

1.A V samoobslužnej čínskej reštaurácii sú dva pulty: mäsový a šalátový. Do reštaurácie prichádzajú zákazníci s priemernou rýchlosťou 20/hod. Sú splnené podmienky Poissonovho procesu.

60% zákazníkov hneď po príchode ide k mäsovému pultu, ostatní k šalátovému. Po obslúžení pri mäsovom pulte 80% zákazníkov si ide sadnúť. Ostatní sa stavajú do radu na šalát. 90% zákazníkov obslužených pri šalátovom pulte si ide sadnúť a ostatní sa stavajú do radu na mäso. Sú splnené požiadavky na exponenciálne rozdelenie času obsluhy pri oboch pultoch. Priemerný čas obsluhy jedného zákazníka pri mäsovom pulte je 4 min. a pri šalátovom 5 min..

Koľko zákazníkov čaká pri mäsovom pulte? Neobmedzujte sa na prípad, že jeden zákazník sa do každého radu stavia len jeden krát. (20 bodov)

2.A Máme zovšeobecnený Markovov model binárnej chybovosti daný maticou prechodov a maticou generovania chýb

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & \\ & 0.2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0.9 & \\ & 0.5 \end{pmatrix}$$

Doplňte ostatné hodnoty, nakreslite model a vypočítajte rekurentný vzťah pre  $p(n)$  s krokom rekurencie 2. (20 bodov)

3.A Vytvorte procedúru pre generovanie náhodných čísel s hustotou rozdelenia pravdepodobnosti  $f(x) = e^{-x}$ . Použite ľubovoľný počet generátorov s rovnomerným rozdelením na intervale (0,1). Generátor musí generovať číslo zakaždým, keď generuje číslo náhodný generátor s rovnomerným rozdelením. (10 bodov)

4.A Podnik začína so stavom 100 nových zariadení. Plánujú nasledovné:

- zachovať rovnaký počet zariadení v nasledujúcich piatich rokoch,
- na začiatku 6. roku chcú zvýšiť počet na 120 a pokračovať s týmto počtom ďalších 5 rokov.

Koľko musia kúpiť nových zariadení na začiatku siedmeho roku? Pravdepodobnosť, že zariadenie zlyhá v 1.roku, je 0,2, v 2.roku 0,3 a v 3.roku 0,5. (5 bodov)

5.A Závod na výrobu súčiastok dodáva určitý druh súčiastok s mesačnou spotrebou u odberateľa 200000 kusov. Všetky veličiny sú úplne známe a deterministické. Ak nie je prípustný deficit:

vypočítajte optimálne dodávky, ak náklady na skladovanie jedného kusu sú 10 korún za mesiac a náklady na dodávku sú 1000 Sk. (5 bodov)

1.A V samoobslužnej čínskej reštaurácii sú dva pulty: mäsový a šalátový. Do reštaurácie prichádzajú zákazníci s priemernou rýchlosťou 20/hod. Sú splnené podmienky Poissonovho procesu.

60% zákazníkov hneď po príchode ide k mäsovému pultu, ostatní k šalátovému. Po obslúžení pri mäsovom pulte 80% zákazníkov si ide sadnúť. Ostatní sa stavajú do radu na šalát. 90% zákazníkov obslužených pri šalátovom pulte si ide sadnúť a ostatní sa stavajú do radu na mäso. Sú splnené požiadavky na exponenciálne rozdelenie času obsluhy pri oboch pultoch. Priemerný čas obsluhy jedného zákazníka pri mäsovom pulte je 4 min. a pri šalátovom 5 min..

Koľko zákazníkov čaká pri mäsovom pulte? Neobmedzujte sa na prípad, že jeden zákazník sa do každého radu stavia len jeden krát. (20 bodov)

2.A Máme zovšeobecnený Markovov model binárnej chybovosti daný maticou prechodov a maticou generovania chýb

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & \\ & 0.2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0.9 & \\ & 0.5 \end{pmatrix}$$

Doplňte ostatné hodnoty, nakreslite model a vypočítajte rekurentný vzťah pre  $p(n)$  s krokom rekurencie 2. (20 bodov)

3.A Vytvorte procedúru pre generovanie náhodných čísel s hustotou rozdelenia pravdepodobnosti  $f(x) = e^{-x}$ . Použite ľubovoľný počet generátorov s rovnomerným rozdelením na intervale (0,1). Generátor musí generovať číslo zakaždým, keď generuje číslo náhodný generátor s rovnomerným rozdelením. (10 bodov)

4.A Podnik začína so stavom 100 nových zariadení. Plánujú nasledovné:

- zachovať rovnaký počet zariadení v nasledujúcich piatich rokoch,
- na začiatku 6. roku chcú zvýšiť počet na 120 a pokračovať s týmto počtom ďalších 5 rokov.

Koľko musia kúpiť nových zariadení na začiatku siedmeho roku? Pravdepodobnosť, že zariadenie zlyhá v 1.roku, je 0,2, v 2.roku 0,3 a v 3.roku 0,5. (5 bodov)

5.A Závod na výrobu súčiastok dodáva určitý druh súčiastok s mesačnou spotrebou u odberateľa 200000 kusov. Všetky veličiny sú úplne známe a deterministické. Ak nie je prípustný deficit:

vypočítajte optimálne dodávky, ak náklady na skladovanie jedného kusu sú 10 korún za mesiac a náklady na dodávku sú 1000 Sk. (5 bodov)

A.1. Do servisu prichádzajú z predajní reklamované TV priemernou rýchlosťou 5/hod. a sú splnené požiadavky na Poissonov proces. Počet TV je dostatočne veľký, aby sme ho mohli považovať za nekonečný. Hneď po príchode dvaja ľudia rozhodujú, aká oprava sa bude vykonávať. Priemerne 17% z nich sa vracia späť do predajní ako neuznaná reklamácia. Priemerne 57% uznaných reklamácií ide na generálnu opravu s dvoma nezávislými opravármi a zvyšok ku trom nezávislým špecialistom. 10% TV po generálnej oprave ide ešte k špecialistom, ostatné idú do predajní. Od špecialistov priemerne 20% TV ide do generálnej opravy, ostatné do predajní. Rozhodovanie aj opravy majú exponenciálny čas obsluhy, a to s priemernou rýchlosťou: rozhodovanie 1 človek 10/hod., 1 opravár 2/hod. a 1 špecialista 5/hod.. Zistite, koľko požiadaviek čaká na začiatku na rozhodnutie. (20 bodov)

A.2. Máme Fritchmanov model kanála s jedným dobrým a dvoma chybovými stavmi daný maticou prechodov:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & & \\ & 0,5 & \\ & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Doplňte ostatné hodnoty, nakreslite model a vypočítajte pravdepodobnosť generovania správneho bloku dĺžky 2. (20 bodov)

A.3. Vytvorte procedúru pre generovanie náhodných čísel s hustotou rozdelenia pravdepodobnosti  $f(x) = 4e^{-4x}$ . Použite ľubovoľný počet generátorov s rovnomerným rozdelením na intervale (0,1). Generátor musí generovať číslo zakaždým, keď generuje číslo náhodný generátor s rovnomerným rozdelením. (10 bodov)

A.4. Hydinársky podnik začína so stavom 1000 sliepok. Z toho 500 je rok starých a 500 práve narodených. Životnosť sliepky je 3 roky. Plánujú nasledovné:

- zachovať rovnaký počet sliepok v nasledujúcich troch rokoch,
- na začiatku 4. roku chcú zvýšiť počet na 1200 a pokračovať s týmto počtom ďalších 5 rokov.
- Koľko musia mať novonarodených sliepok na začiatku 6. roku? Pravdepodobnosť, že sliepka umrie v 1.roku, je 0,2, v 2.roku 0,3 a v 3.roku 0,5. (5 bodov)

A.5. Závod na výrobu súčiastok dodáva určitý druh súčiastok s mesačnou spotrebou u odberateľa 100000 kusov. Všetky veličiny sú úplne známe a deterministické. Ak nie je prípustný deficit: vypočítajte optimálne dodávky, ak náklady na skladovanie jedného kusu sú 10 EUR za mesiac a náklady na dodávku sú 2000 EUR. (5 bodov)

B.1 Majme informačný telefónny systém s Poissonovskými príchodmi s priemernou rýchlosťou 15 hovorov/hod.. Zákazníkov používajúcich systém je veľmi veľa, čo môžeme považovať za nekonečno. Zákazník má možnosť vybrať si nasledovné: po stlačení č.1 sa dostane na linky požiarnikov a po stlačení č.2 sa dostane na linky záchranného systému. Rozhodovací server je jeden, rozhodovanie spĺňa exponenciálne rozdelenie času a trvá priemerne 30 sekúnd. Priemerne 60% volajúcich volí požiarnikov a zvyšok záchranku. Požiarnici majú 2 paralelné obsluhy s priemerným časom obsluhy 6 min. a záchranka má 4 paralelné servery s priemerným časom obsluhy 10 min. Oba časy sú exponenciálne rozdelené. 2% volajúcich obslužených požiarnym serverom sa dožadujú záchranky a 1% obslužených záchranným serverom sa dožadujú požiarnikov. Ostatní obslužení volajúci rušia spojenie. Vypočítajte priemernú dĺžku radu pred požiarnikmi. (20 bodov)

B.2. Máme Fritchmanov model kanála s jedným dobrým a dvoma chybovými stavmi daný maticou prechodov:

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & & \\ & 0,5 & \\ & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Doplňte ostatné hodnoty, nakreslite model a vypočítajte pravdepodobnosť generovania správneho bloku dĺžky 2. (20 bodov)

B.3. Vytvorte procedúru pre generovanie náhodných čísel s hustotou rozdelenia pravdepodobnosti  $f(x) = 3e^{-3x}$ . Použite ľubovoľný počet generátorov s rovnomerným rozdelením na intervale (0,1). Generátor musí generovať číslo zakaždým, keď generuje číslo náhodný generátor s rovnomerným rozdelením. (10 bodov)

B.4. Hydinársky podnik začína so stavom 100 sliepok. Z toho 50 je rok starých a 50 práve narodených. Životnosť sliepky je 3 roky. Plánujú nasledovné:

- zachovať rovnaký počet sliepok v nasledujúcich troch rokoch,
- na začiatku 4. roku chcú zvýšiť počet na 120 a pokračovať s týmto počtom ďalších 5 rokov.
- Koľko musia mať novonarodených sliepok na začiatku 6. roku? Pravdepodobnosť, že sliepka umrie v 1.roku, je 0,2, v 2.roku 0,3 a v 3.roku 0,5. (5 bodov)

B.5. Závod na výrobu súčiastok dodáva určitý druh súčiastok s mesačnou spotrebou u odberateľa 200000 kusov. Všetky veličiny sú úplne známe a deterministické. Ak nie je prípustný deficit: vypočítajte optimálne dodávky, ak náklady na skladovanie jedného kusu sú 10 EUR za mesiac a náklady na dodávku sú 1000 EUR. (5 bodov)

### Vylučovacia metóda I.

Príklad vylučovacia metódy I pre generovanie náhodnej premennej s normálovým rozdelením  $N(0,1)$  na intervale  $x \in (-2,2)$ . Vygenerované sú prvé 4 hodnoty  $X$ .

### Vylučovacia metóda II.

**Príklad 1:** Vytvorte náhodnú premennú s normálovým  $X$  rozdelením  $N(0,1)$  pomocou exponenciálneho rozdelenia použitím vylučovacej metódy II.

Riešenie:  $N(0,1)$  má absolutnu hodnotu funkciu hustoty prevdepodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad 0 < x < \infty$$

$$\text{Zvoľme: } g(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$

Hľadaním maxima podielu týchto dvoch funkcií dostaneme  $c = \sqrt{2e/\pi} \approx 1.32$

Hodnoty náhodnej premennej  $X$  s  $N(0,1)$  vytvoríme v nasledovných krokoch:

- 1) generujme hodnotu  $Z$  s exponenciálnym rozdelením s  $\lambda=1$  a hodnotu  $U$  s rovnomerným rozdelením na  $(0,1)$ .
- 2) Ak  $-\log U \geq (Z-1)^2/2$ , vyber  $|X|$ , t.j.  $|X|=Z$ , ináč opakuj od kroku 1)
- 3) S rovnakou pravdepodobnosťou vyber  $-X$  alebo  $X$ . Opakuj od kroku 1)

Poznámka: ak chceme generovať náhodnú premennú  $Z$  s rozdelením  $N(\mu, \sigma^2)$ , potom je treba výsledok transformovať pomocou  $Z = \mu + \sigma X$

**Príklad 2:** Vytvorte náhodnú premennú s normálovým  $X$  rozdelením:

$$f(x) = 20x(1-x)^3 \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

Predpokladajme  $g(x)$ :

$$g(x)=1 \quad 0 < x < 1 \quad (2)$$

Pre nájdenie konštanty  $c$ :

$$c \geq \frac{f(x)}{g(x)} = 20x(1-x)^3 \quad (3)$$

Pomocou derivácie nájdeme maximum:

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = 20[(1-x)^3 - 3x(1-x)^2] \quad (4)$$

Z rovnice (3) zistíme maximum ( $x=1/4$ ) a dosadíme do (3) na základe čoho získame  $c=135/64$ . Tým pádom platí:

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{256}{27} x(1-x)^3$$

Generujeme čísla nasledujúcim spôsobom:

Krok1: Vygenerujeme čísla  $U_1$  a  $U_2$

Krok2: Ak  $[U_2 \leq 256U_1/27 (1-U_1)^3]$  vygeneruj  $X=U_1$ . Vráť sa ku kroku 1.

# Príklady – Generatory cviko1

Práca s tabuľkou. Aký typ LCG ja, akú periódu a náhodnosť bitov má:

- 1) LCG(16, 5, 1, 1) -perióda, momenty, náhodnosť bitov  
// max. prióda, rovnomerné rozloženie  
// ale striedanie sa párnych a nepárnych čísiel -> nenáhodné
- 2) LCG(16, 5, 0, 1) -perióda, momenty  
// max. perióda = 1/4 z m, korelovaný výstup  $x_{n+1} = x_n + 4$   
// rovnomerné rozdelenie pri 2, 4 podmnožinách, pri viacerých nie ....
- 3) ~~LCG(16, 5, 7, x) - vyskúšať~~  
// Neuschl - plná perióda
- 4) ~~LCG(16, 3, 4, x) - vyskúšať~~  
// Je zlý - 7 častí
- 7) ~~LCG(11, 5, c, x) - pri rôznych c (napr. 0,1,5), aké čísla budú mapované sami do seba ?~~

~~8) Vyratáť vygenerovanie aspon 3 čísiel pre každý generátor uvedený na prednáške~~

~~9) Vyratáť aspon jeden príklad na zmiešavanie generatorov a na shuffling~~

~~10) Vytvorte prvých 5 hodnôt náhodnej premennej s funkciou hustoty pravdepodobnosti  $f(x) = 3x$  ak  $x \in \langle a, b \rangle$ , ináč  $f(x) = 0$ . Vhodne zvolte  $\langle a, b \rangle$ , aby  $F(\infty) = 1$ . Použite nejaký generátor z predchádzajúcich príkladov~~

## Metóda inverznej funkcie

Dôkaz: Distribučná funkcia náhodnej premennej  $Y$  je daná pravdepodobnosťou  $P(Y < y)$ :

$$P(Y < y) = P(F^{-1}(U) < y) = P(U < F(y)) = \int_0^{F(y)} dx = F(y)$$

**Príklad 5.1:** Vytvorte spojitú náhodnú premennú  $X$  s exponenciálnym rozdelením pomocou metódy inverznej funkcie.

**Riešenie:** Funkcia hustoty pravdepodobnosti náhodnej premennej s exponenciálnym rozdelením je daná ako  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ). Tomu odpovedá distribučná funkcia  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ . Inverziou dostávame  $F^{-1}(x) = -\ln(1 - x) / \lambda$ . Teda ak máme náhodnú premennú  $U$  s rovnomerným rozdelením, potom náhodná premenná  $X = -\ln(1 - U) / \lambda$  má exponenciálne rozdelenie s parametrom  $\lambda$ . Keď uvážime, že  $1 - U$  má taktiež rovnomerné rozdelenie, môžeme výsledok zjednodušiť na  $X = -\ln(U) / \lambda$ .

**Príklad 5.2:** Vytvorte spojitú náhodnú premennú  $X$  s Weibullovým rozdelením pomocou metódy inverznej funkcie

**Riešenie:** Funkcia hustoty náhodnej premennej je daná ako:  $f(x) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right]$  pre  $x > 0$

a k nej korešpondujúca distribučná funkcia:  $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}}$ . Inverziou dostávame  $F^{-1}(x) = -\delta \sqrt[\beta]{-\ln(1 - U)}$ . Zjednodušením ako v predchádzajúcom príklade:  $F^{-1}(x) = -\delta \sqrt[\beta]{-\ln(U)}$ .