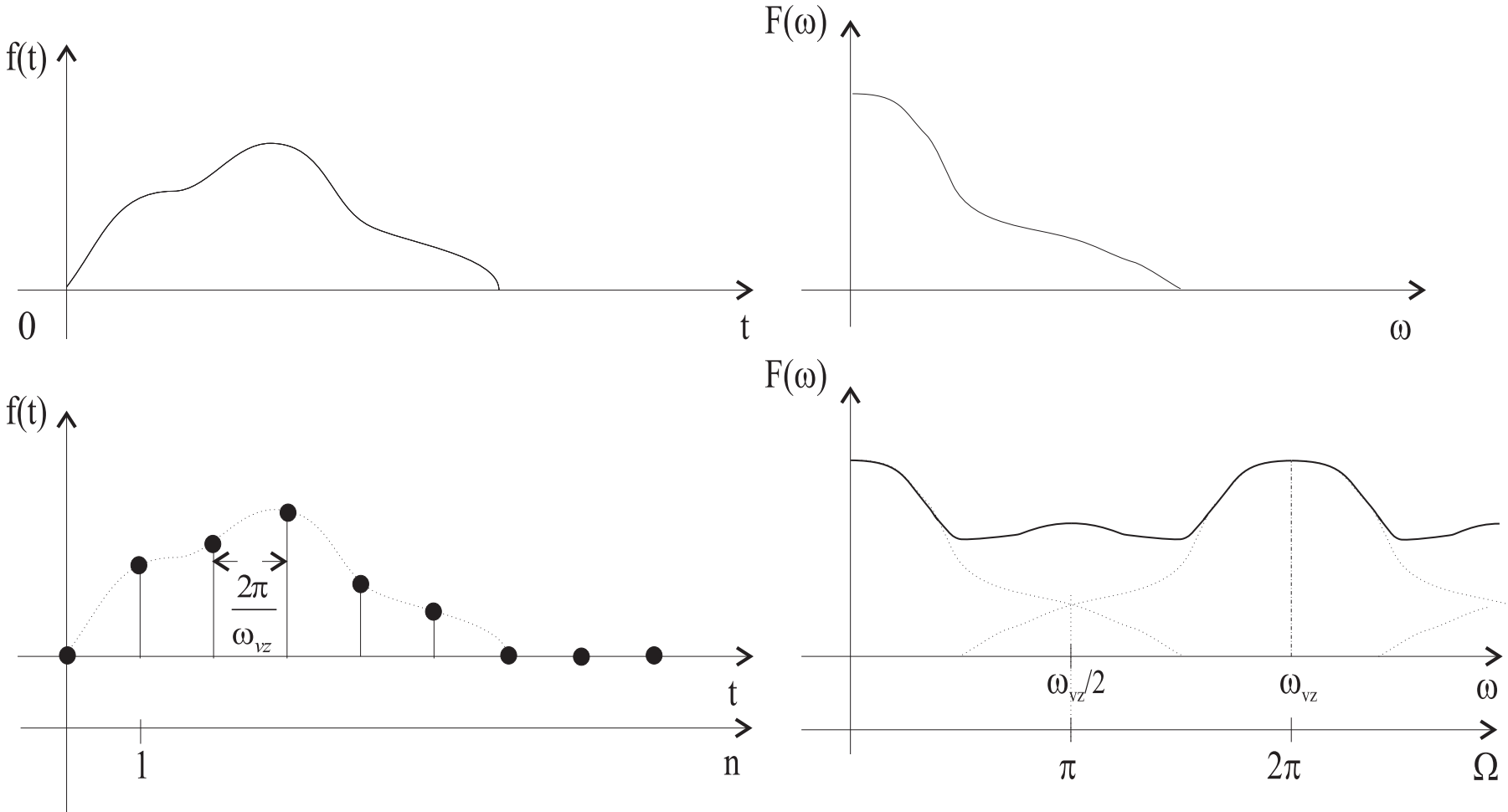


# FT a DTFT signálu



$$\Omega = 2\pi\omega / \omega_{vz}$$

## 6.2 Z-transformácia a diskkrétne systémy

**Definícia 6.1** Nech postupnosť  $x(n) \in l^2(\mathcal{Z})$  predstavuje diskrétny signál. Jeho Z-transformácia je definovaná ako

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (6.1)$$

kde  $z$  je komplexná premenná.

Z-transformáciou každému bodu komplexnej roviny „ $z$ “, pre ktorý vzťah 6.1 konverguje, priradíme komplexné číslo — funkčnú hodnotu  $X(z)$ . Niektoré základné vlastnosti Z-transformácie sú uvedené v tabuľke 6.2.

Parametrizáciou premennej  $z$  pomocou  $z = e^{j\Omega}$  vyberáme iba hodnoty ležiace na jednotkovej kružnici a dostávame **frekvenčnú charakteristiku**  $X(\Omega)$  postupnosti  $x(n)$ . Parameter  $\Omega$  sa nazýva **pomerová uhlová frekvencia**. Uvedený prechod od  $x(n)$  k  $X(\Omega)$  je ekvivalentný výpočtu DTFT signálu  $x(n)$ , pozri tabuľku 6.1.

Ak  $x(n)$  predstavuje odpoveď diskrétneho systému na Kroneckerov impulz  $u(n)$ , potom  $X(z)$  je prenosová funkcia systému. V tomto texte sa stretneme iba so systémami s konečnou impulzovou odpoveďou (KIO). Príkladom takýchto systémov sú **KIO filtre**. Vyjadrením frekvenčnej charakteristiky prenosovej funkcie v tvare

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega)e^{j\phi(\Omega)} \quad (6.2)$$

Časová oblasť	$z$ -rovina	poznámka
$x(n)$	$X(z)$	$\alpha, \beta \in \mathcal{R}$
$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$	
$x(n - k)$	$z^{-k} X(z)$	
$x(n) \star y(n)$	$X(z)Y(z)$	
$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$	
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	

Tabuľka 6.2. Vybrané vlastnosti  $Z$ -transformácie

dostávame  $M(\Omega)$  — **magnitúdovú** a  $\phi(\Omega)$  — **fázovú frekvenčnú charakteristiku** systému. Tie sú jednoznačne určené polohou, počtom a rádom **núl** prenosovej funkcie (KIO systémy majú póly iba v  $z = 0$ ). Pre úplnosť uvedme, že pod formuláciou „funkcia má (niekde) *nulu* resp. **pól**“ rozumieme, že tam má *nulovú* resp. *nekonečnú* funkčnú hodnotu. Podmienky na dosiahnutie linearitu fázovej charakteristiky sú zhrnuté napr. v [7]. Detailný popis problematiky  $Z$ -transformácie a diskretných systémov je napr. v [7], [21], [22].

*Z transformácia:*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad x(n) \in l^2(z)$$

*prenosová funkcia:*

$$X(z)$$

*Frekvenčná charakteristika prenosovej funkcie:*

$$X(\Omega), \quad z = e^{j\Omega}$$

*Pomerová uhlová frekvencia:*

$$\Omega$$

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega)e^{j\phi(\Omega)}$$

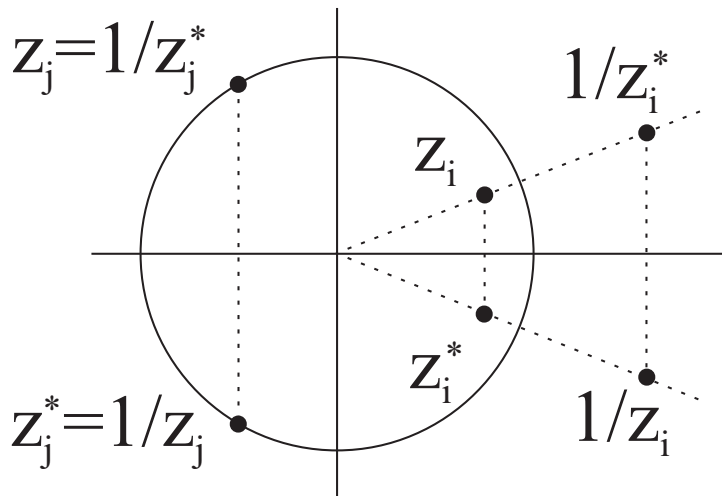
*Magnitúdová frekvenčná charakteristika:*

$$M(\Omega)$$

*Fázová frekvenčná charakteristika:*

$$\phi(\Omega)$$

Prenosová funkcia - nuly



$$X(z) = \prod_l (z - z_l)^{k_l}$$

$k_l$  = nula koľkého rádu je v  $z_l$

## Prenosová funkcia s reálnymi koeficientami

Ak  $X(z)$  má nuly v  $z_i$  a aj v  $z_i^*$ , potom má reálne koeficienty

Príklad: kedy má nasledovná funkcia reálne koeficienty?

$$X(z) = (z - a)(z - b) = z^2 - z(a + b) + ab$$

## Lineárna fázová charakteristika frekvenčných charakteristík

Ak  $X(z)$  má nuly v  $z_i$  a aj v  $1/z_i$ , potom má lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku

Príklad: kedy má nasledovná funkcia lineárnu fázovú charakteristiku?

$$X(z) = (z - a)(z - b) = z^2 - z(a + b) + ab = z \left( z - (a + b) + z^{-1} ab \right)$$

$$X(\Omega) = e^{j\Omega} \left[ -(a + b) + (e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} ab) \right] \stackrel{ab=1}{=} e^{j\Omega} \left[ -(a + b) + 2 \cos(\Omega) \right]$$

## Nekauzálny signály

Doteraz: KIO filtre kauzálny a impulzové charakteristiky  $h(n)$  pre  $n \in N$

Zovšeobecnenie:

Ak  $n \in Z$ , prvok pri  $n=0$  budeme označovať bodkou: Napr:  $x(n) = \{1, \overset{\cdot}{3}, 1\}$

<i>Časová oblasť</i>	<i>Z-rovina</i>	<i>Frekvenčné char.</i>
$x(n)$	$X(z)$	$X(\Omega)$
$x(n-k)$	$z^{-k} X(z)$	$e^{-j\Omega k} X(\Omega)$
$x(n) * y(n) = \sum_k x(n-k)y(k)$	$X(z)Y(z)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$X^*(\Omega) = X(-\Omega)$ ak $x(n) \in R$
$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	$X(\Omega + \pi)$
$\langle x(k), x(k-n) \rangle$	$X_*(z^{-1})X(z)$	$X^*(\Omega)X(\Omega)$
$x(Mn)$	$X(z^{1/M})$	$X(\Omega/M)$
$x(n/M)$	$X(z^M)$	$X(M\Omega)$

**Je jasné napr. nasledovné:**

- Čo je viacnásobná „nula“ ?
- Aká je situácia na jednotkovej kružnici? (omega, vplyv núl, pólov, ...)
- Rukolapný súvis medzi násobením a konvolúciou?
- Súvis medzi DP a HP charakteristikou v 4. riadku tabuľky?
- **Ako si predstaviť  $X(\Omega)$  v komplexnej rovine? (skladanie točiacich sa vektorov)**

# Autokorelácia a jej frekvenčné charakteristiky.

Autokoreláciou sekvencie  $h(n)$  budeme nazývať sekvenciu:

$$p(n) = \langle h(k), h(k-n) \rangle$$

Použitím DTFT dostávame:

$$P(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) e^{-i\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) h^*(k-n) e^{-i\Omega n} = H^*(\Omega) H(\Omega) = |H(\Omega)|^2$$

$P(\Omega)$  je reálna nezáporná funkcia

Platí:

$$|H^*(\Omega)| = |H(\Omega)|$$

$$H(\Omega) H(\Omega) \neq |H(\Omega)|^2$$

$$|H(\Omega)^2| \neq |H(\Omega)|^2$$

# Autokorelácia a „z“ rovina

Vyjadrením  $P(\Omega) = H^*(\Omega)H(\Omega)$  v Z-rovine dostaneme:

$$P(z) = H_*(z^{-1})H(z)$$

, kde označenie \* znamená konjugáciu koeficientov, nie celej funkcie. Vidíme, že ak  $z_k$  je nula  $P(z)$  potom nula je aj  $1/z_k^*$ , t.j. nuly sa vyskytujú iba v pároch. Navyše ak  $h(n)$  je reálne, potom  $P(z)$  má nuly aj v  $z_k^*$  a  $1/z_k$ .

Platí:

$$P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{N_1} \left( (1 - z_{1_i} z^{-1})(1 - z_{1_i}^* z) \right) \prod_{i=1}^{N_2} \left( (1 - z_{2_i} z^{-1})(1 - z_{2_i}^* z) \right)$$

, kde  $N_1$  je počet párov núl na jednotkovej kružnici ( platí  $|z_{1_i}|=1$ , pár je vlastne dvojnásobný koreň ) a  $N_2$  je počet párov núl mimo jednotkovej kružnice ( platí  $|z_{2_i}|<1$  ).