# KAPITOLA 14

# MODELOVANIE SIGNÁLOV PRE ZISTENIE ÚČINNOSTI TRANSFORMÁCIE PRE KÓDOVANIE

## 14.1 JEDNOROZMERNÉ MODELY

### 14.1.1 Autoregresívny model

Autoregresívny proces rádu $P$ je definovaný diferenčnou rovnicou [98]

$$x(n) = \sum_{k=1}^{P} \rho_k x(n-k) + \eta(n), \tag{14.1}$$

kde $\eta(n)$ predstavuje biely šum.

Prenosová funkcia modelu generujúceho (14.1), keď na vstup privádzame $\eta(n)$, potom je

$$H(z) = \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{P} \rho_k z^{-k}} = \frac{z^P}{z^P - \sum_{k=1}^{P} \rho_k z^{P-k}}. \tag{14.2}$$

Z toho autokorelačná funkcia zdroja typu AR($P$) je

$$R_x(k) = \sum_{j=1}^{P} \rho_j R_{xx}(k-j)\ , k > 0, \tag{14.3}$$

s výkonom signálu $\sigma_x^2 = E\left\{|x(n)|^2\right\} = R_{xx}(0)$.

AR($P$) modely vyššieho rádu $P$ sa používajú najmä pri modelovaní rečových signálov [96]. Pre modelovanie obrazu sa zvykne používať model 1. rádu, ktorý lepšie charakterizuje obrazový signál [96], [88], [95], [70].

### 14.1.2 AR(1) model

AR(1) model je definovaný diferenčnou rovnicou [96], [104], [105]

$$x(n) = \rho x(n-1) + \eta(n), \tag{14.4}$$

kde $\rho$ je prediktor korelačných koeficientov a $\{\eta(n)\}$ je sekvencia bieleho šumu.

Rovnica (14.7) korešponduje s prenosovou funkciou

$$H(z) = \frac{1}{1-\rho z^{-1}} \tag{14.5}$$

a impulzovou odpoveďou

$$h(n) = \rho^n \ , n = 0, 1, \dots . \tag{14.6}$$

Autokorelačná funkcia signálu generovaného AR(1) zdrojom potom je

$$R_x(k) = \sigma_x^2 \rho^{|k|} , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{14.7}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_N^2}{1 - \rho^2} . \tag{14.8}$$

### 14.1.3 MA model

MA model je definovaný diferenčnou rovnicou [96], [98]

$$x(n) = \sum_{k=0}^{L} a_k \eta(n-k) , \tag{14.9}$$

alebo prenosovou funkciou

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L} a_k z^{-k} . \tag{14.10}$$

Autokorelačná funkcia je potom

$$R_x(k) = \sigma_N^2 (a_k * a_{-k}) , \tag{14.11}$$

kde $\sigma_N^2$ je rozptyl šumu $\eta(n)$ a $*$ je operácia konvolúcie.

### 14.1.4 ARMA model

ARMA model je kombináciou MA a AR modelu. Je definovaný diferenčnou rovnicou [98]

$$x(n) = \sum_{k=1}^{P} \rho_k x(n-k) + \sum_{l=0}^{L} a_l \eta(n-l) \tag{14.12}$$

alebo prenosovou funkciou

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{L} a_l z^{-l}}{1 - \sum_{k=1}^{P} \rho_k z^{-k}} . \tag{14.13}$$

Autokorelačná funkcia potom je [98]

$$R_x(k) = \sigma_N^2 h(k) * h(-k) . \tag{14.14}$$

## 14.2 KORELAČNÉ MODELY OBRAZU

Nech každý bod obrazu $x(n_1, n_2)$ je náhodná premenná s tou istou pravdepodobnostnou distribučnou funkciou. Množina $\{x(n_1, n_2)\}$ a štatistická závislosť medzi jej prvkami predstavuje náhodné pole. Predpokladajme, že proces je stacionárny. Pretože biely šum má nulovú strednú hodnotu a dekorelované obrazové body, jeho autokorelačná funkcia potom je [96]

$$R(n_1,n_2)=\sigma^2\delta(n_1,n_2)=\left\langle \begin{matrix} \sigma^2 & , & n_1=n_2=0 \\ 0 & , & inak \end{matrix} \right. . \tag{14.15}$$

Pre tvorbu korelačných modelov obrazu predpokladáme buď separovateľnosť alebo neseparovateľnosť korelačnej funkcie obrazu. Z týchto predpokladov je možné tvoriť teda dva druhy korelačných modelov.

### 14.2.1 2D separovateľný korelačný model AR(1)

Generatívny model 2D AR(1) môžeme opísať diferenčnou rovnicou

$$x(n_1,n_2)=\rho_1 x(n_1-1,n_2)+\rho_2 x(n_1,n_2-1)-\rho_1\rho_2 x(n_1-1,n_2-1)+\eta(n_1,n_2), \tag{14.16}$$

kde $\eta(n_1,n_2)$ je dvojrozmerný biely šum s nulovou strednou hodnotou a $\rho_i$ sú vertikálny a horizontálny prediktor (korelačný koeficient).

Keďže sme predpokladali separovateľnosť korelácie na riadkovú a stĺpcovú, aj korelačná funkcia potom má separovateľný tvar a je rovná [96]

$$R_x(n_1,n_2)=\sigma_x^2\rho_1^{|n_1|}\rho_2^{|n_2|}, \qquad n_1,n_2=0,\pm1,\pm2,\dots, \tag{14.17}$$

kde

$$\sigma_x^2=\frac{1}{\left(1-\rho_1^2\right)\left(1-\rho_2^2\right)}. \tag{14.18}$$

### 14.2.2 Zovšeobecnený izotropický model

Neseparovateľný 2D autokorelačný model lepšie opisuje reálne obrazové dáta. Jeden z najpoužívateľnejších je [99] izotropický model, ktorého autokorelačná funkcia sa definuje

$$R_x(n_1,n_2)=\exp\left[-\sqrt{\left(\alpha^2 n_1^2+\beta^2 n_2^2\right)}\right], \tag{14.19}$$

kde

$$\alpha=-\ln\rho_1 \qquad \text{a} \qquad \beta=-\ln\rho_2 .$$

### 14.2.3 Zovšeobecnený korelačný model

Tento korelačný model je kombináciou separovateľného a zovšeobecneného izotropického modelu. Definuje sa autokorelačnou funkciou [97]

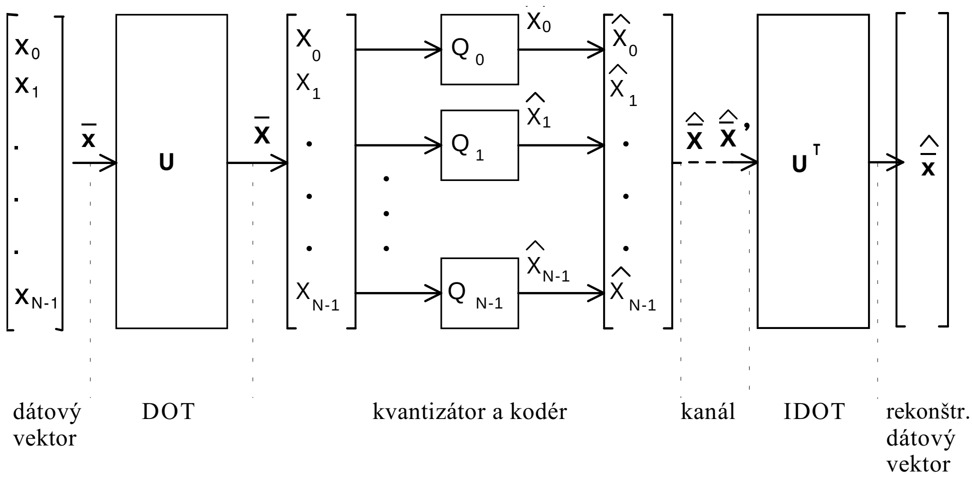
$$R_x(n_1,n_2)=\exp\left\{-\left[(\alpha n_1^{r_1})^h+(\beta n_2^{r_2})^h\right]^{1/h}\right\}. \tag{14.20}$$

Clarke [97] ukázal, že pre väčšinu reálnych obrazov je tento model zo známych modelov optimálny s použitými nasledovnými koeficientami v rovnici (14.20) $r_1=1,137$, $r_2=1,09$, $h=\sqrt{2}$, $\alpha=0,025$, $\beta=0,019$.

## 14.3 APLIKÁCIA V TRANSFORMAČNOM KÓDOVANÍ

### 14.3.1 Porovnávacie charakteristiky

Uvažujme nasledujúcu schému transformačného kodéra [96].




**Obr. 14.5** Bloková schéma transformačného kodéra a dekodéra

Pre porovnanie účinnosti kodérov (či už na báze PCM, DPCM, SBC alebo TC) je potrebné zaviesť porovnávacie kritérium. Malo by byť vyjadrením chyby rekonštruovaného signálu od originálu pri určitom stupni kompresie vyjadrenom napríklad bitovou náročnosťou (počet bitov potrebných na prenesenie alebo uchovanie jednej vzorky signálu).

Ak uvažujeme, že PCM kodér je vlastne transformačný kodér s jednotkovou transformačnou maticou, môžeme zaviesť jednotné vyjadrenie chybového vektora po rekonštrukcii

$$\Delta\,\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} - \hat{\bar{\mathbf{x}}} \tag{14.21}$$

a z neho odvodenej strednej kvadratickej rekonštrukčnej chyby [96]

$$e_{MSE} = \sigma_e^2 = \frac{1}{N}\cdot E\left\{\Delta\,\bar{\mathbf{x}}^T \cdot \Delta\,\bar{\mathbf{x}}\right\} = \frac{1}{N}\cdot E\left\{\Delta\,\bar{\mathbf{X}}^T \cdot \Delta\,\bar{\mathbf{X}}\right\} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\sigma_{qk}^2\,, \tag{14.22}$$

kde $\sigma_{qk}^2$ je rozptyl kvantizačnej chyby $k$-teho spektrálneho koeficientu definovaný

$$\sigma_{qk}^2 = E\left\{\left|\Delta\,\bar{\mathbf{X}}\right|^2\right\}. \tag{14.23}$$

Potom môžeme definovať veličinu *zisk* pre transformačný kodér

$$G_{TC} = \frac{\sigma_{e(PCM)}^2}{\sigma_{e(TC)}^2} \tag{14.24}$$

a podobne pre subpásmový kodér (SBC)

$$G_{SBC} = \frac{\sigma_{e(PCM)}^2}{\sigma_{e(SBC)}^2}\;. \tag{14.25}$$

Uvažujme, že počet bitov potrebných na zakódovanie $k$-teho spektrálneho koeficientu je $B_k$ a zodpovedá to kvantizátoru $Q_k$ v obr. 2.1. Chceme minimalizovať hodnotu $\sigma_{qk}^2$ pre príslušný počet bitov $B_k$ a dostať tak funkciu rozdelenia pravdepodobnosti pre $X_k$. Kvantizátor s minimálnou strednou kvadratickou odchýlkou bol odvodený už Lloydom (1957) a Maxom(1960) [70]. Touto teóriou kvantizácie sa dá minimalizovať hodnota $\sigma_{qk}^2$.

Výsledná stredná kvadratická odchýlka závisí od rozptylu $k$-teho spektrálneho koeficientu $\sigma_k^2$, pravdepodobnostnej distribučnej funkcie kvantizátora a počtu bitov $B_k$ určených pre $k$-ty spektrálny koeficient. Dá sa odvodiť [96] vzťah medzi rozptylom chyby $k$-teho spektrálneho koeficientu a charakteristikou kvantizátora

$$\sigma_{qk}^2 = f(B_k)\sigma_k^2 , \tag{14.26}$$

kde $f(B_k)$ je funkcia kvantizátora pre lineárny vstup. Napr. typickou funkciou je [96]

$$f(B_k) = \gamma_k 2^{-2b_k}, \tag{14.27}$$

kde $\gamma_k$ závisí od pravdepodobnostnej distribučnej funkcie pre $X_k$ a od príslušného kvantizátora.

Stredná kvadratická rekonštrukčná chyba potom je

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sigma_{qk}^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k 2^{-2B_k}\sigma_k^2 . \tag{14.28}$$

Definujme celkový počet bitov potrebných pre kvantovanie všetkých spektrálnych koeficientov ako $NB$

$$NB = \sum_{k=0}^{N-1} B_k , \tag{14.29}$$

kde $B$ je stredný počet bitov na jeden koeficient.

Minimalizujme (14.22) a uvažujme $\gamma$ rovnaké pre všetky spektrálne koeficienty. Potom

$$\frac{\partial}{\partial b_k}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\gamma\sigma_k^2 2^{-2B_k} - \lambda\left(b - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} B_k\right)\right\} = 0 , \tag{14.30}$$

z čoho dostaneme rovnicu

$$B_k = B + \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma_k^2}{\left(\prod_{j=0}^{N-1}\sigma_j^2\right)^{\frac{1}{N}}} . \tag{14.31}$$

Túto rovnicu dosadíme do vzťahu pre kvantizačnú chybu a dostaneme

$$\sigma_{qk}^2 = \gamma 2^{-2B}\left(\prod_{j=1}^{N-1}\sigma_j^2\right)^{\frac{1}{N}} = konst. \tag{14.32}$$

Výsledkom je pdf a $B_k$ optimalizovanej kvantizačnej funkcie pre príslušnú ortogonálnu transformáciu. Pre PCM (transformačnú maticu $\mathbf{I}$) sa vzťah (14.32) redukuje na

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sigma_{qk}^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\gamma 2^{-2B}\sigma^2 = \gamma 2^{-2B}\sigma^2 . \tag{14.33}$$

To znamená, že $\gamma$ pre transformačné kódovanie je rovnaké ako pre PCM.

Ak platí

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j^2 = N\sigma^2 \quad , \tag{14.34}$$

môžeme definovať maximalizovaný zisk transformačného kodéra ako pomer aritmetickej a geometrickej strednej hodnoty rozptylov spektrálnych koeficientov [96] (14.35).

$$\max\left[{}^{N}G_{TC}\right] = \frac{\sigma^2_{e(PCM)}}{\min\left[\sigma^2_{e(TC)}\right]} = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\sigma_j^2}{\left(\prod\limits_{j=0}^{N-1}\sigma_j^2\right)^{\frac{1}{N}}} . \tag{14.35}$$

V ďalšom bude používaný vzťah (14.35) v tvare [91]

$$G_{TC} = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\sigma_j^2}{\left(\prod\limits_{j=1}^{N}\sigma_j^2\right)^{\frac{1}{N}}} , \tag{14.36}$$

kde $\sigma_j^2$ je rozptyl $j$-teho spektrálneho koeficientu alebo $j$-ty diagonálny prvok súčinu

$$\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \tag{14.37}$$

kde $\mathbf{R}$ je autokorelačná matica vektora $\bar{\mathbf{x}}$ .

### 14.3.2 Rozptyl transformačných koeficientov

#### 14.3.2.1 1D prípad

Podľa obr. 14.1 korelačná funkcia i-teho výstupu sa dá napísať [96]

$$\begin{aligned} R_{X_i}(n) &= [U^*(i, N-1-n) * U(i,n)] * R(n) \\ &= {}^{i}\rho(n) * R(n) = \sum_k {}^{i}\rho(j) R(n-k), \end{aligned} \tag{14.38}$$

kde

$${}^{i}\rho(n) = U^*(i, N-1-n) * U(i,n) \tag{14.39}$$

je deterministická autokorelačná funkcia $i$-tej bázovej funkcie $U(i,n)$ a $R(n)$ je štatistická autokorelačná funkcia vstupného signálu $x(n)$.

Pre $n = 0$ dostaneme vzťah pre rozptyl i-teho spektrálneho koeficientu

$$\sigma^2(i) = R_{X_i}(0) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} {}^{i}\rho(k) R(k), \tag{14.40}$$

čo v maticovom zápise znamená pre vektor rozptylu vzťah

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(0) \\ \sigma^2(1) \\ \vdots \\ \sigma^2(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{0}\rho(0) & 2\,{}^{0}\rho(1) & \dots & 2\,{}^{0}\rho(N-1) \\ {}^{1}\rho(0) & 2\,{}^{1}\rho(1) & \dots & 2\,{}^{1}\rho(N-1) \\ \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ {}^{N-1}\rho(0) & 2\,{}^{N-1}\rho(1) & \dots & 2\,{}^{N-1}\rho(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(0) \\ R(1) \\ \vdots \\ R(N-1) \end{pmatrix}$$

alebo

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbf{V}_{RU} \cdot \bar{\mathbf{R}}. \tag{14.41}$$

$\mathbf{V}_{RU}$ budeme volať indikačná matica autokorelácií bázových funkcií. Pre DCT II má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,750 & 1,500 & 1,250 & 1,000 & 0,750 & 0,500 & 0,250 \\ 1 & 1,367 & 0,599 & -0,125 & -0,653 & -0,890 & -0,816 & -0,480 \\ 1 & 0,987 & -0,353 & -1,133 & -1,000 & -0,280 & 0,353 & 0,426 \\ 1 & 0,419 & -1,252 & -1,051 & 0,270 & 0,769 & 0,162 & -0,345 \\ 1 & -0,250 & -1,500 & 0,250 & 1,000 & -0,250 & -0,500 & 0,250 \\ 1 & -0,919 & -0,869 & 1,258 & -0,270 & -0,589 & 0,544 & -0,154 \\ 1 & -1,487 & -1,487 & 0,353 & 0,633 & -1,000 & 0,780 & 0,073 \\ 1 & -1,867 & 1,522 & -1,081 & 0,653 & -0,316 & 0,108 & -0,019 \end{pmatrix}.$$

#### 14.3.2.2 2D prípad

Pre dvojrozmerný prípad môžeme rovnicu (14.41) prepísať pre *separovateľnú* autokorelačnú funkciu nasledovne [96]

$$\bar{\sigma}_1^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(0) \\ \sigma_1^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_1^2(N_1-1) \end{pmatrix} = \mathbf{V}_{RU_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1^2 \\ \vdots \\ \rho_1^{N_1-1} \end{pmatrix} = \mathbf{V}_{RU_1} \cdot \bar{\rho}_1 \tag{14.42}$$

a

$$\bar{\sigma}_2^2 = \mathbf{V}_{RU_2} \cdot \bar{\rho}_2 \, . \tag{14.43}$$

Potom pre maticu rozptylu spektrálnych koeficientov platí rovnica

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = [\sigma^2(i,j)] = \sigma_x^2 \, \bar{\sigma}_1^2 \left(\bar{\sigma}_2^2\right)^T = \sigma_x^2 \mathbf{V}_{RU_1} \cdot \left(\bar{\rho}_1 \cdot \bar{\rho}_2^T\right) \cdot \mathbf{V}_{RU_2}^T . \tag{14.44}$$

Pre *neseparovateľnú* 2D autokorelačnú funkciu $R_x(n_1, n_2)$ pre rozptyl spektrálnych koeficientov dostaneme [96]

$$\sigma^2(i,j) = \sum_r \sum_l v_{RU}(i,l) R_x(l,r) v_{RU}(j,r) . \tag{14.45}$$

Matica rozptylov spektrálnych koeficientov potom je

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{V}_{RU} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}_{RU} , \tag{14.46}$$

kde $\mathbf{R} = [R_x(n_1, n_2)]$ , $n_1 = 0, 1, \dots N_1 - 1$ , $n_2 = 0, 1, \dots N_2 - 1$ .