sa vyskytuju v dvojiciach $\{z_k, 1/z_k^*\}$
ak $h(n)$ je realne a $H(z)$ ma nulu v z_k potom nuly su aj v z_k^* , $1/z_k$ a $1/z_k^*$

30. Co su jej spektralne faktory a ake maju vlastnosti, co je to minimalna faza ?

- Predpokladajme, ze pre dane $P(z)$ hl'adame vyhovujuce $H(z)$. Take $H(z)$ nazyvame *spektralny faktor* $P(z)$ a metodu jeho ziskania *spektralnou faktorizaciou*. Spektralne faktory nie su jednoznacne urcene a ziskame ich priradenim vzdy iba jednej nuly z dvojic nul.

Mozne vysledne $H(z)$ maju rovnaku magnitudovu charakteristiku, lisia sa iba vo fazovej charakteristike. Dolezite je riesenie s *minimalnou fazou*, kde pri vytvarani $H(z)$ pouzijeme iba nuly v a na jednotkovej kruznici.

41. Ak je výstupný signál identický so vstupným, BF má vlastnosť úplnej rekonštrukcie (perfektnej). Analyzujeme teraz bližšie za akých podmienok nám v dvojpásmovej BF dochádza k úplnej rekonštrukcii. Predpokladajme, že máme k dispozícii (reálne neexistujúce) ideálne DP a HP filtre. Filtráciami vždy odstránime nepotrebnú polovicu spektra a pri pod- a nadvzorkovaní sa spektrá akurát zaplnia, takže nevznikajú žiadne problémové situácie. "Väčšinou" však máme k dispozícii reálne filtre, ktoré po podvzorkovaní vytvárajú väčší či menší aliasing. Po nadvzorkovaní signály v oboch vetvách zostanú zliate, t.j. drobná deformácia signálu v oboch vetvách ostane aj po interpolačnom filtrovaní. Ak má mať BF úplnú rekonštrukciu, tek požadujeme, aby sa tieto deformácie pri konečnom súčte navzájom eliminovali. Filtre musia vytvárať deformácie vhodným spôsobom, ktorý elimináciu zaručuje.

42. pri dvojpásmových BF má dôležitú úlohu polpásmový filter. Je to taký KIO filter s impulzovou charakteristikou $p(n)$ a prenosovou funkciou $P(z)$, pre ktorý platia nasledovné podmienky: 1) v z-rovine: $P(z)=P(z^{-1})$ $P(z)+P(-z) = 2$

2) vo frekvencii: $P(e^{j\Omega}) = P(e^{-j\Omega})$ $P(e^{j\Omega}) + P(e^{j(\pi-\Omega)}) = 2$

3) v čase: $p(n)=p(-n)$ $p(n) + (-1)^n p(n) = 2 \delta(n)$

Rovnako dôležitý je pojem tzv. *energeticky komplementárnych* filtrov. Filtre s prenosovými funkciami $H(z)$ a $G(z)$ nazývame *energeticky komplementárne* ak platí:

$$|H(e^{j\Omega})|^2 + |G(e^{j\Omega})|^2 = 2$$

43. podmienka: $R_a(z)=0$

44. ortogonálna: staci poznať 1 filter ostatné sa dajú vypočítať z neho. $\hat{H}(z)$

biortogonálna: treba 2. $H(z), \hat{H}(z)$ -||-

45. Má nulové oneskorenie avšak obsahuje *nekauzálne* časti - filtre pre analýzu a syntézu v oboch vetvách majú impulzové charakteristiky časovo obrátené. Oneskorením nekauzálnych filtrov (vynásobením členom $z^{-(2l-1)}$)dostaneme kauzálnu BF s oneskorením $2l-1$

Filtre pre analýzu sú ortogonálne navzájom a aj voči svojim párnym posunom.

Ak sústavu začneme navrhovať od syntézy, t.j. $H(z)=H_0(z)$, výsledkom je zámena analyzačnej a syntetizačnej časti BF, t.j. vo vzťahoch na výpočet filtrov sa iba zmení označenie duálnosti.

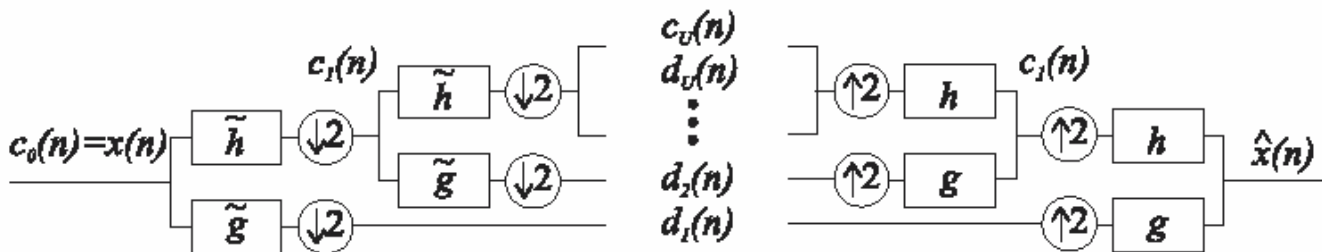
46: obrázky... prečo sú časovo otočené? Je to nutné, lebo ináč by filtre v DP a HP vetve neformovali polpásmové filtre ($p(n)$ by nebolo symetrické) a úplná rekonštrukcia by sa nedal dosiahnuť.

47. matice \hat{H}, \hat{G} sú decimálne a majú rozmery $N \times N/2$. H, G interpolačné matice s rozmermi $N/2 \times N$ Podmienky na úplnú rekonštrukciu v ortogonálnom riešení banky filtrov sú zahrnuté v Tab.1.2.

Analogicky môžeme konštatovať že biortogonálne riešenie banky filtrov vyhovuje podmienkam v časti 1.9.

Uvedomme si, že na to, aby dvojpásmové banky filtrov mohli počítat' WR a DWT musia mat' oba filtre v DP vetve aspoň jednu nulu pri $\omega = \pi$ a naopak oba filtre v HP vetve jednu nulu pri $\omega = 0$. Táto podmienka je nutná, jej postačujúcosť je však na hranici. To rýchlo zistíme pri výpočte WR a DWT. Doteraz sme totiž uvažovali iba rozklad na jednej u' rovni rozlíšenia a pri výpočte WR a DWT potrebujeme opakovane

rozkladať koeficienty v DP časti.

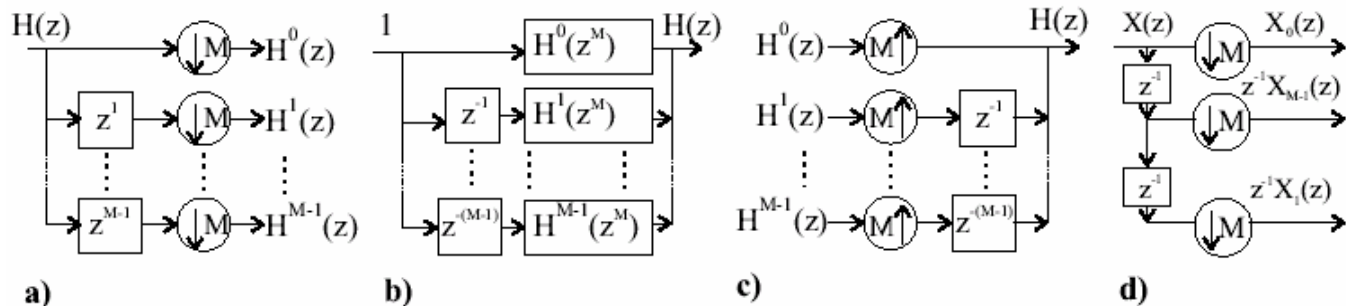


Obr. 3.13: Princíp realizácie výpočtu diskretnéj (dyadickej) waveletovej transformácie bankou filtrov.

50. Pri systémoch s rôznym taktovaním je často vhodné reprezentovať filtre (ale aj signály) ich tzv. *polyfázovými komponentami*. Filter s prenosovou funkciou $H(z)$ a impulzovou charakteristikou $h(n)$ môžeme rozložiť na M polyfázových zložiek $H_k(z)$ pomocou vzťahu:

$$H^k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k + Mn) z^{-n}$$

Potom hovoríme o *polyfázovej reprezentácii* $H(z)$ pomocou jeho polyfázových zložiek $H_k(z)$.



Obr. 5.1: Polyfázová reprezentácia prenosovej funkcie $H(z)$: a) rozklad na M polyfázových komponentov $H_k(z)$ b) spätné zloženie prenosovej funkcie odpovedajúce vzťahu (EQ:POLY:ZLOZENIE) c) ekvivalent (b), avšak v tvare, keď vyniká jeho dualita s rozkladom d) Tvar polyfázového rozkladu, ak chceme použiť iba oneskorenia (porovnaj s (a))