

KAPITOLA 2

DISKRÉTNE ORTOGONÁLNE TRANSFORMÁCIE

2.1 JEDNOROZMERNÁ DISKRÉTNÁ ORTOGONÁLNA TRANSFORMÁCIA

Uvažujme aproximáciu diskretných signálov $x(n \cdot T)$, kde T je diskretizačná perióda s počtom vzoriek N , podľa niektorej diskkrétnej ortogonálnej bázy funkcií $V(n \cdot T, k)$, kde $k = 0, 1, \dots, N-1$. Potom [18]

$$x(n \cdot T) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot V(n \cdot T, k),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$
(2.1)

kde odnoty $X(k)$, pre $k = 0, 1, \dots, N-1$ môžeme považovať za ortogonálnu transformáciu signálu $x(n \cdot T)$. Skrátené budeme písať

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot U(n, k),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$
(2.2)

Keď $U(n, k)$ sú prvky matice \mathbf{U} a $V(n, k)$ sú prvky matice \mathbf{V} , potom pre vektory

$$\bar{\mathbf{X}}^T = (X(0), X(1), \dots, X(k), \dots, X(N-1))$$

a

$$\bar{\mathbf{x}}^T = (x(0), x(1), \dots, x(n), \dots, x(N-1)),$$

platí

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{x}},$$
(2.3)

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{*T} \cdot \bar{\mathbf{X}},$$
(2.4)

kde $\mathbf{U}^{*T} = \mathbf{V}$ je transponovaná konjugovaná matica \mathbf{U} opisujúca bázu ortogonálnych funkcií príslušnej transformácie.

2.2 DVOJROZMERNÁ DISKRÉTNÁ ORTOGONÁLNA TRANSFORMÁCIA

Dvojrozmerná diskretná ortogonálna transformácia dvojrozmernej postupnosti $x(n_1, n_2)$ je definovaná [36]:

$$X(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot U(n_1, n_2, k_1, k_2),$$

$$k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Spätná transformácia potom je

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) \cdot V(n_1, n_2, k_1, k_2),$$

$$n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Pre ortonormálnu bázu platí

$$\begin{aligned} \sum_{k_1} \sum_{k_2} U(n_1, n_2, k_1, k_2) \cdot U^*(j_1, j_2, k_1, k_2) &= \delta(n_1 - j_1, n_2 - j_2), \\ \sum_{k_1} \sum_{k_2} V(n_1, n_2, k_1, k_2) \cdot V^*(j_1, j_2, k_1, k_2) &= \delta(n_1 - j_1, n_2 - j_2), \\ \sum_{n_1} \sum_{n_2} U(n_1, n_2, k_1, k_2) \cdot U^*(n_1, n_2, j_1, j_2) &= \delta(k_1 - j_1, k_2 - j_2), \\ \sum_{n_1} \sum_{n_2} V(n_1, n_2, k_1, k_2) \cdot V^*(n_1, n_2, j_1, j_2) &= \delta(k_1 - j_1, k_2 - j_2). \end{aligned}$$

Ak je funkcia $U(n_1, n_2, k_1, k_2)$ separovateľná, tak ju môžeme vyjadriť ako súčin

$$U(n_1, n_2, k_1, k_2) = U(n_1, k_1) \cdot U(n_2, k_2),$$

potom [36] môžeme vzťah (2.6) rozdeliť osobitne na transformáciu po stĺpcoch a na transformáciu po riadkoch. Ďalej

$$X(n_1, k_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot U(n_2, k_2),$$

$$n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1,$$

$$X(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} X(n_1, k_2) \cdot U(n_1, k_1),$$

$$k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Rovnako to platí aj pre spätnú transformáciu a separovanie jej transformačného jadra $V(n_1, n_2, k_1, k_2)$.

Ak \mathbf{x} je dvojrozmerná diskretná funkcia v tvare matice, potom pre dvojrozmernú diskretnú ortogonálnu transformáciu platí

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \cdot \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{U}_2^T, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_1^{*T} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{U}_2^*, \quad (2.11)$$

kde \mathbf{U}_1 a \mathbf{U}_2 sú transformačné matice pre stĺpce a riadky a \mathbf{U}_1^{*T} a \mathbf{U}_2^{*T} sú ich transponované konjugované tvary, \mathbf{U}_2^T je transponovaná matica \mathbf{U}_2 .

Túto definíciu môžeme prepísať do tvaru jednorozmernej diskretnéj ortogonálnej transformácie. Nech $\bar{\mathbf{x}}$ je vektor, zložený z prvkov matice \mathbf{x} a transformačná matica \mathbf{U} je určená maticami \mathbf{U}_1 a \mathbf{U}_2 Kroneckerovým produktom

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{U}_2. \quad (2.12)$$

Potom pre dvojrozmernú diskretnú ortogonálnu transformáciu matice \mathbf{x} platí:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.13)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^{*T} \cdot \bar{\mathbf{X}}. \quad (2.14)$$

V ďalšom sú len v krátkosti spomenuté najpoužívanejšie diskretné ortogonálne transformácie v jednorozmernej podobe. Všetky (až na Hartleyho transformáciu) z nich majú v dvojrozmernéj podobe separovateľné transformačné jadro, preto ich dvojrozmerný výpočet je možné robiť v dvoch krokoch: v prvom kroku jednorozmerné transformácie stĺpcových vektorov obrazovej matice a v druhom kroku ako jednorozmerné transformácie riadkových vektorov výsledku prvej transformácie.

Nasledujúce dve transformácie sú ideálne diskretné ortogonálne transformácie z hľadiska schopnosti dekorelovať štatistické závislosti vo vnútri nimi spracovávaných jednorozmerných alebo viacrozmerných signálových blokov. Prvá z nich využíva pre tvorbu svojej diskretnéj ortogonálnej bázy štatistický popis spracovávaných blokov signálových vzoriek. Druhá vychádza z deterministického opisu, to znamená priamo z jedného spracovávaného bloku a jeho číselného vyjadrenia.

2.3 HOTELLINGOVA TRANSFORMÁCIA

Je to transformácia diskretného signálu na postupnosť dekorelovaných sekvenčných koeficientov [39]. Často sa v literatúre nazýva ako Karhunenova - Loèveho transformácia, čo je jej tvar pre spojité signály [19], alebo diskretná Karhunenova - Loèveho transformácia, čo je vlastne návrat zo spojitých KLT k Hotellingovej transformácii [39], [36].

♦ **Veta 2.1** Ak \mathbf{A} je reálna symetrická matica, existuje taká lineárna transformácia s transformačnou maticou \mathbf{U} , že platí

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{D}, \quad (2.15)$$

kde \mathbf{D} je diagonálna matica obsahujúca na hlavnej diagonále vlastné čísla matice \mathbf{A} a \mathbf{U}^T je transponovaná transformačná matica \mathbf{U} [39].

Usporiadajme prvky dvojrozmerného poľa $x(n_1, n_2)$ s rozmerom $N_1 \times N_2$ do vektora $\bar{\mathbf{x}}_i$ s dĺžkou $L = N_1 \times N_2$, a to takto [132]:

$$\bar{\mathbf{x}}_i = (x_i(0, 0), x_i(0, 1), \dots, x_i(0, N_2 - 1), x_i(1, 0), \dots, x_i(N_1 - 1, N_2 - 1)) .$$

Autokovariančná matica náhodného vektora $\bar{\mathbf{x}}$ je vo všeobecnosti definovaná ako

$$\mathbf{C}_x = E\{(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x)^T\} , \quad (2.16)$$

kde

$$\bar{\mathbf{m}}_x = E\{\bar{\mathbf{x}}\} \quad (2.17)$$

je vektor strednej hodnoty, E znamená strednú hodnotu.

Predchádzajúce vzťahy môžeme aproximovať pomocou odhadov vypočítaných zo vzoriek obrazov, resp. im zodpovedajúcich vektorov

$$\bar{\mathbf{m}}_x \cong \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \bar{\mathbf{x}}_i , \quad (2.18)$$

$$\mathbf{C}_x \cong \frac{1}{P} \cdot \left(\sum_{i=1}^P \bar{\mathbf{x}}_i \cdot \bar{\mathbf{x}}_i^T \right) - \bar{\mathbf{m}}_x \cdot \bar{\mathbf{m}}_x^T , \quad (2.19)$$

kde P je počet vektorov $\bar{\mathbf{x}}_i$.

Nech $\bar{\mathbf{u}}_i$ sú vlastné vektory a λ_i sú im zodpovedajúce vlastné čísla matice \mathbf{C}_x , $i = 1, 2, \dots, L$. Usporiadajme vlastné čísla λ_i podľa veľkosti $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L$. Z vlastných vektorov matice \mathbf{C}_x zostrojme $L \times L$ transformačnú maticu \mathbf{U} tak, že prvok matice u_{ij} je j -ty prvok i -teho vlastného vektora. Nový transformovaný vektor $\bar{\mathbf{X}}$ potom dostaneme ako

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{U} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x) . \quad (2.20)$$

Kovariančná matica vektora $\bar{\mathbf{X}}$ je

$$\mathbf{C}_X = E\{(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{m}}_X) \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{m}}_X)^T\} , \quad (2.21)$$

kde $\bar{\mathbf{m}}_X$ sa rovná nulovému vektoru $\bar{\mathbf{0}}$, pretože platí

$$\bar{\mathbf{m}}_X = E\{\bar{\mathbf{X}}\} = E\{\mathbf{U} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x)\} = \mathbf{U} \cdot E\{\bar{\mathbf{x}}\} - \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{m}}_x = \bar{\mathbf{0}} . \quad (2.22)$$

Substitúciou (2.20) a (2.22) do (2.21) získame vyjadrenie kovariančnej matice \mathbf{C}_X pomocou kovariančnej matice \mathbf{C}_x

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_X &= E\{(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{m}}_X) \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{m}}_X)^T\} = E\{\mathbf{U}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x)^T \cdot \mathbf{U}^T\} \\ &= \mathbf{U} \cdot E\{(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x) \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{m}}_x)^T\} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{U}^T . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Podľa vety 2.1 platí, že kovariančná matica \mathbf{C}_X je diagonálna matica, ktorá na hlavnej diagonále obsahuje vlastné čísla matice \mathbf{C}_x a ostatné jej prvky sú nulové. To znamená, že prvky vektora $\bar{\mathbf{X}}$ sú de Korelované. Vlastné číslo λ_i sa rovná variancii i -teho prvku vektora $\bar{\mathbf{X}}$. Pretože \mathbf{C}_x je reálna symetrická matica, je možné nájsť jej ortonormálne vlastné vektory. Platí $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ [39] a vektor $\bar{\mathbf{x}}$ sa dá rekonštruovať z vektora $\bar{\mathbf{X}}$ pomocou vzťahu (2.20) [36]

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{U}^T \cdot \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{m}}_x . \quad (2.24)$$

Ak obmedzíme aproximáciu na K vlastných vektorov matice \mathbf{C}_x , potom matica \mathbf{U} bude korešpondovať s týmito vektormi a vektory $\bar{\mathbf{X}}$ budú mať K zložiek. Nech

$$\bar{\mathbf{x}}_K = \mathbf{U}_K^T \cdot \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{m}}_x \quad (2.25)$$

reprezentuje vektor, ktorý je aproximovaný transformačnou maticou \mathbf{U}_K vytvorenou z prvých K vlastných vektorov matice \mathbf{C}_x .

Potom stredná kvadratická odchýlka \bar{x}_K od \bar{x} je

$$e_{MSE} = \sum_{j=1}^{N_1 N_2} \lambda_j - \sum_{j=1}^K \lambda_j = \sum_{j=K+1}^{N_1 N_2} \lambda_j. \quad (2.26)$$

Z (2.26) vyplýva, že nulová stredná kvadratická odchýlka je v prípade, že $K = L$. To znamená, že aproximácia prebieha pomocou všetkých vlastných vektorov kovariančnej matice. Pretože vlastné čísla matice \mathbf{C}_x monotónne klesajú, chyba je minimalizovaná. Z toho vyplýva, že Hotellingova transformácia je optimálnou z hľadiska minimálnej strednej kvadratickej odchýlky [19], [20], [36], [39].

Ďalej uvádzané diskkrétne ortogonálne transformácie sú približením ku Hotellingovej (diskrétnej Karhunenovej - Loèveho) transformácii, a preto aj ich produkt je principiálne rovnaký ako produkt Hotellingovej transformácie. Transformáciám s produktom typu SVD [20] transformácie nie je venovaná pozornosť.

Hotellingova diskrétna ortogonálna transformácia má jednu významnú vlastnosť - jej diskrétna ortogonálna báza sa vytvára adaptívne podľa štatistických, či numerických vlastností jej predkladaných vektorov alebo matic. Vo väčšine prípadov sa však tieto vlastnosti len blížia k vlastnostiam, ktoré spôsobujú tvorbu takej množiny báзовých funkcií, aby k príslušnej transformačnej matici mohol byť vypracovaný rýchly algoritmus výpočtu frekvenčného alebo sekvenčného spektra. V praxi je preto táto transformácia používaná len pre kódovanie malých dávok, ktorých kódovanie pomalou cestou (násobením matic), je len o málo pomalšie, než pri použití rýchlych algoritmov (napr. do veľkosti $N = 4$ [42]).

2.3.1 SVD transformácia

SVD transformácia je dvojrozmerná unitárna transformácia, ktorá spôsobuje dekompozíciu obrazovej matice (rozklad na vlastné čísla). Je definovaná [20],[70]

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{U}_2^T, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_1^{*T} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{U}_2. \quad (2.28)$$

Diagonalizácia riadkovej transformácie je

$$\mathbf{U}_2 \cdot [\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}] \cdot \mathbf{U}_2^T = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & . & & & & \mathbf{0} \\ & & \lambda_M & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{matrix} M \\ \\ \\ N_2 - M \end{matrix}$$

(násobením matic), je len o málo pomalšie, ako pri použití rýchlych algoritmov (napr. do veľkosti $N = 4[42]$).

2.4 GONIOMETRICKÉ TRANSFORMÁCIE

2.4.1 Diskrétna Fourierova transformácia (DFT)

DFT číselnej postupnosti $x(n)$ sa definuje vzťahom [133], [36], [134], [64]

$$X_F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{n \cdot k},$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$
(2.32)

kde $W = \exp\left(-j \cdot \frac{2\pi}{N}\right)$ je systém komplexných bázových funkcií ($j = \sqrt{-1}$).

Inverzná DFT potom je

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_F(k) \cdot W^{-n \cdot k},$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$
(2.33)

Na [obr. 2.1 a,b](#) je znázornený systém bázových funkcií DFT pre dávku $N = 8$.

2.4.2 Diskrétna Hartleyho transformácia (DHYT)

DHYT sa definuje vzťahom [21]

$$X_{HY}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$
(2.34)

kde $\text{cas}(\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$.

Na [obr. 2.1 d](#) je znázornený systém bázových funkcií DHYT pre dávku $N = 8$.

Inverzná DHYT je daná vzťahom

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_{HY}(k) \cdot \text{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$
(2.35)

DHYT sa dá ľahko získať z DFT a naopak, a to [21], [20], [36], [39]

$$X_{HY}(k) = \text{Re}\{DFT[x(n)]\} - \text{Im}\{DFT[x(n)]\},$$
(2.36)

$$\operatorname{Re}\{DFT[x(n)]\} = \frac{1}{2} \cdot \{DHYT[x(N-n)] + DHYT[x(n)]\} ,$$

$$\operatorname{Im}\{DFT[x(n)]\} = \frac{1}{2} \cdot \{DHYT[x(N-n)] - DHYT[x(n)]\} ,$$

Poznámka

Treba si uvedomiť, že na rozdiel od všetkých v práci uvádzaných diskretných ortogonálnych transformácií dvojrozmerná DHYT nemá separovateľné jadro. Transformácia so separovateľným dvojrozmerným Hartleyho transformačným jadrom sa v literatúre nazýva diskretná cas-cas transformácia.

2.4.3 Diskrétna kosínusová transformácia (DCT)

Podobne, ako predchádzajúce transformácie, ju zavedieme podľa [21].

$$X_{CII}(k) = \frac{2c_k}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos \left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \right] , \quad (2.37)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1 .$$

Inverzná transformácia je definovaná

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k X_{CII}(k) \cdot \cos \left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \right] , \quad (2.38)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 ,$$

kde $c_k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pre $k = 0$ a $c_k = 1$ pre $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Na obr. 2.1 c je znázornený systém bazových funkcií DCT pre dávku $N = 8$. Pre úplnosť sú uvedené aj ostatné bázy DCT a na obr. 2.2 a,b aj bazové funkcie DCT I a DCT IV, ktoré sa v aplikáciách vyskytujú najčastejšie [135]:

$$U_{CI}(n, k) = \sqrt{2} \left[c_k c_n \cdot \cos \left(\frac{kn\pi}{N} \right) \right] , \quad (2.39)$$

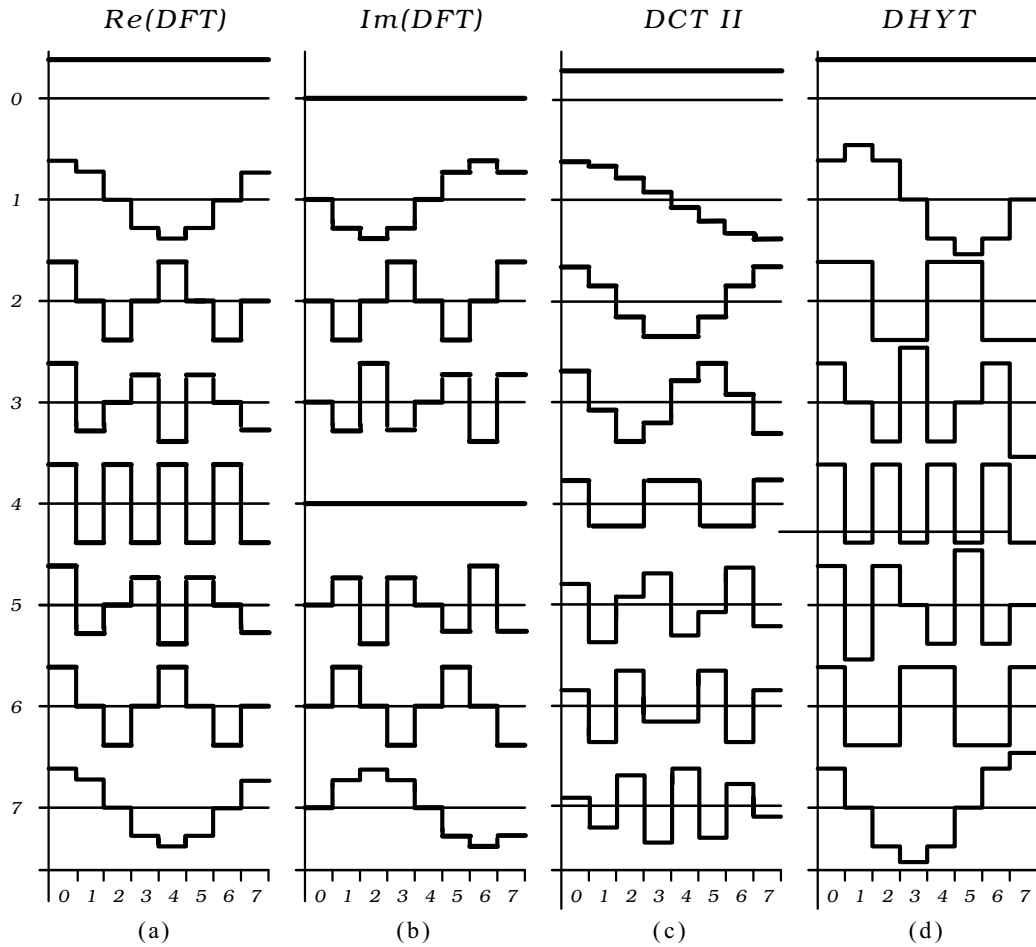
$$k, n = 0, 1, \dots, N ,$$

$$U_{CIII}(n, k) = \sqrt{2} \left\{ c_n \cdot \cos \left[\frac{n \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi}{N} \right] \right\} , \quad (2.40)$$

$$U_{CIV}(n, k) = \sqrt{2} \left\{ \cos \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi}{N} \right] \right\} , \quad (2.41)$$

$$k, n = 0, 1, \dots, N-1 ,$$

kde $c_i = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pre $i = 0$ alebo N a $c_i = 1$ inak.



Obr. 2.1 Bázové funkcie diskretných ortogonálnych transformácií: DFT (a,b), DCT II (c),DHT (d)

2.4.4 Diskrétna sínusová transformácia (DST)

DST postupnosti $x(n)$ sa definuje vzťahom [96]

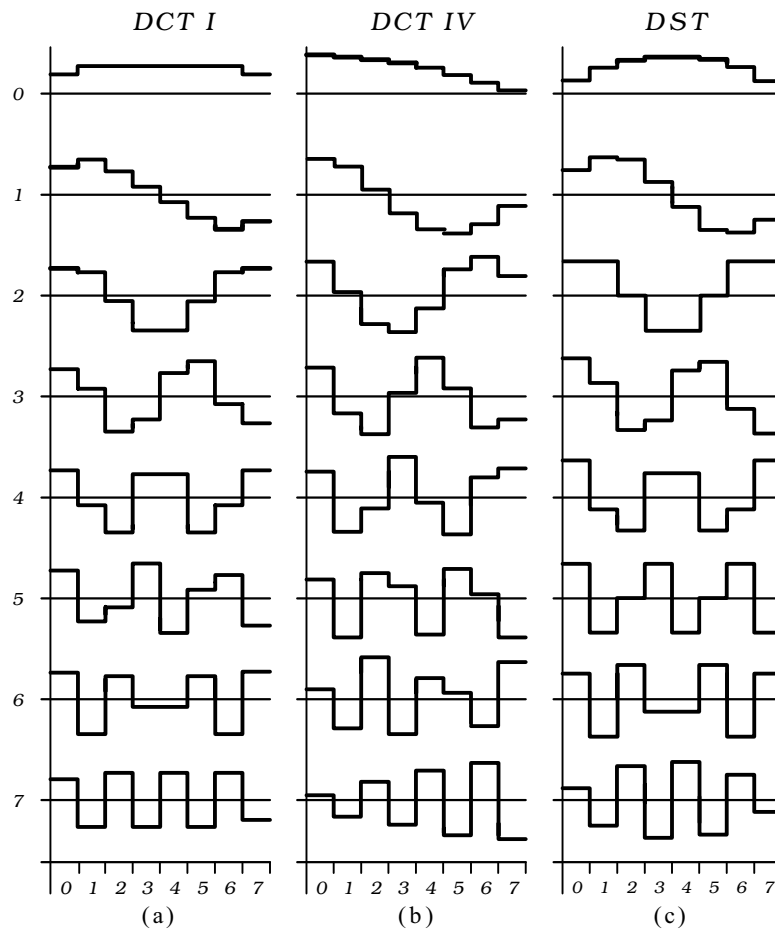
$$X_{DST}(k) = \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \sin \left[\frac{(n+1)(k+1)\pi}{(N+1)} \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$
(2.42)

Inverzná transformácia je potom definovaná

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_{DST}(k) \cdot \sin \left[\frac{(n+1)(k+1)\pi}{(N+1)} \right],$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$
(2.43)



Obr. 2.2 Bázové funkcie diskretných ortogonálnych transformácií: DCT I (a), DCT IV (b), DST (c)

2.5 TRANSFORMÁCIE S PRAVOUHLÝMI FUNKCIAMI

2.5.1 Walshove - Hadamardove transformácie (WHT, WPT, WST)

Podľa [133] definujeme *Walshovu - Hadamardovu transformáciu v Hadamardovom poradí* bázových funkcií pomocou Walshových funkcií v Hadamardovom usporiadaní alebo podľa Hadamardovej matice [20], [39], [36]. Takto: pre $N = 2^r$, kde $r = 1, 2, 3, \dots$ systém bázových funkcií Walshovej-Hadamardovej diskretné ortogonálnej transformácie je opísaný funkciou

$$U_H(n, k) = (-1)^{\sum_{j=1}^{r-1} v_j \cdot w_j}, \quad (2.44)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

pre $k = \sum_{m=0}^{r-1} w_m 2^m$ t.j. $(k)_{bin} = (w_{r-1} w_{r-2} \dots w_1 w_0)$,

$$n = \sum_{m=0}^{r-1} v_m 2^m \text{ t.j. } (n)_{bin} = (v_{r-1} v_{r-2} \dots v_1 v_0),$$

kde $w_m, v_m \in \{0, 1\}$, sú m -té bity v binárnej reprezentácii k, n .

(Pre jednoduchosť označme tieto binárno-dekadické operácie $v_i = b_i(n)$ a $w_i = b_i(k)$ [21].) Bude to ďalej výhodné, pretože takto označená operácia bude závislá priamo od parametra v zátvorke. Potom WHT postupnosti $\{x(n)\}$ je

$$X_{WH}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot U_H(n, k), \quad (2.45)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Spätná transformácia je

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_{WH}(k) \cdot U_H(n, k), \quad (2.46)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Báza Walshových funkcií v Hadamardovom poradí (alebo tiež neusporiadané Hadamardove transformačné jadro) má bázu pre dávku $N = 8$ znázornenú na [obr. 2.3 a](#).

Táto báza sa dá vytvoriť jednoducho rekurentne. Pre $N = 2$ platí

$$\mathbf{U}(2^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

pre iné N potom platí rekurentný vzťah

$$\mathbf{U}(2^r) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(2^{r-1}) & \mathbf{U}(2^{r-1}) \\ \mathbf{U}(2^{r-1}) & -\mathbf{U}(2^{r-1}) \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

napr.

$$\mathbf{U}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

čo je totožné so zápisom Kroneckerovho produktu

$$\mathbf{U}(2^r) = \mathbf{U}(2) \otimes \mathbf{U}(2^{r-1}). \quad (2.49)$$

Ďalej je uvedená Walshova - Hadamardova transformácia v Paleyho poradí Walshových funkcií, čo je v praxi Walshova-Hadamardova transformácia v Hadamardovom poradí báзовých funkcií, po vykonaní ktorej sa výsledok preusporiada tzv. dvojkovou inverziou (alebo tiež často nazývanou ako inverzia bitov). Aj keď tento postup sa môže zdať prevrátený, lebo prirodzenejšie je zaviesť Walshovu transformáciu v Paleyho poradí báзовých funkcií, pre výpočet je tento postup tiež vhodný. Implementácia rýchleho algoritmu WHT je veľmi jednoduchá. Klasický postup získavania Walshovej

transformácie pomocou rýchleho algoritmu diskkrétnej Fourierovej transformácie má rovnaký počet operácií ako algoritmus WHT a podobnú štruktúru.

Walshova báza v Paleyho poradí funkcií je definovaná takto:

$$U_P(n, k) = \prod_{j=0}^{r-1} (-1)^{b_j(n) \cdot b_{r-1-j}(k)}, \quad (2.50)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Báza Hadamardovho jadra usporiadaného podľa Paleyho je na [obr. 2.3 b](#).

V literatúre sa často stretávame s rôznymi názvami pre Walshove- Hadamardove transformácie, a to práve vďaka odlišnej konštrukcii transformačného algoritmu a časovému rozdielu v ich definovaní (Hadamardova transformácia - 1893, Walshova transformácia - 1923). Za Hadamardovu transformáciu sa totiž často pokladá aj Walshova transformácia s výsledným zoradením sekvencií do Paleyho poradia. Pratt [20] a iné literárne pramene pod názvom Hadamardova transformácia uvádzajú ešte jeden typ usporiadania Hadamardových funkcií, a potom takúto transformáciu nazývajú transformáciou s usporiadaným Hadamardovým transformačným jadrom a transformácie s usporiadaním výsledku podľa Hadamarda ako Hadamardovu transformáciu s neusporiadaným transformačným jadrom. Hadamardova transformácia s usporiadaným Hadamardovým poradím bazových funkcií (nazývaná tiež *transformáciou so sekvenčným usporiadaním Walshových funkcií* [20], [21]) má transformačné jadro definované takto:

$$U_S(n, k) = (-1)^{\sum_{j=0}^{r-1} b_j(n) \cdot p_j(k)}, \quad (2.51)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1,$$

kde $p_0(k) = b_{r-1}(k)$, $p_1(k) = b_{r-1}(k) + b_{r-2}(k)$, $p_2(k) = b_{r-2}(k) + b_{r-3}(k)$, ... $p_{r-1}(k) = b_1(k) + b_0(k)$.

Báza usporiadaného Hadamardovho transformačného jadra je ukázaná na [obr.2.3 c](#).

Gonzalez [39], [36], [29] rozdeľuje Walshove a Hadamardove transformácie striktne podľa výpočtového algoritmu a z toho vyplývajúcej definície, ale Paleyho poradie používa len pri definícii Walshovej transformácie a nazýva ho Walshovým transformačným jadrom. Pri Hadamardovej transformácii túto možnosť neuvažuje. Z citovanej zahraničnej literatúry hovoria o Paleyho poradí Ahmed a Rao [22], Besslich [21] a Beauchamp [23], [26]. Niektoré literárne pramene dokonca uvádzajú tieto transformácie pod názvom Hadamardova transformácia a poradie bazových funkcií sa dá vyčítať často len z definície [19]. V našej literatúre je vytvorené kompletne názvoslovie poradi bazových funkcií týchto transformácií v [18], [136]. Ako sa ukazuje, v praxi je veľmi dôležité, ktoré poradie bazových funkcií sa použije pre výpočet transformácie, preto je potrebné správne zvolit' aj názov príslušnej bázy. Pretože výsledok nezávisí od použitého algoritmu, závisí od neho len jeho poradie, v tejto učebnici sú použité pre tieto transformácie názvy podľa príslušných usporiadaní bazových funkcií podľa [18], [21], [136]. Všetky spoločne sa nazývajú ako Walshove-Hadamardove transformácie a vždy je k tomu pridané, či v Hadamardovom, v Paleyho alebo v sekvenčnom usporiadaní bazových funkcií. Takto sú jednoznačne zavedené aj ich skratky - WHT, WPT a WST.

2.5.2 Haarova transformácia (HT)

Haarove báзовé funkcie môžeme definovať [21], [136] týmito vzťahmi:

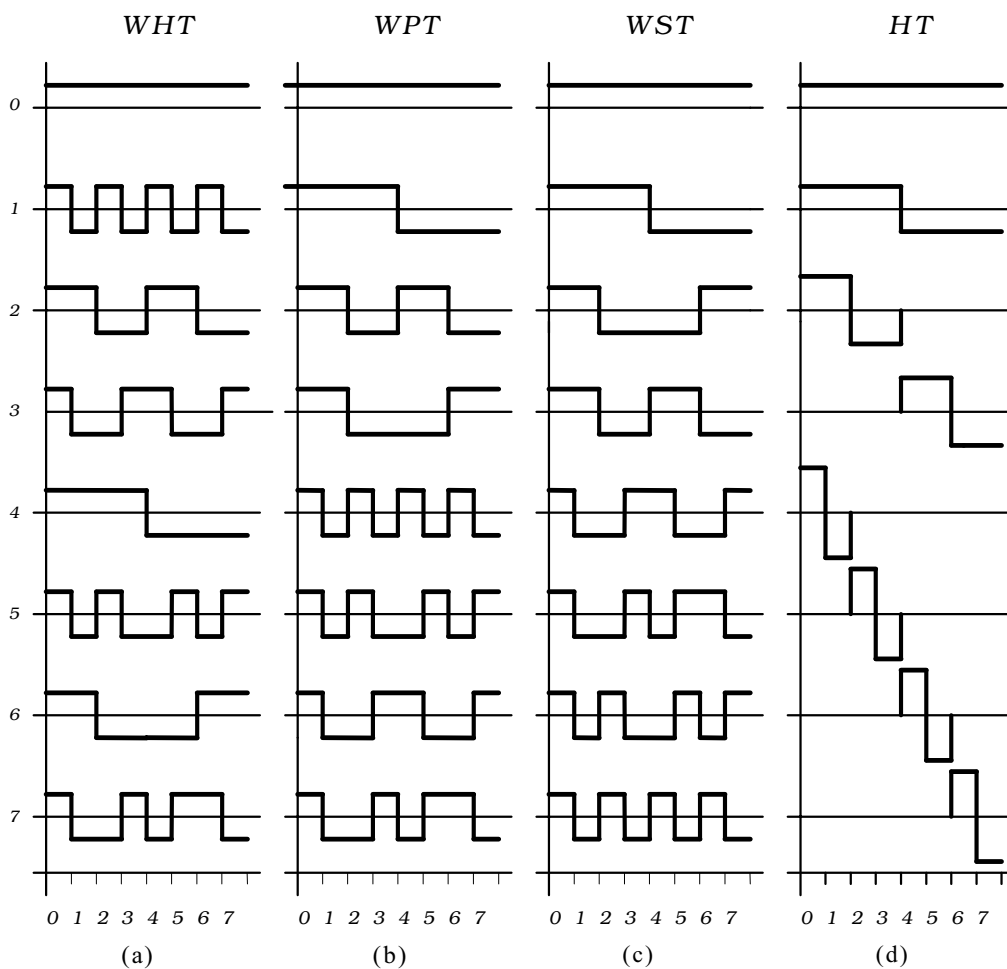
$$U_{HAR}\left(n, \frac{0}{N}\right) = 1 \text{ pre } n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$U_{HAR}\left(n, 2^p + \frac{m}{N}\right) = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^p & \text{pre } m\frac{N}{2^p} \leq n < \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{N}{2^p} \\ -\left(\sqrt{2}\right)^p & \text{pre } \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{N}{2^p} \leq n < (m+1)\frac{N}{2^p} \\ 0 & \text{inak} \end{cases},$$

pre $p = 0, 1, \dots$ a $m = 0, 1, \dots, 2^p - 1$.

(2.52)

Systém báзовých funkcií HT je pre dávku $N = 8$ znázornený na obr.2.3 d.



Obr. 2.3 Báзовé funkcie pre dĺžku $N=8$: WHT (a), WPT (b), WST (c), HT (d)

2.6 ŠIKMÁ (SLANTOVÁ) TRANSFORMÁCIA (ST, SPT, SHT)

Táto transformácia sa v našej literatúre často nazýva poslovenčeným anglickým názvom. Je definovaná [20] rekurentnou transformačnou maticou

$$\mathbf{S}_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ a_N & b_N & \mathbf{0} & -a_N & b_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ -b_N & a_N & \mathbf{0} & b_N & a_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{\frac{N}{2}-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

kde \mathbf{I}_K je jednotková matica rozmeru $K \times K$,

N je dĺžka transformovaného vektora,

$\mathbf{S}_{\frac{N}{2}}$ je transformačná matica šikmej transformácie pre rozmer vektora $\frac{N}{2}$,

konštanty a_N a b_N sú určené rekurentnými vzťahmi:

$$a_2 = 1,$$

$$b_N = \left(1 + 4 \left(a_{\frac{N}{2}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_N = 2b_N a_{\frac{N}{2}},$$

alebo

$$a_{2N} = \left(\frac{3N^2}{4N^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

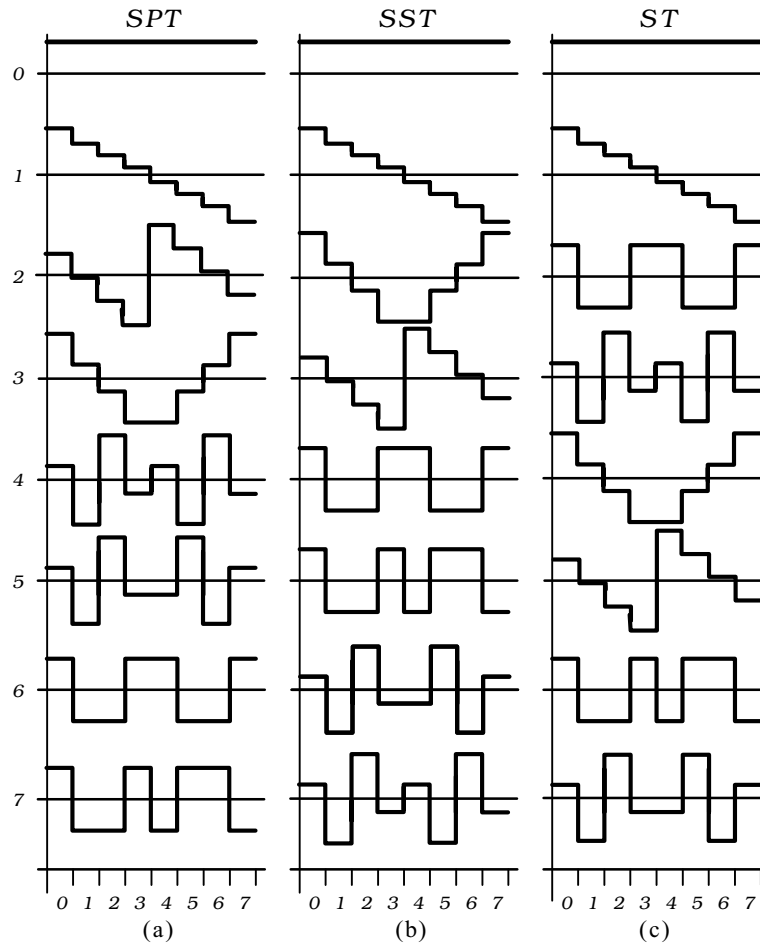
$$b_{2N} = \left(\frac{N^2 - 1}{4N^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.54)$$

matica

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Takto definovaná transformačná matica \mathbf{S}_N je ortonormálna.

Šikmá transformácia je jednoducho vypočítateľná z Walshovej-Hadamardovej transformácie [21], preto aj jej výsledok môže byť usporiadaný podľa toho, z výsledku akej zo skupiny Walshových-Hadamardových transformácií bol získaný. Preto budú ďalej podľa toho aj označované ako SPT, SHT a SST (prvá získaná prepočítaním koeficientov WPT, druhá WHT a tretia WST) a ST (v poradí básových funkcií definovaných podľa transformačnej matice \mathbf{S}_N z definície (2.53)). Systém básových funkcií pre dávku $N = 8$ je znázornený na [obr. 2.4](#).



Obr. 2.4 Bázové funkcie pre N=8: SPT (a), SST (b) ST (c)

2.7 DISKRÉTNE POLYNOMICKÉ TRANSFORMÁCIE

2.7.1 Binomická Hermitova transformácia (BHT, MHT)

Binomické Hermitove transformácie sú diskretným doplnkom spojitých ortogonálnych Hermitových transformácií. Pre analógovú Hermitovu triedu deriváciou Gaussiánu $e^{-\frac{t^2}{2}}$ dostaneme [96]

$$f_r(t) = \frac{d^r}{dt^r} \left\{ e^{-\frac{t^2}{2}} \right\} = H_r(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (2.56)$$

$$H_{r+1}(t) + tH_r(t) + tH_{r-1}(t) = 0,$$

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = -t, \quad (2.57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(t) f_r(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_r(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} r! \delta_{r-m}. \quad (2.58)$$

Pre Fourierovu transformáciu platí [50]

$$F\left\{e^{-\frac{t^2}{2}}\right\} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}, \quad (2.59)$$

$$\frac{d^r x}{dt^r} \leftrightarrow (j\omega)^r \cdot X(\omega). \quad (2.60)$$

Pre Hermitovu transformáciu je takýto pár

$$H_r(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \leftrightarrow \sqrt{2\pi} (j\omega)^r \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (2.61)$$

V diskretnom tvare môžeme písať Binomické sekvencie

$$f_0(n) = \begin{cases} \binom{N}{n}, & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{inak} \end{cases}. \quad (2.62)$$

Pre dĺžku N platí priblíženie [102] *DeMoivreovou - Laplaceovou vetou*

$$\binom{N}{n} \rightarrow \frac{2^N}{\sqrt{\frac{N\pi}{2}}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{n-N}{2}\right)^2}{\frac{N}{2}}}. \quad (2.63)$$

Diskrétnu binomickú Hermitovu triedu môžeme potom generovať nasledujúcou diferenčnou rovnicou [96]

$$f_k(n) = \nabla^r \binom{N-k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (2.64)$$

kde

$$\nabla f(n) = f(n) - f(n-1).$$

Potom

$$f_k(n) = \binom{N}{n} \sum_{v=0}^k (-2)^v \binom{k}{v} \frac{n^{(v)}}{N^{(v)}} = \binom{N}{n} H_k(n), \quad (2.65)$$

kde $n^{(v)}$ je dopredný faktoriál opísaný vzťahom (2.7-11)

$$n^{(v)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-v+1) & v \geq 1 \\ 1 & v = 0 \end{cases}. \quad (2.66)$$

Keď platí

$$H_k(n) = H_n(k), \quad 0 \leq k, n \leq N, \quad (2.67)$$

potom

$$\frac{f_k(n)}{\binom{N}{n}} = \frac{f_n(k)}{\binom{N}{k}}. \quad (2.68)$$

Ďalšie z triedy binomických Hermitových funkcií sú generované [96]

$$f_{k+1}(n) = -f_{k+1}(n-1) + f_k(n) - f_k(n-1), \quad 0 \leq n, k \leq N \quad (2.69)$$

so začiatočnou hodnotou

$$f_k(-1) = 0 \text{ pre } 0 \leq n, k \leq N$$

a začiatočnou sekvenciou

$$f_0(n) = \binom{N}{n}.$$

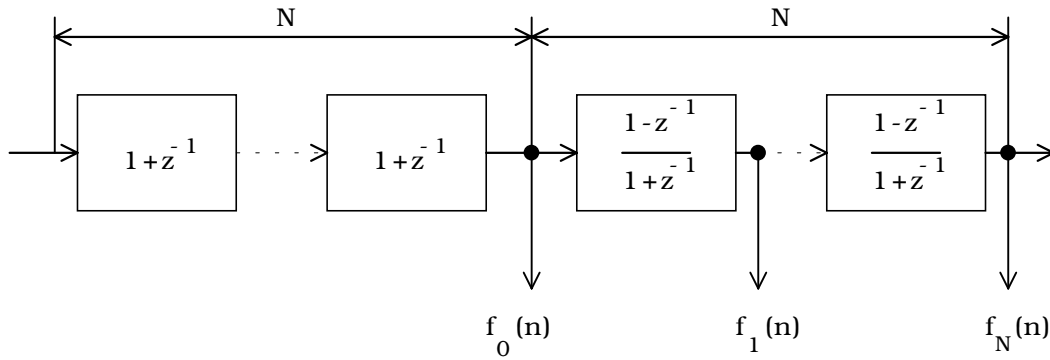
V priestore Z transformácie z tejto rekurzcie dostávame

$$F_k(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \cdot X_{k-1}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \cdot X_0(z),$$

kde

$$F_0(z) = Z \left\{ \binom{N}{n} \right\} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} z^{-n} = (1 + z^{-1})^N. \quad (2.70)$$

Ide o číslicový filter na [obr. 2.5](#).



Obr. 2.5 Štruktúra binomickej banky filtrov

Tento filter je generátorom binomickej Hermitovej triedy funkcií [96].

Hermitove a binomické Hermitove polynómy sú ortogonálne na intervale $\langle 0, N \rangle$ s rešpektom na váhové sekvencie $\binom{N}{n}$ a $\binom{N}{n}^{-1}$.

Platí

$$\sum_{n=0}^N H_k(n) H_m(n) \binom{N}{n} = \sum_{n=0}^N \frac{f_k(n) f_m(n)}{\binom{N}{n}} = \frac{2^N}{\binom{N}{n}} \delta_{k-m}. \quad (2.71)$$

Hermitovu a Binomickú transformačnú maticu vytvoríme:

$$\mathbf{H} = [H_{nk}],$$

$$\mathbf{F} = [F_{nk}], \quad (2.72)$$

kde

$$H_{nk} = H_k(n) \text{ a } F_{nk} = F_k(n).$$

Matica \mathbf{H} je reálna a symetrická, riadky a stĺpce \mathbf{F} sú ortogonálne:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$$

$$\mathbf{F}^2 = 2^N \mathbf{I}_N$$

Binomický Hermitov filter má lineárnu fázu. Z (2.70) môžeme napísať

$$F_k(-z) = F_{N-k}(z) . \quad (2.73)$$

Potom

$$(-1)^n f_k(n) = f_{N-1-k}(n) , k = 0, 1, \dots, N . \quad (2.74)$$

Teda

$$z^{-N} F_k(z^{-1}) = (-1)^k F_k(z) \quad (2.75)$$

a

$$f_k(N-n) = (-1)^k f_n(n) . \quad (2.76)$$

Predchádzajúce úvahy vedú k vytvoreniu modifikovanej Hermitovej transformácie (MHT), ktorá je definovaná bázou [96]

$$U(n, k) = \frac{\binom{N}{n} \binom{N}{k}}{2^{\frac{N}{2}}} \cdot H_k(N) \quad (2.77)$$

alebo

$$\mathbf{U} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{D} ,$$

kde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2^{\frac{N}{2}}}} \cdot \text{diag} \left[\dots \binom{N}{k}^{\frac{1}{2}} \right] . \quad (2.78)$$

Potom transformácia je ortonormálna ($\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$).

MHT spektrum je možné vypočítať v troch krokoch [96]:

1. Vynásobiť signál $x(n)$ oknovou funkciou $w_1(n) = \binom{N}{n}^{-\frac{1}{2}}$ a získať postupnosť $y(n)$.
2. Na vstup Binomickej siete podľa [obr. 2.5](#) dať časovo obrátený signál $y(-n)$. Výstup z k - teho stupňa pre $r = 0$ je medzikoefficient

$$X'_k = \sum_{n=0}^N X(n, k) y(n) , 0 \leq k \leq N .$$

3. Vynásobiť X'_k oknovou funkciou $w_2(k)$

$$X_k = w_2(k) X'_k ,$$

$$w_2(k) = \frac{\binom{N}{k}^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{N}{2}}} .$$

Tento algoritmus má pre dĺžku spracováanej dávky N počet reálnych násobení $2N$. (DCTII má reálnych násobení napr. $N \log_2 N - N + 2$ [96]).

2.7.2 Diskrétna Legendrova transformácia (DLT)

Diskrétné Legendrove polynómy na konečnom intervale boli prvýkrát skonštruované v roku 1969 [115] pomocou polynomických filtrov s konečnou pamäťou. Postup konštrukcie je nasledujúci [96]:

Nech $L_k(n)$ je polynóm stupňa k z intervalu $\langle 0, N-1 \rangle$, a to

$$L_k(n) = 1 + \alpha_{k_1}n + \alpha_{k_2}n^{(2)} + \dots + \alpha_{k_k}n^{(k)} \quad (2.79)$$

pre

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

α_{k_s} musí byť také, aby bola splnená podmienka ortogonalít

$$\sum_{n=0}^{N-1} L_k(n) \cdot L_s(n) = c_k^2 \delta_{k-s}. \quad (2.80)$$

[115] uvádza výsledok

$$\alpha_{k_s} = \begin{cases} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{1}{(N-1)^{(s)}} & , \quad 0 \leq s \leq k \\ 0 & , \quad s > k \end{cases} \quad (2.81)$$

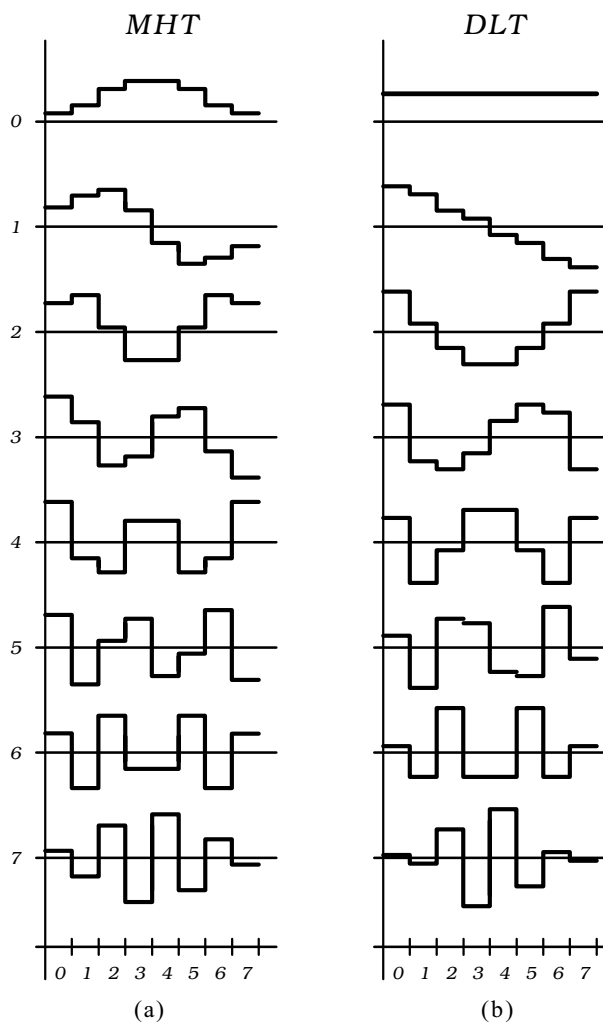
a s tým spojenú normu

$$c_k^2 = \frac{(N+k)^{(k+1)}}{(2k+1)(N-1)^{(k)}}. \quad (2.82)$$

Ortonormalizované jadro diskkrétnej Legendreovej transformácie je potom definované funkciou

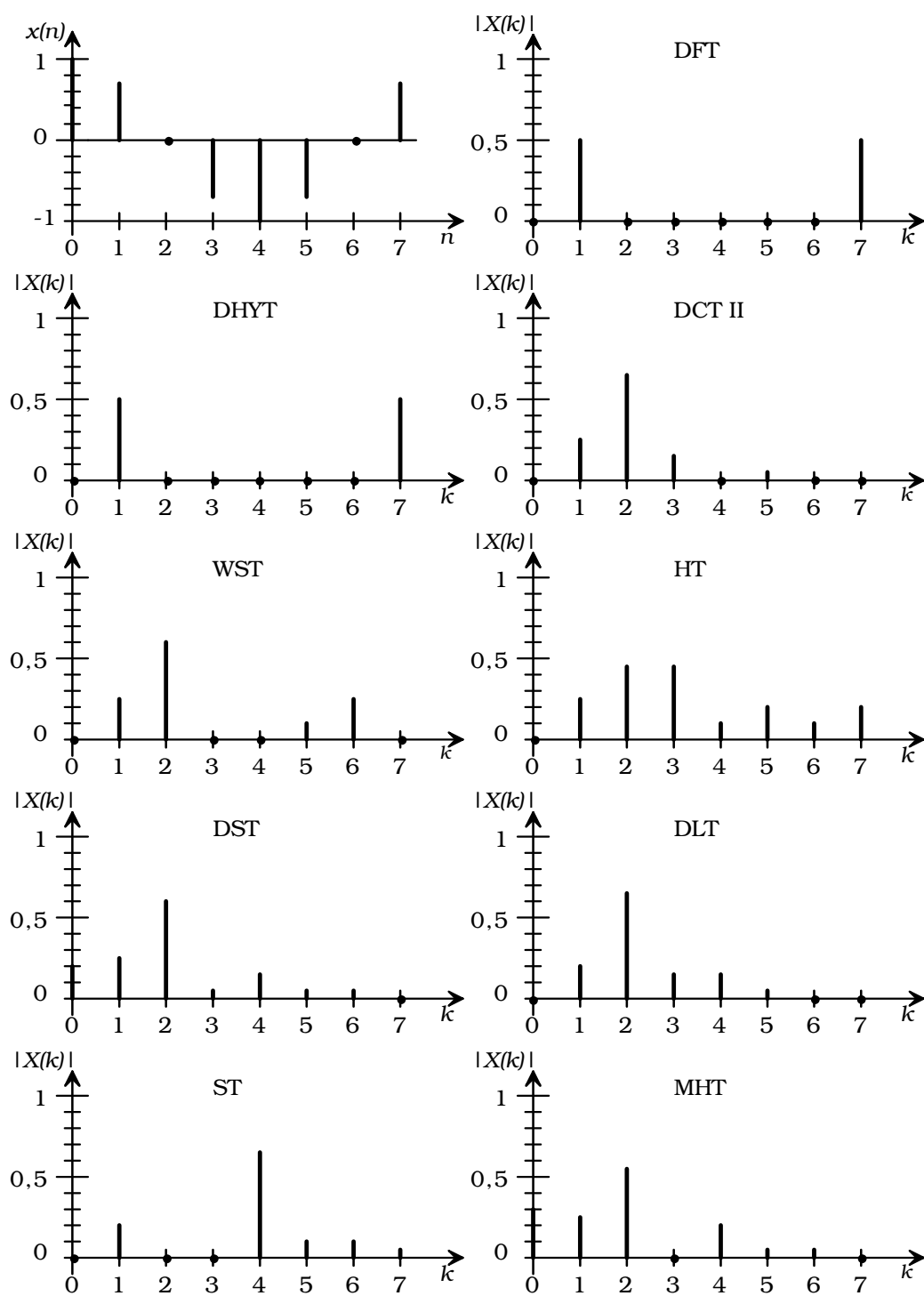
$$U(n, k) U_k(n) = \frac{L_k(n)}{c_k}. \quad (2.83)$$

Kedže väčšina spätných transformácií z triedy DLT nemá rýchly algoritmus, nie je veľmi vhodná na kódovanie i napriek tomu, že базové funkcie DLT majú často podobný tvar ako базové funkcie DCT. V literatúre sa preto vyskytuje zriedka, a to väčšinou pri sumarizačných článkoch alebo v teoretických monografiách.

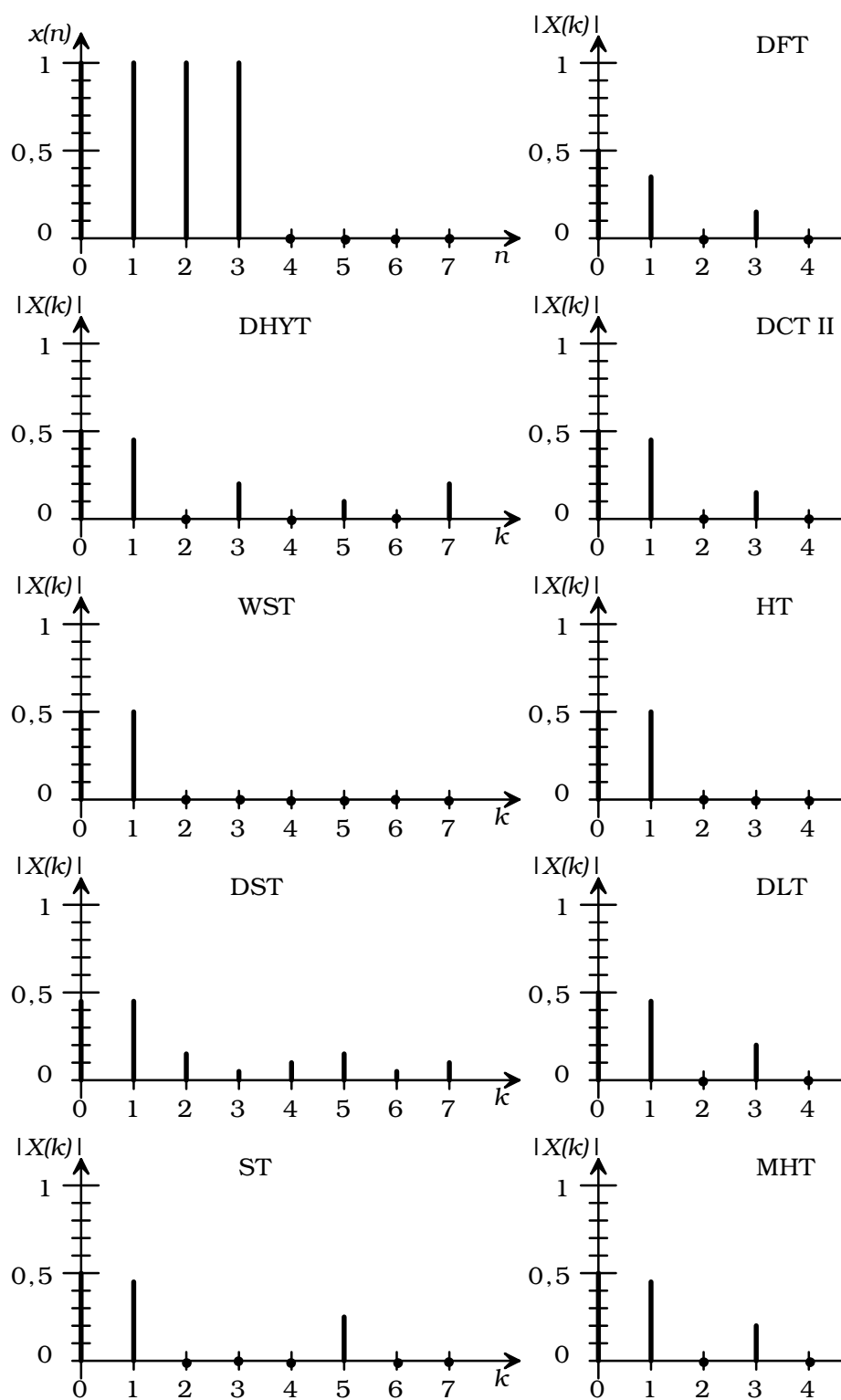


Obr. 2.6 Bázové funkcie MHT a DLT pre $N=8$

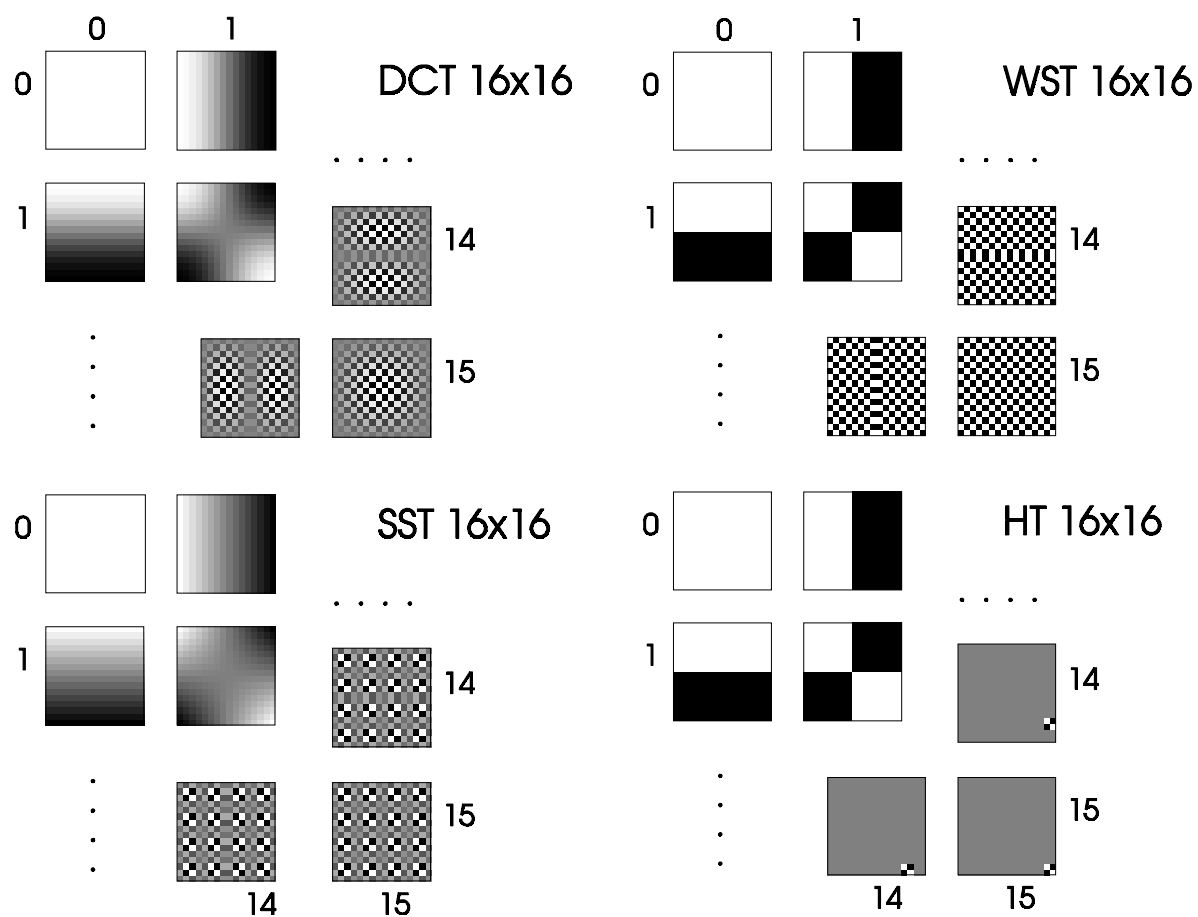
Na [obr. 2.7 \(a\)](#) a [2.7 \(b\)](#) sú znázornené sekvenčné spektrá vzorkovaného kosínusového signálu (a) a pravouhlého impulzu (b) získané rôznymi ortogonálnymi transformáciami. Niektoré funkcie 2D báz diskretných ortogonálnych transformácií sú znázornené na [obr. 2.8](#).



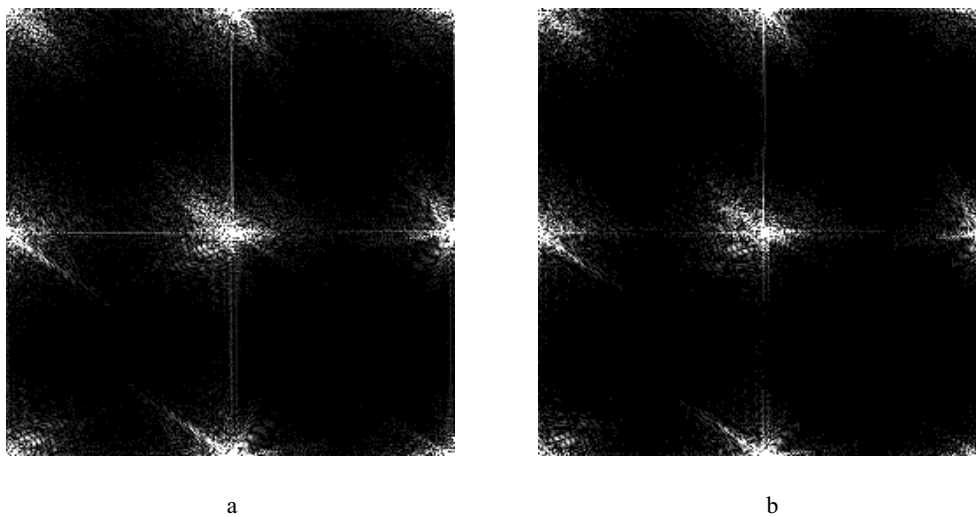
Obr. 2.7 a



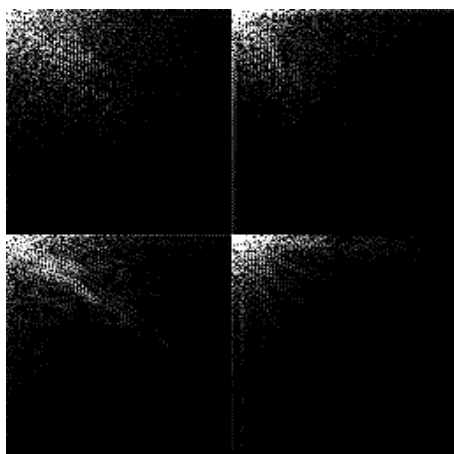
Obr. 2.7 b



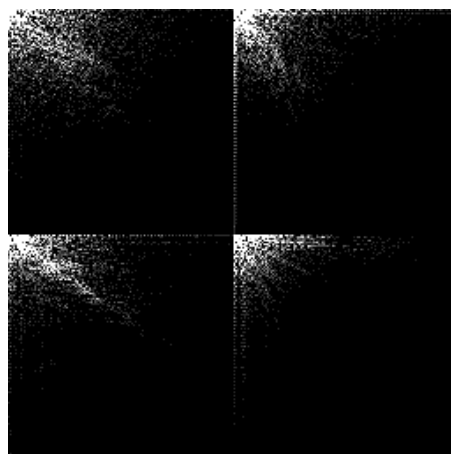
Obr. 2.8 Dvojrozmerné bázové funkcie DCT, SST, WST a HT rozmeru 16 x 16



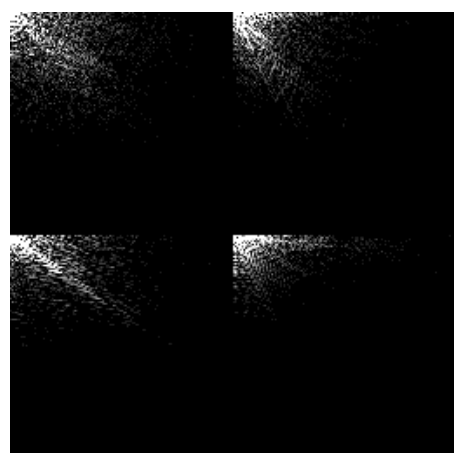
Obr. 2.9 a, b



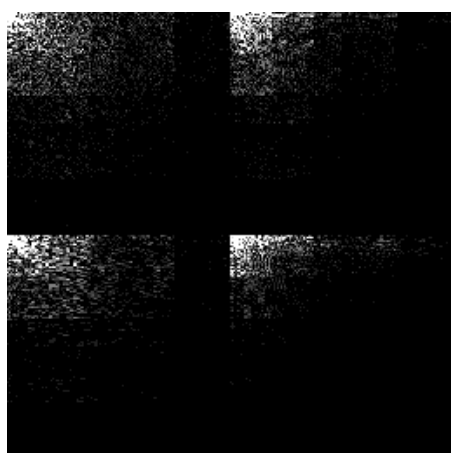
c



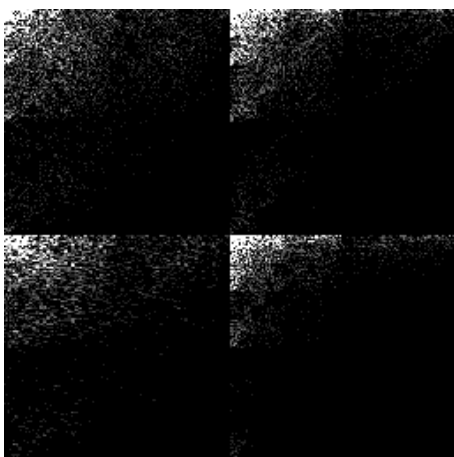
d



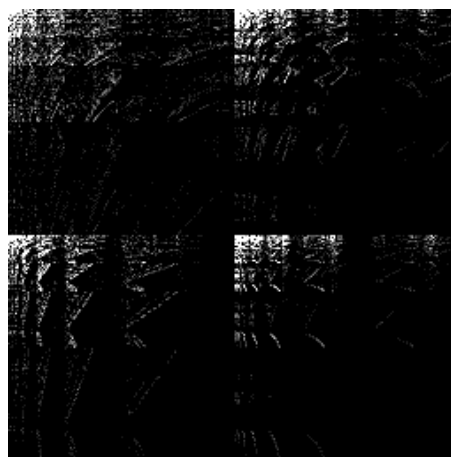
e



f

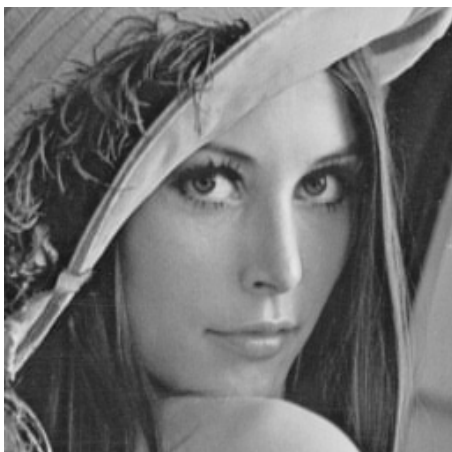


g



h

Obr. 2.9 Magnitúdy spektier výrezu Lena po blokoch 128 x 128: $\text{Re}\{2\text{D DFT}\}$ (a), $\text{Im}\{2\text{D DFT}\}$ (b), 2D DFT2 (c), 2D DHT2 (d), 2D DCTII (e), 2D SST (f), 2D WST (g), 2D HT (h)



a



b

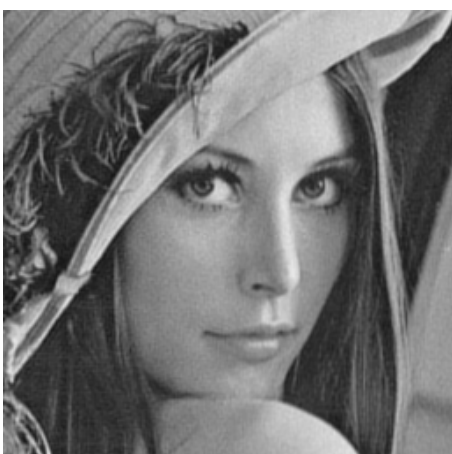


c

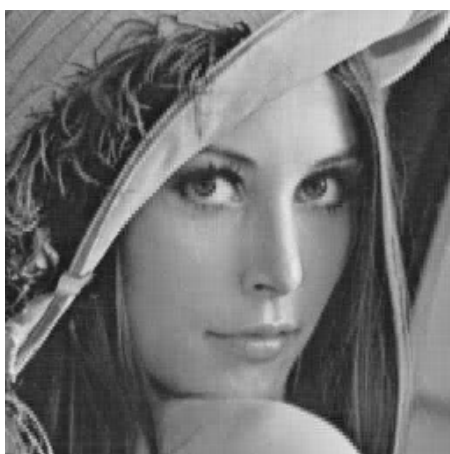


d

Obr. 2.10 Obrazy aproximované diskretnými ortogonálnymi bázami po blokoch 8 x 8: výrez obrazu Lena 2D DCTII 50% (b), 2D HT 50% (b), 2D DCTII 10% (c), 2D HT 10% (d)



a



b

Obr. 2.11 a, b



Obr. 2.11 Obrazy aproximované diskretnými ortogonálnymi bázami po blokoch 128 x 128: výrez obrazu Lena 2D DCTII 50% (b), 2D HT 50% (b), 2D DCTII 10% (c), 2D HT 10% (d)

2.8 HYBRIDNÉ DISKRÉTNE ORTOGONÁLNE TRANSFORMÁCIE

K tomu, že učebnica obsahuje zavedenie nových zmiešaných diskretných ortogonálnych transformácií, viedol predpoklad nedokonalnej dekorrelácie štatistických závislostí bežnými diskretnými ortogonálnymi transformáciami pri ich použití pre oba rozmery dvojrozmerných signálov (alebo pre všetky tri pri trojrozmernom spracovaní). Musíme si totiž uvedomiť, že pri snahe o dekorreláciu sa zavádza chyba už tým, že sa zjednodušuje štatistika na rovnakú v oboch transformovaných smeroch (pri spracovaní obrazu) a výberom neoptimálnej transformácie sa chyba ešte zväčšuje. Platí [19], [20]: ak \mathbf{x} je dvojrozmerný signál, kde vzorky sú usporiadané do matice rozmeru $N_1 \times N_2$, potom jeho dvojrozmerná diskretná ortogonálna transformácia je určená vzťahom

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{U}_1^T. \quad (2.84)$$

Ak uvažujeme signál s autokovariančnou funkciou v tvare autokovariančnej matice

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \otimes \mathbf{C}_2, \quad (2.85)$$

kde \mathbf{C}_1 je autokovariančná matica, získaná z riadkov matice \mathbf{x} a \mathbf{C}_2 z jej stĺpcov, \otimes je znak pre Hadamardov súčin (Kroneckerov produkt).

Potom konštrukciu Hotellingovej (diskrétnej Karhunenovej - Loèveho) transformácie pre dvojrozmerný diskretný signál môžeme modifikovať takto: podľa [19], [20],[70] platí

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{D}, \quad (2.86)$$

kde \mathbf{D} je diagonálna matica obsahujúca vlastné čísla matice \mathbf{C} na hlavnej diagonále a \mathbf{U} je Hotellingova transformačná matica. \mathbf{U} , \mathbf{D} a \mathbf{C} sú matice s rozmerom $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$.

Vyjadrieme \mathbf{C} podľa vzťahu (2.85)

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{C}_1 \otimes \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{D} \quad (2.87)$$

a vyjadrieme

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{U}_2, \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{U}_2) \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2) \cdot (\mathbf{U}_1^T \otimes \mathbf{U}_2^T) &= (\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{U}_1^T) \otimes (\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{U}_2^T) \\
&= \mathbf{D}_1 \oplus \mathbf{D}_2 = \mathbf{D} .
\end{aligned}
\tag{2.89}$$

V praxi je bežné hľadať diskretnú ortogonálnu transformáciu, ktorá je najbližšia ku Hotellingovej. Výber sa obmedzuje na bežné diskretné ortogonálne transformácie, pričom sa uvažuje, že riadková a stĺpcová štatistika sú zhodné, t.j., že $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$ alebo jedna je submaticou druhej. Potom $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ alebo sa odlišujú len veľkosťou, ale sú tvorené z bázy rovnakého typu. Potom dvojrozmerná báza daná maticou \mathbf{U} je bázou bežných diskretných ortogonálnych transformácií. Porušením týchto konvencií sa nám otvára možnosť tvorby nových dvojdimenzionálnych diskretných ortogonálnych báz a kratšej alebo rýchlejšej aproximácie obrazu postupnosťou váhovaných koeficientov novej dvojrozmernéj bázy. Predpokladáme, že obraz buď vyjadríme kratšou postupnosťou sekvenčných zložiek (a dokážeme teda jeho informačný obsah aproximovať menším počtom spektrálnych koeficientov), alebo aproximáciu s rovnakým počtom sekvencií a s rovnakou presnosťou získame menším počtom matematických operácií, než pri použití rovnakých transformácií pre riadky a stĺpce. Tento postup nazvime hybridnými alebo zmiešanými diskretnými ortogonálnymi transformáciami [67].

2.8.1 Štatistická analýza transformovaného obrazu

Ak je obrazové pole $x(n_1, n_2)$ súčasťou dvojrozmerného stochastického procesu so strednou hodnotou a kovariančnou funkciou, potom ortonormálna transformácia je tiež stochastickým procesom a môžeme potom [19], [20], [70] :

$$\begin{aligned}
X(k_1, k_2) &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) \cdot U(n_1, n_2, k_1, k_2) , \\
k_1 &= 0, 1, \dots, N_1 - 1 ,
\end{aligned}
\tag{2.90}$$

$$k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1 ,$$

$$E\{X(k_1, k_2)\} = \sum_{n_2} \sum_{n_1} E\{x(n_1, n_2)\} \cdot U(n_1, n_2, k_1, k_2) , \tag{2.91}$$

kde $E\{x(n_1, n_2)\}$ reprezentuje strednú hodnotu $x(n_1, n_2)$.

Kovariančná funkcia transformovaného obrazu je potom

$$C_X(k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}) = \sum_{n_{11}} \sum_{n_{12}} \sum_{n_{21}} \sum_{n_{22}} C_x(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}) \cdot U(n_{11}, n_{12}, k_{11}, k_{21}) \cdot U^*(n_{11}, n_{12}, k_{12}, k_{22}) , \tag{2.92}$$

kde $C_x(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22})$ je kovariančná funkcia $x(u, v)$. Nakoniec pre rozptyl funkcie $X(k_1, k_2)$ dostávame

$$\sigma_X^2(k_1, k_2) = C_X(k_1, k_2, k_1, k_2) . \tag{2.93}$$

Predchádzajúce úvahy použijeme pre Hotellingovu transformáciu. Zo vzťahu (2.92) dostaneme

$$C_X(k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}) = \sum_{n_{12} n_{22}} U^*(n_{12}, n_{22}, k_{12}, k_{22}) \cdot \sum_{n_{11} n_{21}} C_x(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}) \cdot U(n_{11}, n_{21}, k_{11}, k_{21}) . \tag{2.94}$$

Z konštrukcie Hotellingovej transformácie vyplýva

$$C_X(k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}) = \sum_{n_{12}} \sum_{n_{22}} U^*(n_{12}, n_{22}, k_{12}, k_{22}) \cdot D(k_{11}, k_{21}) \cdot U(n_{11}, n_{21}, k_{11}, k_{21}), \quad (2.95)$$

kde čísla $D(k_1, k_2)$ sú vlastné čísla kovariančnej funkcie obrazu (pre kovariančnú funkciu vyjadrenú v tvare štvorrozmernej matice tiež vlastné čísla kovariančnej matice obrazu).

Z ortogonalít Hotellingovej transformácie vyplýva, že de Korelované Hotellingove sekvenčné koeficienty korešpondujú s vlastnými číslami obrazovej matice.

Z predchádzajúceho vyplýva, že pri blokovom spracovaní signálov opísaných rovnakým štatistickým rozdelením, sa ich energetické spektrá rozložia v priestore v závislosti od vlastných čísel kovariančnej matice signálu. To znamená, že príslušné sekvenčné zložky budú v prípade úplne rovnakej štatistiky signálu v absolútnej hodnote váhované vlastné čísla autokovariančnej matice rovnaké v absolútnej hodnote vo všetkých blokoch a pre rovnaké sekvencie. Tento prípad sa však očakávať nedá, ale táto úvaha vedie k štúdiu nie goniometrických diskretných ortogonálnych báz, ale práve tých, ktorých bázo­vé funkcie obsahujú len plus a mínus jednotky a k snahe vyjadriť pomocou nich sekvencie zložené zo sekvenčných zložiek viacerých susediacich blokov, ktoré ležia na rovnakom mieste. Tieto úvahy sa týkajú najmä Walshových a Hadamardových transformácií, prípadne Haarovej transformácie. Tento postup pripomína diskretnú ortogonálnu transformáciu vektora väčších dĺžok, ale pre ďalšie kroky v transformačnom algoritme využije bázu inej ortogonálnej transformácie.

2.8.2 Konštrukcia zmiešaných $(n + 1)$ - dimenzionálnych diskretných ortogonálnych transformácií a ich algoritmov

V tejto kapitole je uvedený postup konštrukcie zmiešanej dvojrozmernej a trojrozmernej diskretnéj ortogonálnej transformácie a jej bázy funkcií, ktorý bol navrhnutý na príklade diskretnéj kosínusovej transformácie [67].

Pretože je známe, že problém dvojrozmernéj diskretnéj ortogonálnej transformácie bloku veľkosti $N_1 \times N_2$ je možné riešiť ako problém jednorozmernéj diskretnéj ortogonálnej transformácie vektora dĺžky $L = N_1 N_2$, je aj nasledujúci postup odvodený ako jednorozmerná diskretná ortogonálna transformácia vektora dĺžky $BN_1 N_2 = BL$, kde B je počet spracovávaných blokov.

♦ **Veta 2.8.2.1:** *Nech \bar{x} je vektor dĺžky BL , kde B a L sú definované v úvode tejto kapitoly a vyhovujú podmienkam: $L = 2^r$ a $B = 2^s$, kde r a s sú kladné celé čísla. Utvorme bázu jednorozmerných diskretných funkcií $U_z(n, k)$ nasledovným predpisom:*

$$U_z(n, k) = U(n[\text{mod}(L)], k[\text{mod}(L)]) \cdot (-1)^{\sum_{i=0}^{L-1} b_i \left[\text{int}\left(\frac{n}{L}\right) \right] \cdot b_i \left[\text{int}\left(\frac{k}{L}\right) \right]}, \quad (2.96)$$

kde označenie $k[\text{mod}(L)]$ znamená zvyšok po delení čísla k číslom L a $\text{int}\left(\frac{k}{L}\right)$ je celočíselná časť čísla v zátvorke, $k, n = 0, 1, \dots, BL - 1$ a $U(n, k)$ je funkcia niektorej diskretnéj ortonormálnej bázy funkcií. Potom diskretná báza funkcií $U_z(n, k)$ je ortogonálna.

Dôkaz vyplýva z vlastností Kroneckerovho produktu, prípadne [67], [113].

2.8.2.1 DCT - WHT zmiešaná diskretná ortogonálna transformácia

Ako príklad pre konštrukciu novej diskretnéj ortogonálnej DCT-WHT bázy vezmeme bázu diskretnéj kosínusovej transformácie. Potom ju môžeme definovať vzťahom [67], [113]

$$X_{CWH}(k) = 2 \frac{C_{k[\text{mod}(L)]}}{BL} \sum_{n=0}^{BL-1} x(n) \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{L} k[\text{mod}(L)] \left(n[\text{mod}(L)] + \frac{1}{2} \right) \right\} \cdot (-1)^{\sum_{i=0}^{L-1} b_i \text{int}\left(\frac{n}{L}\right) \cdot b_i \text{int}\left(\frac{k}{L}\right)},$$

$$k = 0, 1, \dots, BL$$

(2.97)

a pre inverznú transformáciu:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{BL-1} c_{k[mod(L)]} X_{CWH}(k) \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{L} k[mod(L)] \left(n[mod(L)] + \frac{1}{2} \right) \right\} \cdot (-1)^{\sum_{i=0}^{k-1} b_i \text{int}\left(\frac{n}{L}\right) \cdot b_i \text{int}\left(\frac{k}{L}\right)}. \quad (2.98)$$

Takto je možné vytvoriť množstvo diskretných ortogonálnych transformácií. Stačí v definíciách báz týchto transformácií urobiť substitúcie

$$k \rightarrow k[mod(L)] \text{ a } n \rightarrow n[mod(L)]. \quad (2.99)$$

Poznámka

Hore uvedený algoritmus tvorby zmiešaných ortogonálnych báz, ktorý je definovaný vzťahom (2.96), je možné rozšíriť na množinu všetkých diskretných ortogonálnych báz nasledovným spôsobom.

Nech $U_L(n, k)$ je ortogonálna diskretná báza dĺžky L a $U_B(n, k)$ je diskretná ortogonálna báza dĺžky B . Potom zmiešanú diskretnú ortogonálnu bázu $U_{BL}(n, k)$ dĺžky BL dostaneme:

$$U_{BL}(n, k) = U_L \{ n[mod(L)], k[mod(L)] \} \cdot U_B \left\{ \text{int}\left(\frac{n}{L}\right), \text{int}\left(\frac{k}{L}\right) \right\}, \quad (2.100)$$

$$k, n = 0, 1, \dots, BL.$$

V maticovom tvare: ak $U_L \{ n[mod(L)], k[mod(L)] \}$ je prvok matice \mathbf{U}_L a $U_B \left\{ \text{int}\left(\frac{n}{L}\right), \text{int}\left(\frac{k}{L}\right) \right\}$ je prvok matice \mathbf{U}_B , potom transformačnú maticu \mathbf{U}_{BL} zloženú z prvkov $U_{BL}(n, k)$ dostaneme ako Kroneckerov produkt matíc \mathbf{U}_L a \mathbf{U}_B , tzn. (podobne ako pre Hotellingovu transformáciu):

$$\mathbf{U}_{BL} = \mathbf{U}_L \otimes \mathbf{U}_B. \quad (2.101)$$

Dá sa ukázať, že diskretná báza $U_{BL}(n, k)$ je tiež ortogonálna (dôkaz vychádza z vlastností Kroneckerovho produktu).

Poznámka

Trojdimenzionálnu zmiešanú diskretnú ortogonálnu transformáciu dostaneme podobne. Stačí vyjadriť príslušnú dvojrozmernú bázu transformácie, ktorou sú spracovávané bloky, ako jednorozmernú (súčinom podľa 2.101) a výsledok tenzorovo vynásobiť s transformačnou maticou, ktorú chceme použiť v treťom rozmere. Z vlastností tenzorového súčinu matíc vyplýva, že takto vytvorené transformačné matice, sú ortogonálne.

Oprávnenosť prístupu k medziblokovým transformáciám sa dá ukázať pri transformačnom kódovaní jednodimenziálnych signálov [37], [38] alebo transformačnom kódovaní obrazu. V [66], [67], [114] sú ukázané výsledky z kódovania obrazu medziblokovou transformáciou v jednej dimenzii s rôznymi DOT a v [103] sú ukázané výsledky z použitia dvojdimenzionálnej medziblokovej transformácie, a to pri použití 2D DCT II \otimes 2D DCT II a je tam ukázaný aj princíp výberu sekvenčných zložiek pre medziblokovú transformáciu.

2.8.3 Zmiešané bázy na princípe šikmej transformácie

V tejto časti ukážeme návod na konštrukciu zmiešaných báz na princípe algoritmu šikmej transformácie a na konštrukciu suboptimálnych transformácií kombináciou Hadamardovej maticovej konštrukcie a Jacobiho algoritmu.

Pri rekurzívnej konštrukcii bázy rozmeru N šikmej transformácie sa dá vidieť (pozri kapitolu 2.8, [21]) a transformačnú maticu \mathbf{S}_4):

1. algoritmus [21] je súčinom rotačnej matice a Hadamardovej maticovej konštrukcie z bázy šikmej transformácie z rozmeru $N/2$;

2. ortonormalizovaná báza šikmej transformácie dĺžky 4 je totožná z ortonormalizovanou bázou diskkrétnej Legendreovej transformácie dĺžky 4.

Z ohľadom na uvedené vlastnosti bázy šikmej transformácie môžeme rekurzívny algoritmus modifikovať nasledovne:

- pre dĺžku 4 definovať transformáciu niektorou z triedy blokových diskrétnych ortogonálnych transformácií (napr. DCT II),
- pre väčšie dĺžky ako 4 počítať bázu rekurzívnym algoritmom šikmej transformácie s predefinovanou maticou \mathbf{S}_4 .

Takto je možné vytvoriť množstvo zmiešaných transformačných báz s rýchlymi algoritmami, ktoré môžu mať lepšie aproximačné vlastnosti než má šikmá transformácia a pritom ich algoritmus má čiastočne zachovanú výhodnú rýchlosť algoritmu šikmej transformácie. Niektoré modelové výsledky z použitia takto vytvorených transformácií sú uvedené v [tabuľke 2.9](#) v nasledujúcej kapitole.

Poznámka

Vyššie uvedený postup môžeme aplikovať aj pre náhradu $\mathbf{S}_{N/2}$ väčšieho rozmeru inou ortogonálnou bázou.

Vlastnosti rekurzívneho algoritmu šikmej transformácie vedú aj k inej úvahe: optimalizovať výpočet koeficientov a_N a b_N pre niektorý z korelačných modelov spracovávaných (kódovaných) signálov. Napríklad vytvoríme novú transformačnú maticu podľa predpisu

$$\mathbf{N11}_{(N=2^k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}(\Theta_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{N11}_{N/2} & \mathbf{N11}_{N/2} \\ \mathbf{N11}_{N/2} & -\mathbf{N11}_{N/2} \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

$$k = 2, 3, \dots,$$

kde $\mathbf{Y}(\Theta_k)$ je matica rovinnej rotácie [112], pre ktorú platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}(\Theta_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot {}^{(k)}\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}(\Theta_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \approx {}^{(k)}\mathbf{D}, \quad (2.103)$$

t.j., koeficienty matice rovinnej rotácie vypočítame napr. Jacobiho metódou [112], a to tak, že vynulujeme tie koeficienty matice ${}^{(k)}\mathbf{R}$, pre ktoré platí

$${}^{(k)}\sigma = \frac{2^{(k)}t_{pq}}{{}^{(k)}t_{qq} - {}^{(k)}t_{pp}} = \max \{ {}^{(k)}\sigma_{pq} \}, \quad (2.104)$$

matica

$${}^{(1)}\mathbf{D} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

$${}^{(k)}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{N11}_{N/2} & \mathbf{N11}_{N/2} \\ \mathbf{N11}_{N/2} & -\mathbf{N11}_{N/2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{R}_N \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{N11}_{N/2} & \mathbf{N11}_{N/2} \\ \mathbf{N11}_{N/2} & -\mathbf{N11}_{N/2} \end{pmatrix}^T, \quad (2.106)$$

kde \mathbf{R}_N je autokorelačná matica modelu procesu signálu rozmeru $N \times N$, pre ktorý tvoríme novú transformáciu s ohľadom na maximalizáciu zisku transformačného kódovania.

Z postupu je jasné, že pre túto transformáciu existuje rýchly algoritmus taký istý ako pre šikmú transformáciu, pretože sú optimalizované len koeficienty matice rovinnej rotácie.

Poznámka

Zväčšením počtu matic rovinnej rotácie môžeme vytvoriť ešte optimálnejšiu bázu pre príslušný proces. Znižujeme tým však rýchlosť výpočtového algoritmu, pretože každá matica rovinnej rotácie znamená 4 neceločíselné násobenia. Takto tvorené transformácie budeme označovať počtom nulovaných koeficientov v autokorelačnej matici v k -tom kroku. (napr. N12 znamená, že pre dĺžku 4 bol vynulovaný 1 koeficient a pre dĺžku 8 ďalšie 2). Pre dekódovanie (inverzné transformovanie) si treba pamätať počty nulovaných koeficientov v každom kroku rekurzívneho algoritmu a štatistický popis pre príslušnú veľkosť dávky. Je výhodné, keď je proces modelovaný niektorým zo známych modelov. Potom stačí uchovať názov procesu a jeho koeficienty (napríklad prediktory).

Pre AR(1) model s prediktorom 0,95 vytvorená báza rozmeru 8 je z hľadiska transformačného zisku porovnaná (pre AR(1) vstup s rôznymi prediktormi) s inými ortogonálnymi transformáciami v tabuľke v predchádzajúcej kapitole.

Podobný princíp vytvárania optimálneho transformačného algoritmu je uvedený v [47], [109]. V tejto metóde sa postupne vynulováva tzv. referenčný vektor. Pri uvedenej metóde však rýchlosť algoritmu je veľmi nízka a pri uvádzanej presnosti má napr. pre dĺžku 8 až 48 násobení, pričom bežné rýchle algoritmy majú pre túto dĺžku 2 (ReDFT, DHYT) - 20 (DCT IV) násobení. Pre danú aplikáciu (nukleárna fyzika) však zrejme rýchlosť algoritmu nehrá až takú veľkú úlohu ako pri kódovaní obrazu.

2.9 Prekrývajúce ortogonálne transformácie (LOT)

Blokové transformácie, špeciálne DCT pri veľmi vysokých kompresných pomeroch degradujú signál aj tak, že spôsobujú blokový efekt. Je spôsobený nezávislým kódovaním subblokov signálu. Dochádza k nespojitosti procesu a následnej pozorovateľnej degradácii na hraniciach blokov. Asi prvýkrát prináša [94] techniku tzv. "lapped" ortogonálnych transformácií. Autori použili pre výpočet transformácie v bloku aj vzorky z dvoch susedných blokov. Tým odstránili nespojitosť výpočtu medzi susednými blokmi. Túto koncepciu používa [88], [89] tak, že za základ pre LOT využíva bázu DCT a [91] aj iné bázy tzv. blokových transformácií.

LOT našli svoje použitie aj v kódovaní statiského [93] aj pohyblivého [90] obrazu.

Ako príklad postupu tvorby LOT uvádzam nasledujúcu konštrukciu bázy a celkovej jej prípravy tak, aby z nej bolo relatívne jednoduchým spôsobom možné vytvoriť rýchly algoritmus výpočtu. Konštrukcia tejto LOT vychádza z predpokladu, že výpočet transformácie bloku $\bar{\mathbf{x}}_i$ dĺžky N_1 je použitých $N_1/2$ vzoriek bloku $\bar{\mathbf{x}}_{i-1}$ a $N_1/2$ vzoriek bloku $\bar{\mathbf{x}}_{i+1}$. Postup transformovania je zrejmý z nasledujúcej matice:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\mathbf{x}}_{L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{U}_Z} & & & & \\ & \boxed{\mathbf{U}_0} & & & \\ & & \boxed{\mathbf{U}_0} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\mathbf{U}_0} \\ & & & & & \boxed{\mathbf{U}_K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\mathbf{x}}_{L-1} \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

kde $L = N_1 \times N_2$ a $M = 2N_1$.

Chceme, aby transformácia bola ortogonálna. Preto transformačná matica v (2.107) rozmeru $LN_1 \times LN_1$ musí byť ortogonálna. Tzn., že riadky matice \mathbf{U}_0 rozmeru $N \times M$ majú byť ortogonálne. Potom platí

$$\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{U}_0^T = \mathbf{I}_{N_1}$$

$$(2.108)$$

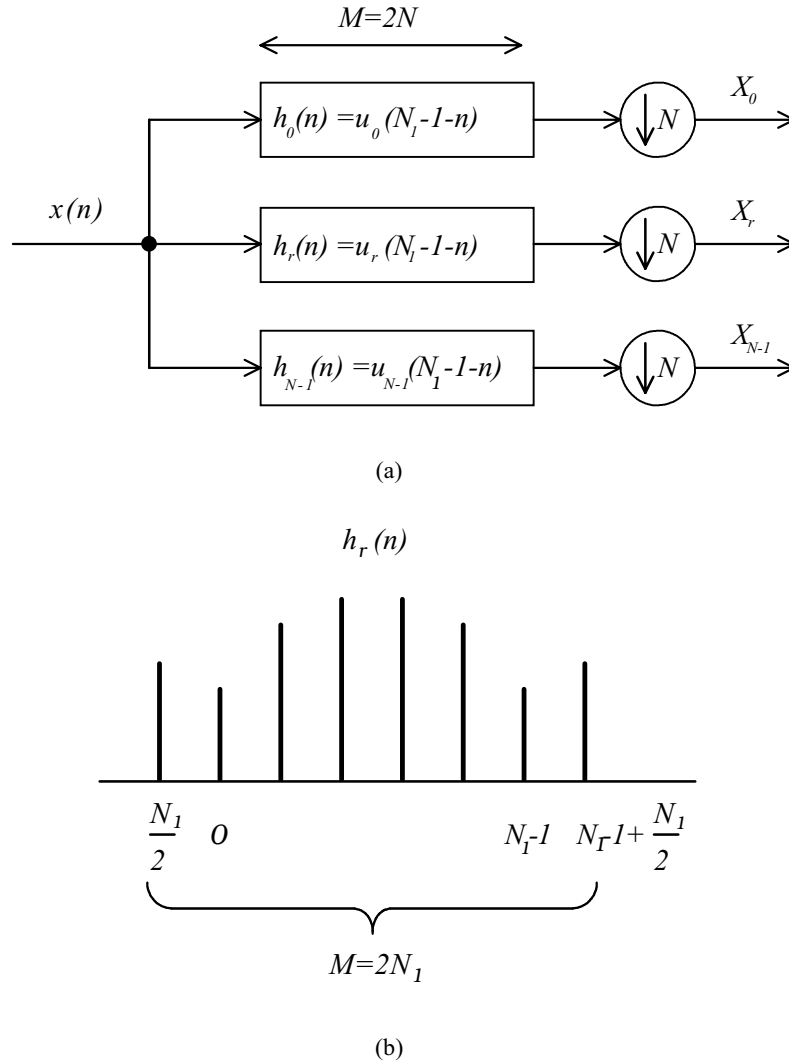
a bázové funkcie prekrývajúce susedné bloky majú byť tiež ortogonálne. Tzn., že musí platiť [88]

$$\mathbf{U}_0^s \mathbf{I}_M \cdot \mathbf{U}_0^T = 0, \quad (2.109)$$

kde ${}^s\mathbf{I}_M$ je $M \times M$ matica

$${}^s\mathbf{I}_M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(M-N)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.110)$$

Tento postup korešponduje [96] s viacpásmovou (multirate) filtráciou na [obr. 2.12](#).



Obr. 2.12 LOT ako viacpásmová filtračná banka: bloková schéma (a), impulzová odpoveď (b)

2.9.1 Optimalizácia LOT

Nech $\bar{\mathbf{x}}$ je M dimenzionálny vektor, \mathbf{U}_0 je matica LOT rozmeru $N \times M$ a $\bar{\mathbf{X}}$ je N - dimenzionálny vektor transformačných koeficientov. Vychádzajúc z teórie dekorelácie pomocou optimálnej transformácie dostaneme nasledujúci postup [88], [89], [96].

Pre koeficienty autokorelačnej matice platí

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{U}_0^T. \quad (2.111)$$

Ak predpokladáme ako základ LOT niektorú z triedy ortonormálnych transformácií, môžeme jej transformačnú maticu rozmeru $N \times N$ prepísať do tvaru

$$\mathbf{U}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T & \mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T \\ \mathbf{J}_N \cdot (\mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T) & -\mathbf{J}_N \cdot (\mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T) \end{pmatrix}, \quad (2.112)$$

kde \mathbf{K}_e a \mathbf{K}_o sú [91], [96] matice $\frac{N}{2} \times N$ zložené z párnych (e) a nepárnych (o) básových funkcií ortonormálnej transformácie dĺžky N a \mathbf{J}_N je obrátená jednotková matica.

$$\mathbf{J}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.113)$$

LOT potom konštruujeme v dvoch krokoch [91].

1.

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{x}}. \quad (2.114)$$

Platí

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{U}^T. \quad (2.115)$$

To znamená, že sme transformovali pomocou niektorej z triedy blokových ortonormálnych transformácií.

2.

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{Z} \cdot \bar{\mathbf{y}} \quad (2.116)$$

a platí

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{U}^T) \cdot \mathbf{Z}^T. \quad (2.117)$$

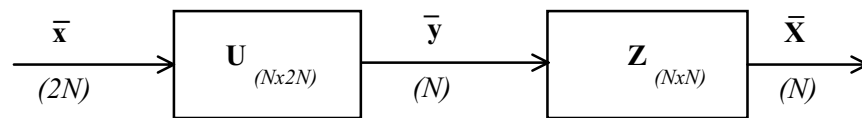
Potom

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{U}, \quad (2.118)$$

$$\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{U}_0^T = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{I}_N, \quad (2.119)$$

$$\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{I}_M \cdot \mathbf{U}_0^T = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}_M \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{Z}^T = 0. \quad (2.120)$$

Schéma je zrejmá z obrázku 2.13.



Obr. 2.13 Schéma LOT

Z dôvodu optimalizácie \mathbf{Z} platí, že riadky matice \mathbf{Z} sú vlastné vektory korelačnej matice \mathbf{R}_y [88]. Pre DCT platí, že \mathbf{K}_e^T sa dá prepísať na maticu [88], [89], [96]

$$\mathbf{K}_e^T = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_e \\ \mathbf{J}_{\frac{N}{2}} \cdot \mathbf{H}_e \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

kde \mathbf{H}_e je matica rozmeru $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$.

Potom pre matice \mathbf{U}_z a \mathbf{U}_k rozmeru $N \times (N + \frac{N}{2})$ platí

$$\mathbf{U}_Z^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2\mathbf{H}_e & 2\mathbf{H}_e \\ \mathbf{J}_N \cdot (\mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T) & -\mathbf{J}_N \cdot (\mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T) \end{pmatrix}, \quad (2.122)$$

$$\mathbf{U}_K^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T & \mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T \\ 2\mathbf{J}_{\frac{N}{2}} \cdot \mathbf{H}_e & -2\mathbf{J}_{\frac{N}{2}} \cdot \mathbf{H}_e \end{pmatrix}. \quad (2.123)$$

Poznámka

Táto konštrukcia začiatkovej a koncovkej transformačnej matice bola odvodená z DCT transformácie [88], [89]. Preto aj platí len pre bázy, ktorých funkcie s párnym poradím sekvencie sú symetrické voči stredu. Pre iné ortogonálne bázy toto nemusí platiť. Je výhodné konštruovať maticu \mathbf{U}_0 z transformačnej matice v sekvencnom usporiadaní báзовých funkcií (tzn., že každá báзовá funkcia pretína časovú os o jedenkrát viac ako predchádzajúca). V prípade, že takáto báza spĺňa podmienku symetrie párných sekvencií oproti stredu, dá sa z nej konštruovať LOT presne podľa Malvarovho algoritmu. Takéto vlastnosti z publikovaných LOT majú DCT II [88], [91], [93], [90], MHT, DLT, DST [91], ale aj WST, SST a DCT I, z ktorých sú v tejto knihe Malvarovým algoritmom konštruované ich prekrývajúce transformačné matice.

Ďalej ukázaná konštrukcia prekrývajúcej transformačnej matice je zovšeobecnením Malvarovho algoritmu pre všetky blokové ortogonálne transformácie bez ohľadu na splnenie podmienky symetrie báзовých funkcií s párnou sekvenciou. Potom platí celý Malvarov algoritmus tak, že matica \mathbf{K}_e je konštruovaná z ľubovoľne vybraných $N/2$ báзовých funkcií a matica \mathbf{K}_o zo zvyšných $N/2$ báзовých funkcií pôvodnej ortogonálnej bázy. Začiatočná a koncová transformačná submatice je tvorená takto

$$\mathbf{U}_Z^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{N/2} \mathbf{U}^T & \sqrt{2}^{N/2} \mathbf{U}^T \\ \mathbf{J}_N \cdot (\mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T) & -\mathbf{J}_N \cdot (\mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T) \end{pmatrix}, \quad (2.124)$$

$$\mathbf{U}_K^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T & \mathbf{K}_e^T - \mathbf{K}_o^T \\ \sqrt{2} \mathbf{J}_{\frac{N}{2}} \cdot {}^{N/2} \mathbf{U}^T & -\sqrt{2} \mathbf{J}_{\frac{N}{2}} \cdot {}^{N/2} \mathbf{U}^T \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

kde ${}^{N/2} \mathbf{U}$ je transformačná matica rovnakého typu transformácie ako matica, z ktorej sú získané matice \mathbf{K}_e a \mathbf{K}_o , ale polovičného rozmeru, teda $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$.

Konštrukciou podľa zovšeobecného postupu sa dá napríklad vytvoriť LOT pre transformácie: HT a DHYT, ktoré nespĺňajú podmienky pre konštrukciu Malvarovým algoritmom. Výsledky pre AR(1) a rôzne ρ z novovytvorených LOT (DCT I, SST, WST, HT a DHYT 2) sú uvedené v [tabuľke 2](#) v závere kapitoly spolu s výsledkami zo známych LOT (DCT II, MHT, DST a DLT) a výsledkami z použitia blokových transformácií v neprekrývajúcom tvare. Všetky výsledky sú získané suboptimálnou podľa [časti 2.9.2](#).

2.9.2 Rýchly algoritmus LOT

Nájdenie rýchlych algoritmov pre transformačné matice \mathbf{U}_0 , \mathbf{U}_z a \mathbf{U}_k je triviálne, ak existujú rýchle algoritmy pre transformačnú maticu \mathbf{U} , z ktorej boli odvodené. Pre názornosť sú však v maticovom zápise uvedené na konci tejto kapitoly spolu.

Dôležité je však pre nás nájsť dostatočne rýchly algoritmus pre

1. výpočet vlastných vektorov matice \mathbf{R}_y ,
2. pre výpočet transformácie $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{U}$.

Ako návod je ďalej uvedená Jacobiho metóda [112] výpočtu vlastných čísel a vlastných vektorov pre symetrické matice. Uvidíme, že jej algoritmus výpočtu vlastných čísel nás v našom prípade môže priviesť k matici \mathbf{Z} v dostatočnej presnosti pri existencii rýchleho transformačného algoritmu. Tento algoritmus priamo vychádza z postupu výpočtu vlastných čísel Jacobiho [112], [87], [100], [101] prípadne Givensovou [112] metódou a je náramne podobný tzv. "motýlikovému diagramu" pri iných transformáciách.

2.9.2.1 Jacobiho metóda

Jacobiho metóda vychádza z toho, že k symetrickej matici existuje taká ortogonálna matica, že platí

$$\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{D}, \quad (2.126)$$

kde \mathbf{D} je diagonálna matica, ktorá má na diagonále vlastné čísla matice \mathbf{R}_y . Jacobiho metóda je založená na nájdení postupnosti ortogonálnych matic $\{\mathbf{G}_k\}$, pre ktorú platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \dots \mathbf{G}_k = \mathbf{Z}. \quad (2.127)$$

Zavedme označenie

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{G}_k^T \cdot \mathbf{G}_{k-1}^T \dots \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 \dots \mathbf{G}_k, \quad (2.128)$$

kde

Prvky matice \mathbf{T}_k označme $^{(k)}t_{ij}$ a prvky matice $\mathbf{T}_0 = \mathbf{R}_y$ ne $^{(k)}g_{ij}$.

Dá sa odvodiť [112]:

Nech $^{(k-1)}t_{pq}$ je nenulový prvok matice \mathbf{T}_{k-1} . Chceme zostrojiť maticu \mathbf{G}_k tak, aby platilo $^{(k)}t_{pq} = 0$. Urobíme to tak, že prvky matice \mathbf{G}_k zo vzťahov

$$^{(k)}g_{pp} = ^{(k)}g_{qq} = \cos \Theta_k, \quad ^{(k)}g_{ii} = 1, \quad \text{pre } i \neq p \text{ a } i \neq q, \quad (2.129)$$

$$^{(k)}g_{pq} = - ^{(k)}g_{qp} = \sin \Theta_k, \quad ^{(k)}s_{ij} = 0, \quad \text{inak,}$$

kde uhol Θ_k zvolíme tak, aby platilo $^{(k)}t_{pq} \rightarrow 0$.

Ortogonálna matica \mathbf{G}_k definovaná rovnicami (2.129) sa nazýva *maticou rovinnej rotácie*, pretože lineárna transformácia definovaná maticou \mathbf{G}_k predstavuje otočenie p -tej a q -tej súradnicovej osi o uhol Θ_k . Z (2.128) vyplýva

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{G}_k^T \cdot \mathbf{T}_{k-1} \cdot \mathbf{G}_k \quad (2.130)$$

a použitím rovníc (2.129) dostaneme

$$\begin{aligned} ^{(k)}t_{pj} &= ^{(k-1)}t_{pj} \cos \Theta_k - ^{(k-1)}t_{qj} \sin \Theta_k, \\ ^{(k)}t_{qj} &= ^{(k-1)}t_{pj} \sin \Theta_k + ^{(k-1)}t_{qj} \cos \Theta_k, \\ &\text{pre } j \neq p, j \neq q, \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} ^{(k)}t_{ip} &= ^{(k-1)}t_{ip} \cos \Theta_k - ^{(k-1)}t_{iq} \sin \Theta_k, \\ ^{(k)}t_{iq} &= ^{(k-1)}t_{ip} \sin \Theta_k + ^{(k-1)}t_{iq} \cos \Theta_k, \\ &\text{pre } i \neq p, i \neq q, \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned}
^{(k)}t_{pp} &= ^{(k-1)}t_{pp}\cos^2\Theta_k + ^{(k-1)}t_{qq}\sin^2\Theta_k - 2 \cdot ^{(k-1)}t_{pq}\sin\Theta_k\cos\Theta_k, \\
^{(k)}t_{qq} &= ^{(k-1)}t_{pp}\sin^2\Theta_k + ^{(k-1)}t_{qq}\cos^2\Theta_k + 2 \cdot ^{(k-1)}t_{pq}\sin\Theta_k\cos\Theta_k, \\
^{(k)}t_{pq} &= ^{(k)}t_{qp} = (^{(k-1)}t_{qp} - ^{(k-1)}t_{qq})\sin 2\Theta_k + ^{(k-1)}t_{pq}\cos 2\Theta_k, \\
^{(k)}t_{ij} &= ^{(k-1)}t_{ij},
\end{aligned} \tag{2.133}$$

$$\text{pre } i \neq p, j \neq q. \tag{2.134}$$

Pre vyriešenie problému vynulovania nenulového nediagonálneho prvku nám stačí potom určiť uhol Θ_k . Z rovnice (2.133) vyplýva

$$\operatorname{tg}(2\Theta_k) = -\frac{^{(k-1)}t_{pq}}{\frac{1}{2}[^{(k-1)}t_{pp} - ^{(k-1)}t_{qq}]}, \tag{2.135}$$

takže uhol Θ_k s požadovanou vlastnosťou vždy existuje. V praxi sa však nezvykne počítať uhol Θ_k , ale koeficienty rovníc (2.133), teda $\sin\Theta_k$ a $\cos\Theta_k$, lebo uhol Θ_k sa v týchto rovniciach vyskytuje len prostredníctvom týchto funkcií a pri programovej alebo hardvérovej realizácii algoritmu je lepšie nahradiť výpočet goniometrických funkcií výpočtovo menej náročnou funkciou. Dá sa odvodiť [112], [87]

$$\text{pre } \alpha = -^{(k-1)}t_{pq} \tag{2.136}$$

$$\text{a } \mu = \frac{1}{2} [^{(k-1)}t_{pp} - ^{(k-1)}t_{qq}] \tag{2.137}$$

$$\text{platí } \cos\Theta_k = \left(\frac{v + |\mu|}{2v} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.138}$$

$$\sin\Theta_k = \frac{\operatorname{sgn}(\mu)\alpha}{2v\cos\Theta_k}, \tag{2.139}$$

$$\text{kde } v = (\alpha^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.140}$$

Postup sa dá teda opísať takto: v každom kroku Jacobiho metódy

1. zvolíme nenulový nediagonálny prvok;
2. vypočítame $\sin\Theta_k$ a $\cos\Theta_k$ z rovníc (2.138 a 2.139),
3. z rovníc (2.131-2.133) vypočítame tie prvky matice \mathbf{T}_k , ktoré sa líšia od prvkov matice \mathbf{T}_{k-1} .

Je samozrejmé, že nediagonálny prvok, ktorý sme vynulovali, sa môže stať v niektorej z nasledujúcich fáz iterácie nenulovým.

Ako veličinu vyjadrujúcu presnosť iterácie zavedieme *výstupnú diagonálnu kvalitu* definovanú vzťahom [87]

$$^{(k)}S = \sqrt{\varepsilon \left[\|\mathbf{T}\|_{\text{off}}^2 - \sum_{i=0}^{N-1} (^{(k)}t_{ii})^2 \right]}, \tag{2.141}$$

kde

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\operatorname{tr}[\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T]} \tag{2.142}$$

a

$$\operatorname{tr}[\mathbf{T}] = \sum_{i=0}^{N-1} t_{ii}.$$

Pre nás najdôležitejším produktom tejto metódy bude transformačná matica, ktorá má bázu ortogonálnych funkcií vlastné vektory matice \mathbf{R}_y alebo aspoň jej k -te priblíženie (podľa požadovaného stupňa dekorácie). Prepíšme rovnicu (2.128)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_k &= \mathbf{U}_k^T \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{U}_k, \\
\mathbf{U}_k &= \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_k,
\end{aligned} \tag{2.143}$$

kde (2.144)

teda (2.145)

a pomocou rovníc (2.129) môžeme potom počítať prvky transformačnej matice $\mathbf{U}_{k-1} = \{(^{k-1})u_{ij}\}$ rekurentne

$$\begin{aligned} (^k)u_{ip} &= (^{k-1})u_{ip} \cos \Theta_k - (^{k-1})u_{iq} \sin \Theta_k, \\ (^k)u_{iq} &= (^{k-1})u_{ip} \sin \Theta_k + (^{k-1})u_{iq} \cos \Theta_k, \\ (^k)u_{ij} &= (^{k-1})u_{ij}, \text{ pre } j \neq p \text{ a } j \neq q. \end{aligned} \quad (2.146)$$

2.9.2.2 Aproximácia transformačnej matice Z LOT

S odvolaním sa na časť 2.9.1, 2.9.2.2 a [91], môžeme s dostatočnou presnosťou aproximovať maticu \mathbf{Z} z rovnice (2.118) vďaka tvaru a diagonálnym prvkom matice \mathbf{R}_y takto

$$\mathbf{Z} \cong \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Z}}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.147)$$

kde matice $\tilde{\mathbf{Z}}_i$ a $\mathbf{0}$ sú matice s rozmerom $N/2 \times 1$.

Podľa [91] sú dostatočne presné pre rozmer $N \leq 16$, ak sa vypočítajú takto

$$\tilde{\mathbf{Z}}_1^T = \mathbf{G}_{N/2-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{G}_1, \quad (2.148)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_2^T = \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_{N/2-1}, \quad (2.149)$$

kde

$$\mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}(\Theta_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N/2-(k+1)} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{Y}(\Theta_k) = \begin{pmatrix} \cos \Theta_k & \sin \Theta_k \\ -\sin \Theta_k & \cos \Theta_k \end{pmatrix}.$$

Ostáva už len nájsť uhly Θ_k pre dostatočnú dekoreláciu matice \mathbf{R}_y . Pre rôzne diskkrétne ortogonálne transformácie sú v [88], [89] (DCT) [91] (DCT, DST, DLT, MHT) uvedené aj optimálne uhly Θ_k pre AR(1) model a $\rho = 0,95$, nie je však uvedené akou metódou sú získané. Jacobiho metóda výpočtu vlastných čísel vedie k podobnej aproximácii transformačnej matice \mathbf{Z} (pozri (2.142)), ale dáva väčšiu možnosť pri nárokoch na stupeň dekorelácie korelačnej matice \mathbf{R}_y a vedie k jednodušanému výpočtu rotačných uhlov pre koeficienty motýlikového algoritmu. Dáva možnosť adaptability systému na požadovanú veľkosť energetickej kompaktie signálu (G_{TC}). Pre Jacobiho metódu a rôzne jej modifikácie [100], [101] v súčasnosti existuje mnoho algoritmov s rýchlou iteráciou a sú ešte stále záujmovou oblasťou tvorcov rýchlych algoritmov.

Ak sme teda vyriešili rýchlosť transformačného algoritmu prislúchajúceho transformačnej matici \mathbf{Z} , môžeme prepísať transformačný postup pri transformácii maticou \mathbf{U}_0 takouto postupnosťou matic [91]

$$\mathbf{U}_0^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_e^T & \mathbf{K}_o^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_e^T & \mathbf{K}_o^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \end{pmatrix}. \quad (2.150)$$

V tabuľke 2.9.1 sú uvedené uhly pre motýle transformačnej matice \mathbf{Z} vypočítané Jacobiho metódou pre autokorelačnú maticu AR(1) modelu s prediktorom 0,95 pre rôzne LOT. Výpočet bol robený s jednoduchou presnosťou. Pre rozmerovo väčšie matice je však potrebná pre výpočet uhlov rotačnej matice aspoň dvojnásobná presnosť [112].

Samozrejme, možné sú aj iné optimalizácie LOT. Niektoré z nich sú uvedené v [89]. Nevedú síce k úplne ortogonálnym maticiam, ale napr. pre kompresiu s veľmi veľkým kompresným pomerom nimi spôsobená chyba je oproti chybe degradovaním zanedbateľná. Tieto metódy vedú k výpočtu vlastných vektorov trojuholníkových matic, pre ktoré tiež existuje množstvo rýchlych algoritmov, napr. [100], [101], [87].

V súčasnosti existuje niekoľko modifikácií LOT s väčšími prekryvmi, ktoré sú tvorené viacpásmovou filtráciou. Spomeňme aspoň modulované LOT (MLT) [89] a ich najpoužívanejšie zovšeobecnenie ELT (extended LOT) [89], [93] a hierarchické LOT (HLT) [89]. Tieto sa používajú hlavne pri spracovaní rečových signálov vo veľkých dávkach (nad 128), kedy je výhodou hlavne rýchlosť algoritmu a veľký transformačný zisk. Špeciálne HLT sú výhodné pri použití waveletových transformácií, pretože používajú filtre, ktoré lepšie vyjadrujú subpásmový charakter waveletových transformácií. Pre kódovanie obrazu je výhodné použitie ELT miesto LOT napr. pri paketových prenosoch (napr. v ATM sieťach), pretože pri strate alebo chybovosti paketov svojim subpásmovým charakterom sú schopné zachovať viac informácie potrebnej pre rekonštrukciu chýbajúcich blokov obrazu [93].

Tabuľka 2.9.1

Uhly rotačných submatic \mathbf{Y} pre výpočet transformačnej matice \mathbf{Z} LOT vypočítané Jacobiho metódou výpočtu vlastných čísel symetrických matic

DOT	\mathbf{Z}_1			\mathbf{Z}_2		
	Θ_1 / π	Θ_2 / π	Θ_3 / π	Θ_1 / π	Θ_2 / π	Θ_3 / π
DCT II	0,000035	0,000094	0,00197	0,1215	0,1483	0,06918
DST	-0,1192	-0,1468	-0,1041	0,01627	0,05170	0,03733
DCT I	-0,2222	-0,2203	-0,04175	0,08693	0,07750	0,00326
DLT	0,08296	0,07726	0,00479	0,1199	0,1745	0,1553
MHT	-0,06067	-0,1205	-0,1525	-0,0349	0,03235	0,04667
DHYT 2	-0,06185	-0,09200	-0,01587	0,1351	-0,02174	-0,05342
N12	-0,01476	-0,04628	0,00183	0,1142	0,1460	0,07266
SST	-0,000001	-0,05330	0,00467	0,1121	0,06686	0,03326
HT	0,2237	0,000054	0,00447	0,111	-0,2439	-0,00067
WST	-0,1206	-0,05697	-0,00757	0,12102	0,1827	0,1314

Tabuľka 2.9.2

Získ transformačného kódéra pre rôzne DOT a LOT. Matica **Z** LOT je vypočítaná s rotačnými uhlami podľa [tabuľky 2.9.1](#) tejto kapitoly

VSTUP ρ	1D DOT N=8					
	DCT II	DST	DLT	MHT	DHYT	DCT I
0,95	6,6310	4,8773	6,3719	4,4120	6,0635	6,1174
0,85	3,0385	2,6423	2,9354	2,4439	2,6094	2,8685
0,75	2,0357	1,9379	1,9714	1,8491	1,8500	1,9973
0,65	1,5967	1,5742	1,5526	1,5338	1,5086	1,5894

VSTUP ρ	1D DOT N=8				
	ST	HT	ST(HT)	ST(DST)	ST(MHT)
0,95	6,3143	6,2265	6,5963	5,5408	5,4016
0,85	2,9151	2,5887	2,6887	2,5472	2,5472
0,75	1,9604	1,7994	1,8433	1,8433	1,8433
0,65	1,5463	1,4564	1,4777	1,5091	1,5091

VSTUP r	1D DOT N=8				
	ST(DCT)	N(DCT)02	N11	N12	N22
0,95	6,3445	6,4548	6,3905	6,4542	6,4553
0,85	2,9287	2,9805	2,9486	2,9807	2,9844
0,75	1,9697	2,0026	1,9817	2,0028	2,0049
0,65	1,5532	1,5747	1,5608	1,5750	1,5762

VSTUP ρ	LOT 8x16					
	DCT II	DCT I	SST	DHYT 2	HT	N12
0,95	8,3098	6,9845	6,7960	6,6762	6,3282	8,0073
0,85	3,2619	3,1794	3,0808	2,8673	2,5674	3,1575
0,75	2,1540	2,1083	2,0477	1,9950	1,7648	2,0938
0,65	1,6676	1,6380	1,5974	1,5935	1,4241	1,6279

VSTUP ρ	LOT 8x16		
	DST	DLT	MHT
0,95	8,3081	8,1806	8,2762
0,85	3,2638	3,2365	3,2626
0,75	2,1538	2,1439	2,1561
0,65	1,6664	1,6620	1,6688

Poznámka

Transformácie ST(+++) a N++ sú definované v [kap. 2.8](#)

2.10 INTERPOLÁCIA OBRAZU DISKRÉTNymi ORTOGONÁLnymi TRANSFORMÁCIAMI

2.10.1 Diskrétna Fourierova transformácia

2.10.1.1 Jednorozmerná interpolácia doplnením spektra nulami

Pri 1D DFT je vlastnosť interpolácie signálu dostatočne známa a opísaná v základných učebniciach o spracovaní signálov, napr. [50]. Postup je zrejmý z (2.151) [opravený vzťah zo 110].

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$Y(l) = X(l),$$

pre

$$l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$Y\left(BN - \frac{N}{2} + l\right) = X\left(\frac{N}{2} + l\right),$$

pre

$$l = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$Y(k) = 0,$$

pre

$$l = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, BN - \frac{N}{2} - 1$$

a

$$Y\left(\frac{N}{2}\right) = Y\left(BN - \frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2}X\left(\frac{N}{2}\right). \quad (2.151)$$

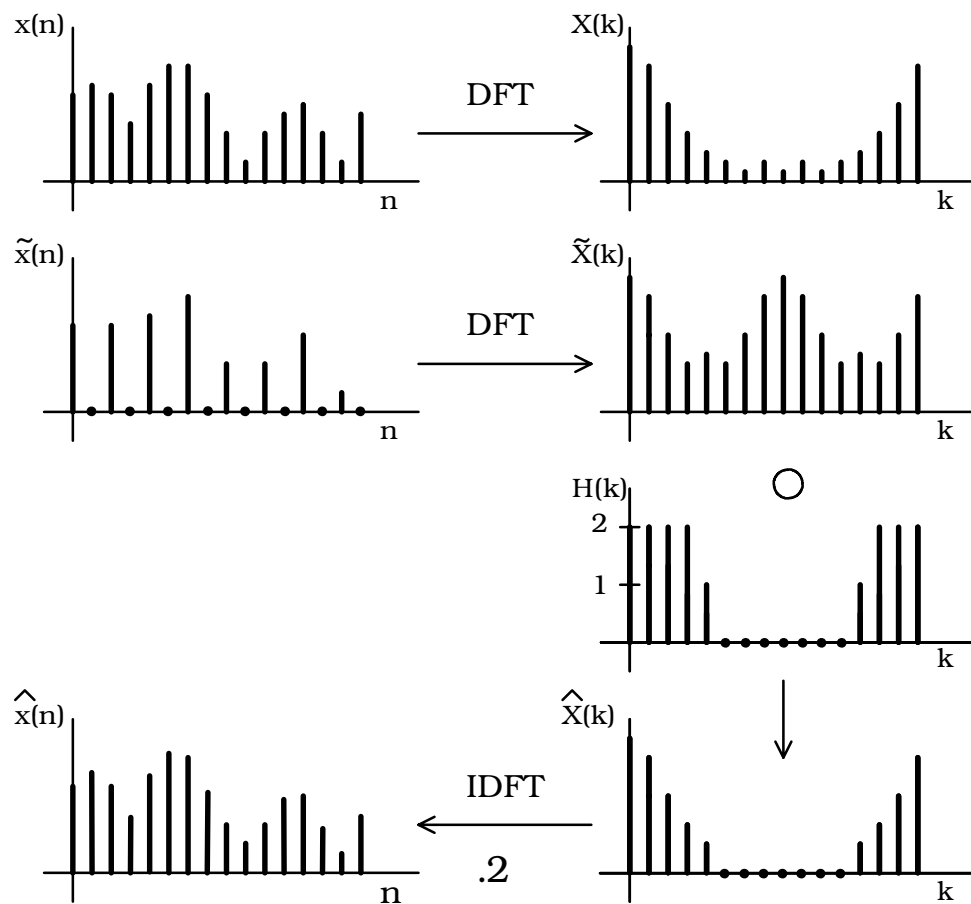
Potom

$$y(m) = B \cdot \sum_{l=0}^{BN-1} Y(l) \cdot e^{i \frac{2\pi lm}{BN}},$$

$$m = 0, 1, \dots, BN - 1.$$

2.10.1.2 Interpolácia prestriedaním nulami a filtráciou

Princíp zrkadlenia spektra signálu prestriedaného nulami a následná dolnopriepustná filtrácia je ukázaná na obr. 2.14. Pri podvzorkovaní vyšších rádov je táto schéma len vyjadrením viacnásobného opakovania tohoto postupu.



Obr. 2.14 Interpolačná vlastnosť DFT pri podvzorkovaní 1D signálu

V dvojrozmernom prípade môžeme sledovať viac spôsobov prestriedania nulami, najčastejšie však podľa [72], kedy hovoríme o interpolácii n -tého rádu. Pre nás najpotrebnejším je sledovanie správania sa transformácie pri interpoláciách (podvzorkovaní) 1. a 2. rádu. Na obr. 2.15 je znázornený postup interpolácie pri prestriedaní 1. rádu nulami. Ide podobne ako pri 1D prípade o dolnopriepustnú filtráciu a s tým spojené interpolovanie chýbajúcich signálových vzoriek.

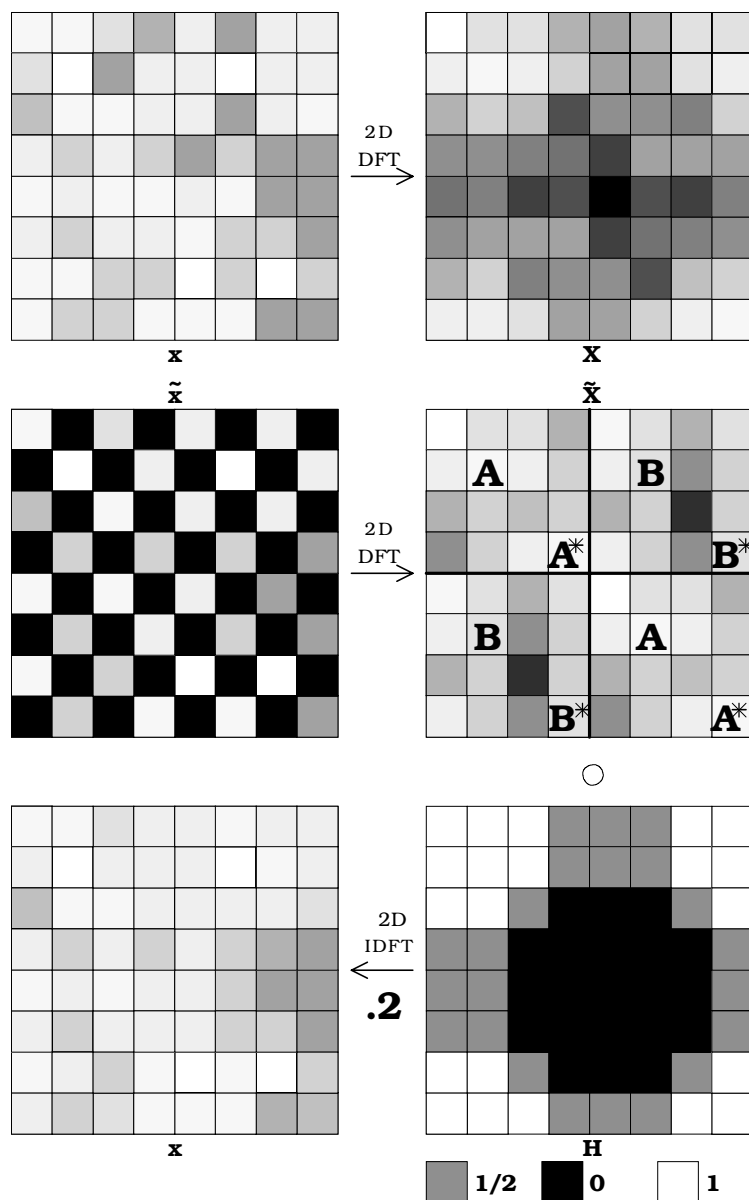
Pri interpoláciách prestriedaním nulami je dôležité:

1. Zistiť správanie sa transformácie pri prestriedaní nulami z hľadiska vlastnosti zrkadlenia spektra.

2. Nájsť správnu prenosovú funkciu filtra.

3. Zvoliť optimálnu veľkosť interpolovaného bloku.

V nasledujúcich častiach sú ukázané vlastnosti v práci použitých blokových diskretných ortogonálnych transformácií pri obraze prestriedanom nulami 1. rádu na príklade obrazu veľkosti 8 x 8.



Obr. 2.15 Interpolácia podvzorkovaného obrazu pomocou 2D DFT

2.10.2 Diskrétna cas-cas transformácia

2.10.2.1 Interpolácia 1D DHYT doplnením spektra nulami

Postup interpolácie je podobný ako pri DFT. Iná je len interpolačná funkcia, ktorá je totožná s bázou DHYT. Potom (2.151) má zmenu len v začiatočnom a konečnom kroku [opravený vzťah zo 110].

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$y(m) = B \cdot \sum_{l=0}^{BN-1} Y(l) \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi ml}{BN}\right) + \sin\left(\frac{2\pi ml}{BN}\right) \right],$$

$$m = 0, 1, \dots, BN-1. \quad (2.152)$$

2.10.2.2 Interpolácia prestriedaním nulami DCCT v pôvodnom usporiadaní bázových funkcií DHYT - bázy

2D interpoláciu prestriedaním nulami ukážeme v celej kapitole pre [obr. 2.15](#)

10	0	10	0	50	0	50	0
0	10	0	10	0	50	0	50
10	0	10	0	50	0	50	0
0	10	0	10	0	50	0	50
100	0	100	0	200	0	200	0
0	100	0	100	0	200	0	200
100	0	100	0	200	0	200	0
0	100	0	100	0	200	0	200

Obr. 2.15 Segment obrazu, kde úroveň jasu je vyjadrená číslami

Zaokrúhlené spektrum po 2D DCCT

45	-15	-1	-7	0	-3	-1	6
-26	5	0	1	-5	1	0	-2
-1	0	0	-1	-1	0	0	-1
-11	1	-1	1	10	-2	-1	-2
0	-3	-1	6	45	-15	-1	-7
-5	1	0	-2	-26	5	0	1
-1	0	0	-1	-1	0	0	-1
10	-2	-1	-2	-11	1	-1	1

Spektrum sa dá opísať rovnicou

$$\mathbf{Y}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad (2.153)$$

kde \mathbf{Y}_N je matica rozmeru $N \times N$ a \mathbf{A} a \mathbf{B} sú matice rozmeru $N/2 \times N/2$.

Zvoľme nasledujúcu prenosovú funkciu filtra, ktorá vyjadruje doplnenie spektra nulami pre obraz s polovičnou plochou. Prenosová funkcia filtra pre obraz 8×8 **typ 1** je

1	1	1	0,5	0,5	0,5	1	1
1	1	1	0,5	0,5	0,5	1	1
1	1	0,5	0	0	0	0,5	1
0,5	0,5	0	0	0	0	0	0,5
0,5	0,5	0	0	0	0	0	0,5
0,5	0,5	0	0	0	0	0	0,5
1	1	0,5	0	0	0	0,5	1
1	1	1	0,5	0,5	0,5	1	1

Prenosovú funkciu typu 1 pre obraz $N_1 \times N_2$ opíšeme rovnicou

$$\mathbf{H}_{N_1 \times N_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}\right)\left(\frac{N_2}{2}-1\right)} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \dots & & & & \dots & \mathbf{1} \\ \vdots & & 0,5 & \mathbf{0}_{(1)\left(\frac{N_2}{2}-1\right)} & 0,5 & & \vdots \\ 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{2}-1\right)\left(\frac{N_2}{4}\right)} & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}-1\right)(1)} & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}-1\right)\left(\frac{N_2}{2}-1\right)} & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}-1\right)(1)} & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{2}-1\right)\left(\frac{N_2}{4}-1\right)} & & \\ \vdots & 0,5 & \mathbf{0}_{(1)\left(\frac{N_2}{2}-1\right)} & 0,5 & & & \vdots \\ \mathbf{1} & \dots & & & & \dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}-1\right)\left(\frac{N_2}{2}-1\right)} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (2.154)$$

kde $\mathbf{H}_{N_1 \times N_2}$ je matica s rozmerom $N_1 \times N_2$ a $\mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}\right)\left(\frac{N_2}{2}-1\right)}$ je matica s rozmerom $(N_1 / 4) \times [(N_2 / 2) - 1]$ obsahujúca samé jednotky. Rekonštruovaným obrazom nazveme obraz, ktorý vznikne po vykonaní nasledujúcej operácie

$$\mathbf{y}_{N_1 \times N_2} = 2 \cdot (\mathbf{U}_{N_1})^T \cdot (\mathbf{H}_{N_1 \times N_2} \circ \mathbf{Y}_{N_1 \times N_2}) \cdot \mathbf{U}_{N_2}, \quad (2.155)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{H} \circ \mathbf{Y}$$

je Hadamardov súčin [95], pre ktorý platí

$$Y_{ij} = H_{ij} \cdot Y_{ij}$$

Rekonštruovaný obraz z obr. 2.15 po (2.155) potom je

10	29	10	43	50	92	50	78
11	10	-3	10	25	50	39	50
10	-3	10	11	50	39	50	25
43	10	29	10	78	50	92	50
100	68	100	103	200	173	200	138
135	100	99	100	191	200	226	200
100	99	100	135	200	226	200	191
103	100	68	100	138	200	173	200

Obr. 2.15 po rekonštrukcii pomocou 2D DFT je

10	28	10	42	50	91	50	77
10	10	-4	10	24	50	38	50
10	-4	10	10	50	38	50	24
42	10	28	10	77	50	91	50
100	67	100	102	200	172	200	137
134	100	98	100	190	200	225	200
100	98	100	134	200	225	200	190
102	100	67	100	137	200	172	200

2.10.2.3 Interpolácia prestriedaním nulami pomocou DCCT 2

Zaokrúhlené spektrum obrazu z obr. 2.15 je

45	-15	6	-1	-1	-7	-3	0
-26	5	-2	0	0	1	1	-5
10	-2	1	-1	-1	-2	1	-11
-1	0	-1	0	0	-1	0	-1
-1	0	-1	0	0	-1	0	-1
-11	1	-2	-1	-1	1	-2	10
-5	1	1	0	0	-2	5	-26
0	-3	-7	-1	-1	6	-15	45

Spektrum môžeme opísať vzťahom

$$\mathbf{Y}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{J}_{N/2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_{N/2} & \mathbf{J}_{N/2} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_{N/2} \end{pmatrix}. \quad (2.156)$$

Prenosovou funkciou filtra **typ 2** nazveme maticu

1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5
1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5
1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5
1	1	1	0,5	0,5	0	0	0
1	1	1	0,5	0,5	0	0	0
0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0
0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0
0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0

Prenosovú funkciu typu 2 definujeme pre obraz $N \times N$ rovnicou

$$\mathbf{H}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\frac{N}{2}-1} & \mathbf{1}_{\left(\frac{N}{2}-1\right)(2)} & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\frac{N}{2}-1} \\ \mathbf{1}_{(2)\left(\frac{N}{2}-1\right)} & 0,5 & 0,5 & \mathbf{0}_{(2)\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ & 0,5 & 0,5 & \\ & & & \\ 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\frac{N}{2}-1} & \mathbf{0}_{\left(\frac{N}{2}-1\right)(2)} & \mathbf{0}_{\frac{N}{2}-1} \end{pmatrix}. \quad (2.157)$$

Rekonštruovaný obr. 2.15 po vykonaní operácie (2.155) s prenosovou funkciou (2.157) pomocou DCCT 2 je

10	29	10	43	50	92	50	78
11	10	-3	10	25	50	39	50
10	-3	10	11	50	39	50	25
43	10	29	10	78	50	92	50
100	68	100	103	200	173	200	138
135	100	99	100	191	200	226	200
100	99	100	135	200	226	200	191
103	100	68	100	138	200	173	200

2.10.3 Diskrétna sínusová transformácia

2.10.3.1 Interpolácia 1D DST doplnením spektra nulami

Podľa [opravený vzťah zo 110] platí tento postup pre interpoláciu pomocou DST (v literatúre DST 1):

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \sin \left[(n+1)(k+1) \frac{\pi}{N+1} \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$Y(l) = X(l),$$

pre $l = 0, 1, \dots, N-1,$

$$Y(l) = 0,$$

pre

$$l = N, N+1, \dots, BN-1. \quad (2.158)$$

Potom

$$y(m) = B \cdot \sum_{l=0}^{BN-1} Y(l) \cdot \sin \left[(m+1)(l+1) \frac{\pi}{BN+1} \right].$$

Dá sa dokázať, že táto konštrukcia neinterpoluje.

2.10.3.2 Interpolácia prestriedaním nulami pomocou DST

Pre 1D interpoláciu platí (2.158) pre postupnosť $x(m)$ z $x(n)$ vytvorenú z

$$x(n) = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\},$$

vytvoríme

$$x(m) = \{x(0), \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \dots, \overset{B-1}{0}, x(1), \overset{1}{0}, \dots, \overset{B-1}{0}, x(2), \dots\},$$

tzn.

$$x(m) = \begin{cases} x(n) & \text{pre } m = Bn \\ 0 & \text{inak} \end{cases},$$

potom

$$X(l) = \frac{1}{BN} \sum_{m=0}^{BN-1} x(m) \cdot \sin \left[(m+1)(l+1) \frac{\pi}{BN+1} \right],$$

$$l = 0, 1, \dots, BN-1 \quad (2.159)$$

Ďalej platí postup (2.158).

Interpolácia 2D je zložitejšia. Pre interpoláciu 1. rádu (neseparovateľné podvzorkovanie [95]) navrhujeme použiť postup s prestriedaním nulami a filtráciu podľa nasledujúceho príkladu. Naďalej budeme používať [obr. 2.15](#) z [kapitoly 2.10.2](#). Zaokrúhlené 2D DST spektrum je

71	-28	12	2	10	-7	2	11
-48	12	-16	-1	-7	5	-5	2
21	-10	7	-2	2	-8	5	-14
3	-1	-1	1	0	2	-4	10
10	-4	2	0	1	-1	-1	3
-14	5	-8	2	-2	7	-10	21
2	-5	5	-7	-1	-16	12	-48
11	2	-7	10	2	21	-28	71

Spektrum má rozloženie spektrálnych zložiek podľa (2.156).

Prenosovou funkciou filtra **typu 3** nazveme maticu, ktorá napr. pre obraz 8 x 8 vyzerá takto

$$\mathbf{H}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.160)$$

Alebo po zohľadnení neseparovateľnej symetrickej spektra (okolo obrátenej diagonály) môžeme uvažovať aj nasledujúcu funkciu filtra, čo je výhodné hlavne pri pravouhlých transformáciách. Nazveme ju prenosovou funkciou **typu 4**.

$$\mathbf{H}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.161)$$

Rekonštruovaný obraz po filtrácii **3.typom** prenosovej funkcie podľa rovnice (2.155):

10	0	10	32	50	59	50	30
24	10	6	10	24	50	59	50
10	-1	10	26	50	59	50	48
20	10	-1	10	49	50	32	50
100	124	100	119	200	217	200	177
88	100	66	100	190	200	200	200
100	23	100	132	200	193	200	202
82	100	77	100	165	200	227	200

Rekonštruovaný obraz po filtrácii **4.typom** prenosovej funkcie podľa rovnice (2.155):

10	11	10	17	50	45	50	36
13	10	9	10	53	50	67	50
10	-4	10	9	50	36	50	34
35	10	16	10	61	50	61	50
100	95	100	107	200	200	200	162
101	100	89	100	207	200	203	200
100	115	100	103	200	189	200	213
76	100	90	100	180	200	215	200 .

2.10.4 Interpolácia modifikovanou diskretnou Hermitovou transformáciou

Prípad 1D je rovnaký ako pri použití DST, len interpolačná funkcia je báza MHT. Pre [obr. 2.15](#) je spektrum po 2D MHT

70	-29	33	-1	13	-4	0	15
-50	13	-25	1	-11	5	-4	0
33	-15	17	-5	7	-11	5	-12
-4	1	-4	2	-2	7	-6	13
13	-6	7	-2	2	-4	1	-4
-12	5	-11	7	-5	17	-15	33
0	-4	5	-11	1	-25	13	-50
15	0	-4	13	-1	33	-29	70 .

Spektrum má rozloženie spektrálnych zložiek podľa (2.156).

Prenosová funkcia filtra **typ 3** - rekonštruovaný obraz

10	-3	10	37	50	52	50	31
30	10	2	10	22	50	71	50
10	-4	10	36	50	54	50	29
22	10	-4	10	37	50	51	50
100	119	100	132	200	219	200	164
106	100	58	100	179	200	202	200
100	109	100	149	200	196	200	200
84	100	84	100	149	200	234	200 .

Typ filtra 4 - rekonštruovaný obraz

10	14	10	19	50	50	50	40
13	10	6	10	53	50	65	50
10	-8	10	10	50	27	50	27
40	10	22	10	63	50	82	50
100	88	100	106	200	193	200	145
109	100	84	100	205	200	206	200
100	114	100	118	200	192	200	218
75	100	86	100	167	200	216	200 .

2.10.5 Interpolácia IDCT II (DCT III)

DCT II nemá vlastnosť interpolácie doplnením nulami ako DST, ale má túto vlastnosť, ak je použitá ako dopredná transformácia inverzná transformácia časovej postupnosti (vektora, matice) (potom ide o transformáciu DCT III); potom pre

$$X(k) = \frac{1}{N} c_k \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \cos \left[(2k+1)n \frac{\pi}{2N} \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$
(2.162)

platí postup (2.158) a výsledný interpolovaný signál je

$$y(m) = \sum_{l=0}^{BL-1} c_k Y(l) \cdot \cos \left[(2l+1)m \frac{\pi}{2(BN)} \right],$$

$$m = 0, 1, \dots, BN-1.$$
(2.163)

Pre signál prestriedaný nulami platí postup rovnaký ako pre DST, len s bázovými funkciami IDCT II. Takto modifikujeme postup DST-2D-interpolácie prestriedaním nulami na rovnaký, len s bázovými funkciami IDCT II. Pre [obr. 2.15](#) potom 2D IDCT II - spektrum je

55	-42	19	0	8	-7	-3	11
-64	37	-21	2	-10	6	-4	-5
26	-19	10	-4	4	-8	9	-14
2	0	-2	1	-1	3	-8	11
11	-8	3	-1	1	-2	0	2
-14	9	-8	4	-4	10	-19	26
-5	-4	6	-10	2	-21	37	-64
11	-3	-7	8	0	19	-42	55

Po filtrácii filtrom **tretieho typu** dostaneme rekonštruovaný [obr. 2.15](#)

10	13	10	32	50	44	50	31
8	10	-8	10	42	50	69	50
10	23	10	16	50	45	50	41
-6	10	-1	10	61	50	43	50
100	141	100	112	200	206	200	171
74	100	64	100	198	200	207	200
100	132	100	131	200	186	200	199
80	100	72	100	169	200	230	200

Po filtrácii filtrom **4. typu** rekonštruovaný [obr. 2.15](#) je

10	7	10	7	50	33	50	34
14	10	14	10	67	50	74	50
10	1	10	5	50	30	50	31
20	10	10	10	62	50	63	50
100	115	100	111	200	200	200	161
85	100	79	100	204	200	203	200
100	126	100	110	200	190	200	213
76	100	82	100	179	200	216	200

2.10.6 2D interpolácia 1. rádu - záver

Z predchádzajúcich častí a ďalších pokusov s 2D DOT môžeme zostaviť nasledujúcu tabuľku

Tabuľka 2.10.1

Interpoláčnne vlastnosti DOT pri transformácii signálu prestriedaného nulami (podvzorkovanie 1. rádu)

2D DOT	DCT II	DCCT	DFT	DCCT2	DST	MHT	DLT	HT	ST	WST	N	IDCT II	IDLT
ZRKADLENIE	bez	1	1	2	2	2	bez	bez	bez	2	bez	2	2
TYP FILTRA	-	1	1	2	3,4	3,4	-	-	-	3,4	-	3,4	3,4

2.10.7 2D interpolácia 2. rádu (prípadne párneho B_1, B_2 rádu)

2.10.7.1 2D interpolácia 2. rádu doplnením spektra nulami

Pri obraze ide o separovateľné podvzorkovanie, preto aj proces interpolácie môže byť vykonaný separovane: doplnenie spektra nulami ako v 1D prípade osobitne pre spektrum riadkové a osobitne pre spektrum transformovaných a doplnených riadkov v spektre po ich stĺpcovej transformácii. Dvojrozmerný prepis tejto operácie vedie k zápisu:

1. 2D DFT a DCCT

$$\mathbf{Y}_{2.4 \times 2.4} = \begin{pmatrix} X(0,0) & X(0,1) & X(0,2)/2 & 0 & 0 & 0 & X(0,2)/2 & X(0,3) \\ X(1,0) & X(1,1) & X(1,2)/2 & 0 & 0 & 0 & X(1,2)/2 & X(1,3) \\ X(2,0)/2 & X(2,1)/2 & X(2,2)/4 & 0 & 0 & 0 & X(2,2)/4 & X(2,3)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X(2,0)/2 & X(2,1)/2 & X(2,2)/4 & 0 & 0 & 0 & X(2,2)/4 & X(2,3)/2 \\ X(3,0) & X(3,1) & X(3,2)/2 & 0 & 0 & 0 & X(3,2)/2 & X(3,3) \end{pmatrix}. \quad (2.164)$$

2. 2D DST, MHT, WST, IDCT II, IDLT

$$\mathbf{Y}_{B_1 N_1 \times B_2 N_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{N_1 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_1 \times (B_2-1)N_2} \\ \mathbf{0}_{(B_1-1)N_1 \times N_2} & \mathbf{0}_{(B_1-1)N_1 \times (B_2-1)N_2} \end{pmatrix}. \quad (2.165)$$

Potom

$$\mathbf{y} = B_1 B_2 \cdot (\mathbf{U}_{B_1 N_1})^T \cdot \mathbf{Y}_{B_1 N_1 \times B_2 N_2} \cdot \mathbf{U}_{B_2 N_2}. \quad (2.166)$$

2.10.7.2 Prestriedaním obrazu nulami

Obraz prestriedaný nulami 2. rádu vyzerá takto (príklad z obr. 2.15 z tejto kapitoly)

10	0	10	0	50	0	50	0
0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	10	0	50	0	50	0
0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	100	0	200	0	200	0
0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	100	0	200	0	200	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Obr. 2.16 Obraz s jasovými úrovňami vyjadrenými číslami, prestriedaný nulami - 2. rád

Spektrum pre transformácie z [tabuľky 2.10.1](#), ktoré majú vlastnosť zrkadlenia spektra prestriedaného nulami, je pre obraz $\tilde{\mathbf{x}}_{N_1 \times N_2}$ takéto

1. 2D DFT a DCCT

$$\mathbf{Y}_{N_1 \times N_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} & \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} \\ \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} & \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} \end{pmatrix}. \quad (2.167)$$

2. 2D DST, MHT, WST, IDCT II a IDLT

$$\mathbf{Y}_{N_1 \times N_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} & \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} \cdot \mathbf{J}_{\left(\frac{N_2}{2}\right)} \\ \mathbf{J}_{\left(\frac{N_1}{2}\right)} \cdot \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} & \mathbf{J}_{\left(\frac{N_1}{2}\right)} \cdot \mathbf{A}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \times \left(\frac{N_2}{2}\right)} \cdot \mathbf{J}_{\left(\frac{N_2}{2}\right)} \end{pmatrix}. \quad (2.169)$$

Interpoláčny filter má tvar:

1. 2D DFT a DCCT

$$\mathbf{H}_{N_1 \times N_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}\right) \left(\frac{N_2}{4}\right)} & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{(N_1)(1)} & & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}\right)(1)} & \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}\right) \left(\frac{N_2}{4}-1\right)} \\ & & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{4}+1\right) \left(\frac{N_2}{2}-1\right)} & & \\ 0,5 \cdot \mathbf{1}_{(1) \left(\frac{N_2}{4}\right)} & 0,25 & & 0,25 & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{(1) \left(\frac{N_1}{4}-1\right)} \\ & & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}-1\right) (N_2)} & & \\ 0,5 \cdot \mathbf{1}_{(1) \left(\frac{N_2}{4}\right)} & 0,25 & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \left(\frac{N_2}{2}-1\right)} & 0,25 & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{(1) \left(\frac{N_1}{4}-1\right)} \\ \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}-1\right) \left(\frac{N_2}{4}\right)} & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}-1\right) (1)} & & 0,5 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}-1\right) (1)} & \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{4}-1\right) \left(\frac{N_2}{4}-1\right)} \end{pmatrix}. \quad (2.169)$$

2. 2D DST, MHT, WST, IDCT II, IDLT

$$\mathbf{H}_{N_1 \times N_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \left(\frac{N_2}{2}\right)} & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \left(\frac{N_2}{2}\right)} \\ \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \left(\frac{N_2}{2}\right)} & \mathbf{0}_{\left(\frac{N_1}{2}\right) \left(\frac{N_2}{2}\right)} \end{pmatrix}. \quad (2.170)$$

Potom

$$\mathbf{y}_{N_1 \times N_2} = 4 \cdot (\mathbf{U}_{N_1})^T \cdot (\mathbf{H}_{N_1 \times N_2} \circ \mathbf{Y}_{N_1 \times N_2}) \cdot \mathbf{U}_{N_2}. \quad (2.171)$$

Pre obr. 2.16 zo začiatku časti je interpolácia 2. rádu takéto

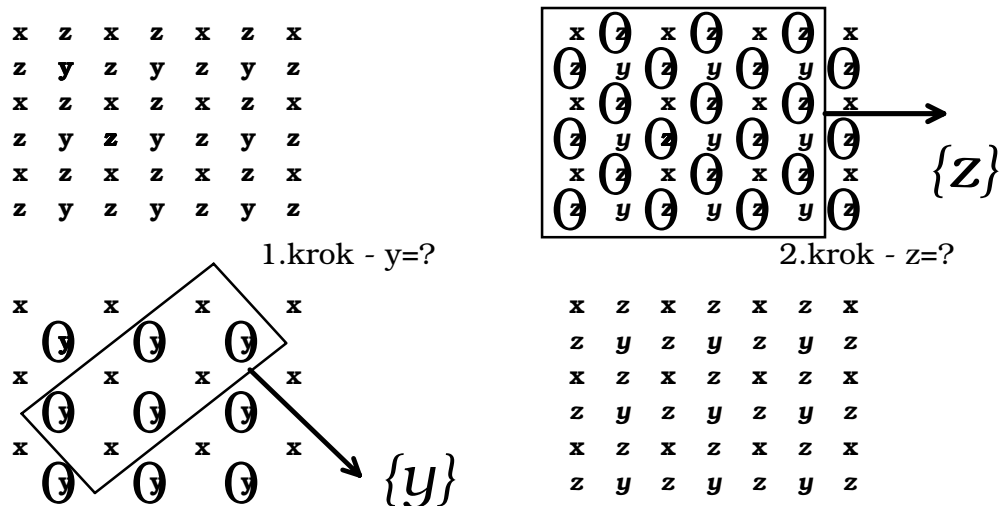
2D DST

10	10	10	25	50	61	50	25
6	5	6	25	53	66	53	26
10	10	10	25	50	61	50	25
46	55	46	62	104	127	104	53
100	121	100	124	200	243	200	102
124	151	124	153	247	300	247	126
100	121	100	124	200	243	200	102
49	60	49	62	100	122	100	51

2D IDCT II

10	10	10	25	50	61	50	25
8	7	8	26	55	69	55	26
10	10	10	25	50	61	50	25
46	55	46	66	106	127	106	56
100	121	100	130	200	237	200	107
124	151	124	160	244	290	244	132
100	121	100	130	200	237	200	107
50	60	50	66	102	122	102	55

Interpolácie vyšších rádov sú potom ďalej len jednoduchou kombináciou alebo kaskádovaním jedno a dvojrozmerných interpolácií 1. a 2. rádu. Je však potrebné pri ich kombinácii alebo kaskádovaní sledovať najmä okraje obrazu, pretože tie často (hlavne pri kaskádovaní) nemajú pri zmene osí obdĺžnikový, ale trojuholníkový tvar. Preto je často výhodné pri vyšších rádoch interpolácií tieto okraje riešiť niektorou z jednoduchších interpolačných metód (stredná hodnota, median, bilineárna transformácia). Problém je zrejmý z obr. 2.17, kde je 2D interpolácia 2. rádu riešená ako kaskádová interpolácia 1. rádu.

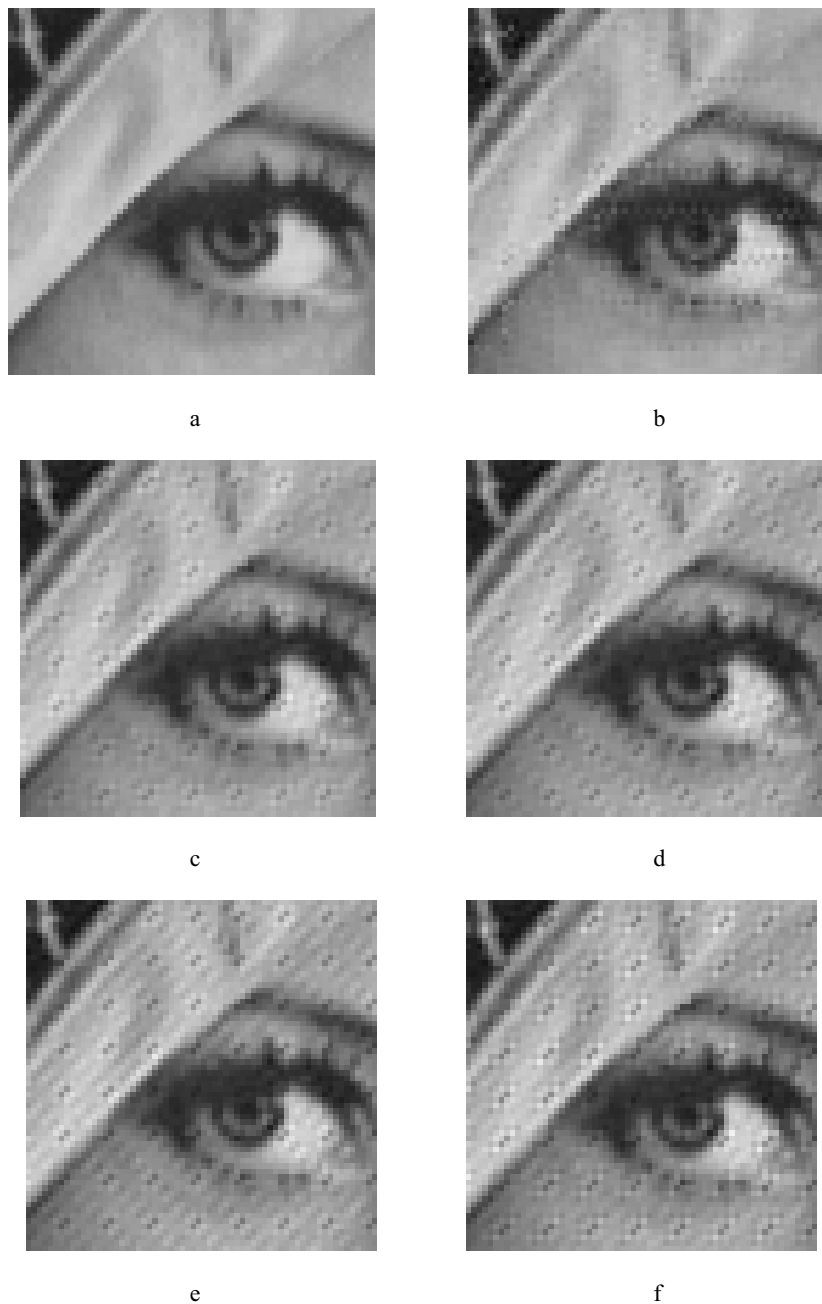


Obr. 2.17 2D interpolácia 2.rádu kaskádovaním 2D interpolácie 1.rádu

Posledný problém, ktorý je potrebné riešiť pri interpoláciách diskretnými ortogonálnymi transformáciami je veľkosť bloku, ktorý interpolujeme. Z pokusov na obraze sa zdá byť výhodnejšie v prípade používania jednotnej veľkosti bloku použitie menších blokov pre interpoláciu, čo však závisí od "aktivity" obrazu. Problém je nielen v dostatočne presnej interpolácii chýbajúcich bodov obrazu, ale hlavne zvýšená chybovosť interpolácie a jej "rozvlnenie" na okrajoch interpolovaného bloku.

Riešením asi bude predspracovanie interpolovaného obrazu prahovaním, kde by boli určené plochy s relatívne homogénnou štruktúrou, ktorá vedie ku kratšej reprezentácii v spektrálnej oblasti, čo je pri transformačných metódach základná podmienka úspešnosti interpolácie aj aproximácie obmedzeným počtom básových funkcií.

Interpoláciu budeme riešiť prekrývajúcimi sa blokmi. Napr. interpolovať transformačne po blokoch $2N \times 2N$ a výsledok interpolácie zapisovať len zo stredných $N \times N$ výsledných bodov. Takto sa do výsledku (až na okraje obrazu) dostávajú body, ktoré sú zrejme interpolované s väčšou presnosťou (obr. 2.18), (tabuľka 2.10.2, tabuľka 2.10.3).



Obr. 2.18 a, b, c, d, e, f



g



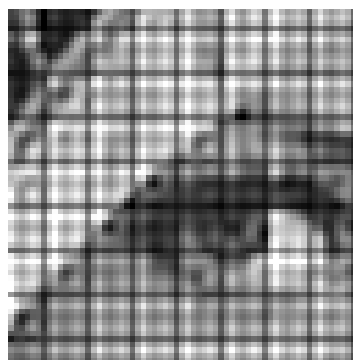
h



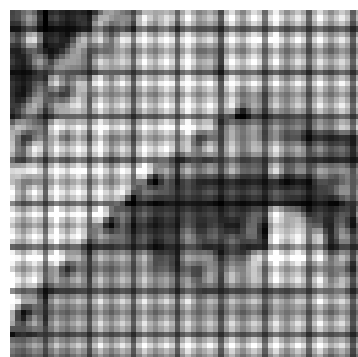
i



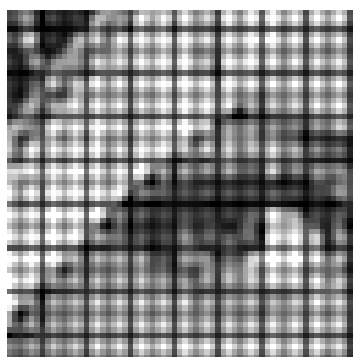
j



k

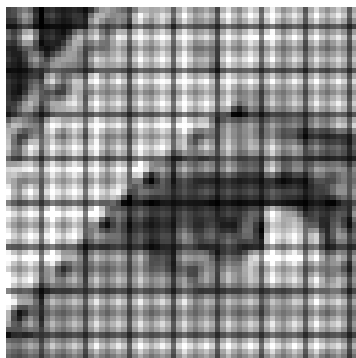


l



m

Obr. 2.18 g, h, i, j, k, l, m



n



o



p



q

Obr. 2.18 Obraz OKO 64x64 obrazových bodov: originál (a), interpolovaný 2D DFT alebo DCCT + filter 1 (b), 2D IDCT II alebo 2D DCT III + filter 4 (c), 2D DST I + filter 4 (d), 2D MHT + filter 4 (e), 2D DLT + filter 4 (f), 2D DFT alebo DCCT + filter 4 s prekryvom DOT 24x24/8x8 (g), 2D DCT + filter 4 s prekryvom DOT 24x24/8x8 (h), 2D DST + filter 4 s prekryvom DOT 24x24/8x8 (i), podvzorkovaný 2. rádu a interpolovaný 2D bez prekryvu: DFT alebo DCCT (j), IDCT II alebo DCT III (k), DST I (l), MHT (m), DLT (n), podvzorkovaný 2. rádu a interpolovaný 2D s prekryvom 24x24/8x8: DFT alebo DCCT (o), IDCT II alebo DCT III (p) a DST I (q)

Tabuľka 2.10.2

Závislosti strednej kvadratickej odchýlky interpolovaného obrazu podvzorkovaného 1. rádu od originálu od rôznych typov obrazu, DOT, rôznych veľkostí blokov a rôznych prekryvov, kde číateľ je veľkosť transformovaného bloku a menovateľ je veľkosť stredu rekonštruovaného bloku, ktorý sa uchováva ako výsledok interpolácie

LENA 256 x 256

2D DOT	prekryv			
	8x8/8x8 MSE	8x8/4x4 MSE	16x16/8x8 MSE	24x24/8x8 MSE
DFT, DCCT	42,941	17,747	18,075	17,441
IDCT	47,208	26,301	18,741	16,936
DST	55,433	38,339	20,617	17,963
MHT	68,362	47,587		
DLT	82,017	43,223		
WST	42,628	37,280		

BABOON 256 x 256

2D DOT	prekryv			
	8x8/8x8 MSE	8x8/4x4 MSE	16x16/8x8 MSE	24x24/8x8 MSE
DFT, DCCT	247,821	202,619	204,868	202,776
IDCT	275,515	237,194	241,009	243,550
DST	280,309	247,539	242,214	243,710
MHT	295,410	255,249		
DLT	317,301	257,566		
WST	277,076	267,789		

Tabuľka 2.10.3

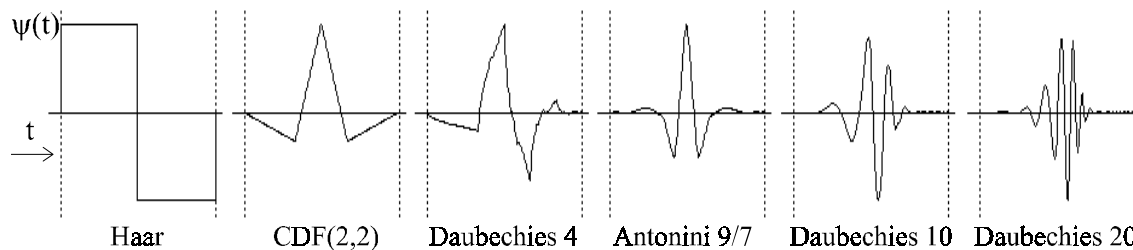
Závislosti strednej kvadratickej odchýlky interpolovaného obrazu podvzorkovaného 2. rádu od originálu od rôznych typov DOT, rôznych veľkostí blokov a rôznych prekryvov, kde číateľ je veľkosť transformovaného bloku a menovateľ je veľkosť stredu rekonštruovaného bloku, ktorý sa uchováva ako výsledok interpolácie

LENA 256 x 256

2D DOT	prekryv		
	8x8/8x8 MSE	8x8/4x4 MSE	24x24/8x8 MSE
DFT, DCCT	166,953	52,546	46,473
IDCT	1074,254	259,975	64,453
DST	1444,731	574,661	107,157
MHT	1960,868	886,458	
DLT	1502,382	547,572	
WST	168,396	169,453	

2.11 WAVELETOVÁ TRANSFORMÁCIA

Waveletová transformácia (WT) [95], [96] resp. waveletová teória tvorí mohutný aparát na reprezentáciu a analýzu signálov podobne ako Fourierova transformácia a transformácie z nej odvodené. Keďže pri WT je diskretný a spojitý tvar tesne previazaný, začneme v spojitom tvare a plynule prejdeme do tvaru diskretného.



Obr. 2.19 Príklady rôznych druhov základných waveletov

Pri WT sú bázové funkcie (*wave lety*) $\psi_{m,n}(t)$ tvorené zmenou mierky a posunom prototypovej funkcie, tzv. *základného waveletu* $\psi(t)$ (obr 2.19). Na reprezentáciu spojitých signálov stačí len časť možných posunov a zmien mierky $\psi(t)$. Najbežnejšie volíme [96]

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n) \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.173)$$

Každú funkciu $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ môžeme pomocou $\psi_{m,n}(t)$ vyjadriť množinou *waveletových koeficientov* $d_m(n)$ diskretnéj v čase

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_m(n) \psi_{m,n}(t), \quad d_m(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{m,n}(t) dt, \quad (2.174)$$

pričom požadujeme vzájomne ortogonálne, normalizované $\psi_{m,n}(t)$, bez jednosmernej zložky:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{m,n}(t)|^2 dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) dt = 0, \quad (2.175)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \psi_{m',n'}(t) dt = \delta(m - m') \delta(n - n') \quad m, n, m', n' \in \mathbb{Z}, \quad (2.176)$$

kde $\delta(n)$ sú diskkrétne jednotkové (resp. Kroneckerove) impulzy. Vzťahom (2.174) sú definované ortonormálne *waveletové rady* (WR), pričom množina $\{\psi_{m,n}(t); m, n \in \mathbb{Z}\}$ tvorí ortonormálnu bázu $L^2(\mathbb{R})$. V dôsledku spôsobu tvorby bázových funkcií (vzťah 2.173) existuje v priestore $L^2(\mathbb{R})$ postupnosť uzavretých hierarchických podpriestorov V_m , ktoré $f(t)$ charakterizujú s rôznou úrovňou rozlíšenia (resp. aproximujú s rôznou presnosťou), t.j. tvoria *analýzu s viacúrovňovým rozlíšením* (MRA)

$$\emptyset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset V_{-\infty} = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.177)$$

horšia ← **aproximácia** → lepšia

Pre ortonormálne waveletové rady má MRA nasledovné vlastnosti [96]:

1. Kompletnosť

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathbb{R}) \quad \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\},$$

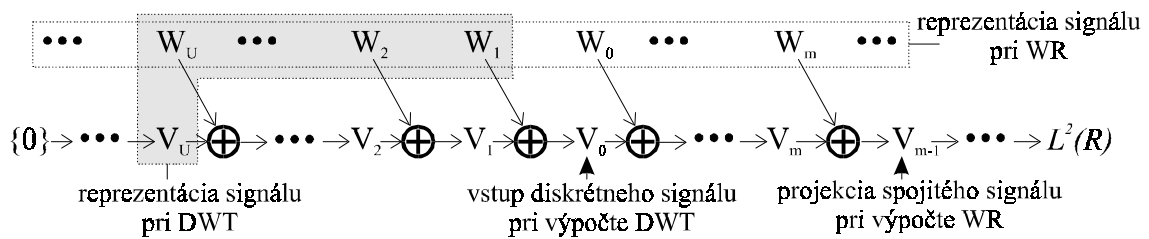
2. Invariancia vzhľadom na posun v čase a zmenu mierky

$$f(t) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m t) \in V_0 \quad \nabla m \in \mathbb{Z},$$

$$f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t-n) \in V_0 \quad \nabla n \in \mathbb{Z},$$

3. *Existencia bázy* Existuje funkcia mierky $\phi(t) \in V_0$ taká, že množina $\{\phi(t-n)\}$ je ortonormálnou bázou podpriestoru V_0 . Použitím bodu 2 dostaneme, že množina $\{\phi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}t - n)\}$ je ortonormálnou bázou V_m ,

4. *Existencia bázy ortogonálneho doplnku* Nech W_m je ortogonálny doplnok V_m do V_{m-1} , t.j. nech platí: $V_{m-1} = V_m \oplus W_m$ pričom $W_m \perp V_m$. Potom existuje základný wavelet $\psi(t) \in W_0$ taký, že množina $\{\psi(t-n)\}$ je ortonormálnou bázou W_0 , resp. množina waveletov $\{\psi_{m,n}(t)\}$ je bázou W_m .



Obr. 2.20 Hierarchia aproximačných V_m a diferenčných W_m podpriestorov pri WR

Podpriestory V_m , ktorých bázy tvoria funkcie mierky, majú sumačný charakter (obsahujú aproximáciu nášho signálu), zatiaľ čo podpriestory W_m , ktorých bázy tvoria wavelety, majú charakter diferenčný (obsahujú detail signálu na rôznych úrovniach rozlíšenia). Delenie priestoru $L^2(\mathbb{R})$ na podpriestory vyplývajúce z vlastností je znázornené na obr.2.20. Koeficienty waveletových radov $d_m(n)$ podľa (2.11-2) predstavujú ortogonálne projekcie funkcie $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ do podpriestorov W_m . Projekciou $f(t)$ do V_m dostaneme:

$$c_m(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{m,n}(t) dt, \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m(n) \phi_{m,n}(t), \quad (2.178)$$

kde $c_m(n)$ je množina projekčných koeficientov (*koeficienty mierky*) a $s(t) \in V_m$ predstavuje aproximáciu $f(t)$. V dôsledku vlastností MRA, môžu byť bazové funkcie podpriestorov V_m a W_m vyjadrené ako lineárna kombinácia bazových funkcií podpriestoru V_{m-1} , t.j. platia tzv. *relácie zmeny rozlíšenia* [96]:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{mra}(n) \phi(2t-n) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{mra}(n) \phi(2t-n), \quad (2.179)$$

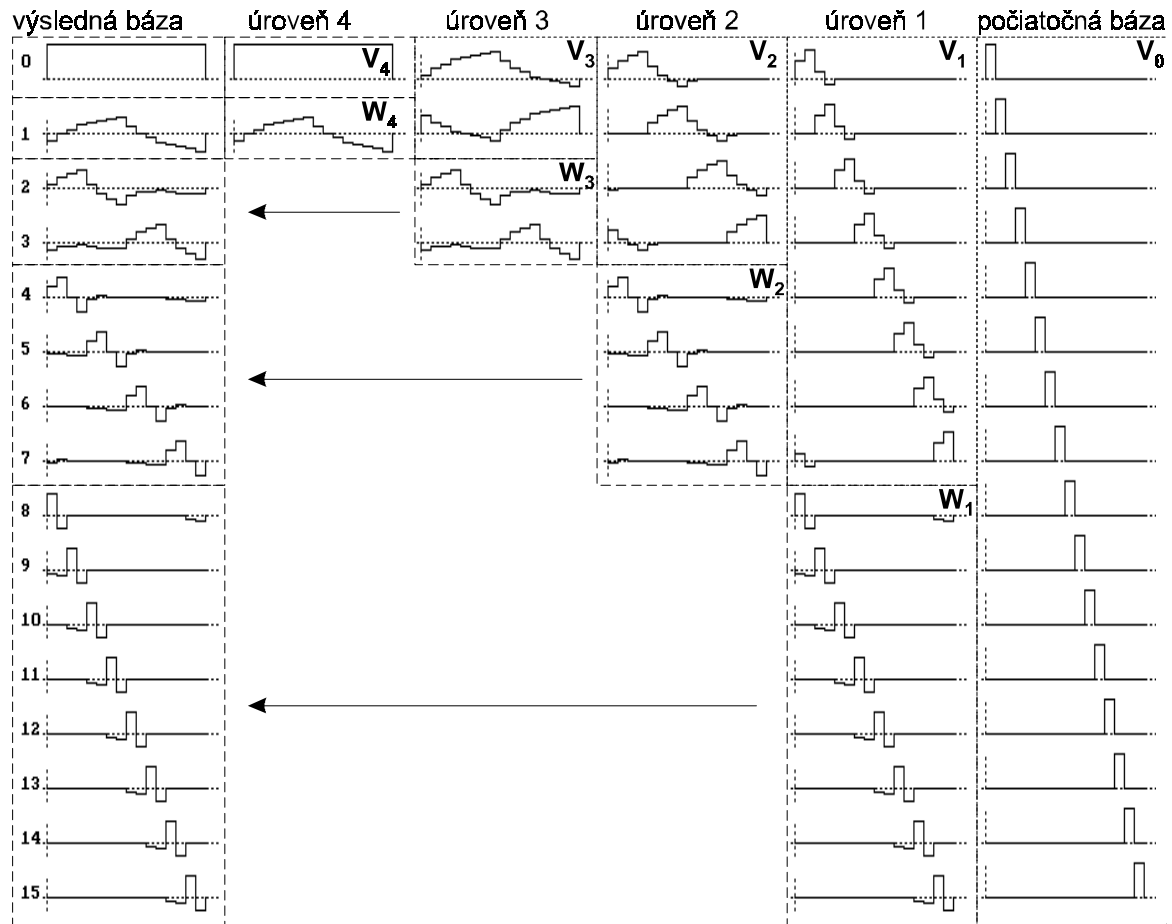
kde $h_{mra}(n)$ a $g_{mra}(n)$ nazývame *koeficienty pre zmenu rozlíšenia*. Analogicky, medzi projekčnými koeficientami na susedných úrovniach rozlíšenia platia vzťahy:

$$c_{m+1}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{mra}(k-2n) c_m(k) \quad d_{m+1}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{mra}(k-2n) c_m(k), \quad (2.180)$$

$$c_m(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{mra}(n-2k) c_{m+1}(k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{mra}(n-2k) d_{m+1}(k). \quad (2.181)$$

Vzťahy (2.180) a (2.181) nám umožňujú efektívny výpočet waveletových radov a ich špeciálneho prípadu - diskkrétnej waveletovej transformácie (DWT). Namiesto výpočtu WR v spojitom priestore (2.176) stačí raz vykonať projekciu spojitého signálu $f(t)$ do V_m (2.178) a ďalej vo výpočte waveletových koeficientov pokračovať v diskkrétnej oblasti rekurentným opakovaním vzťahu (2.180). Voľbou začiatočného projekčného priestoru V_m môžeme aproximovať výpočet WR v spojitom tvare s ľubovoľnou presnosťou.

Pri výpočte DWT interpretujeme vstupný diskrétny signál $x(n)$, $n \in Z$ priamo ako projekčné koeficienty $c_0(n)$ a vzťahom (2.181) pokračujeme vo výpočte waveletových koeficientov až po želanú úroveň rozlíšenia U . Po skončení výpočtu je signál reprezentovaný množinami waveletových koeficientov $\{d_1(n), d_2(n), \dots, d_U(n)\}$ a koeficientami mierky $\{c_U(n)\}$. Pre signál $x(n)$ konečnej dĺžky L , je počet úrovní rozlíšenia obmedzený na $U_{\max} \leq \log_2 L$.



Obr. 2.21 Štruktúra bázy DWT (Daubechies 4) s veľkosťou báзовých vektorov 16

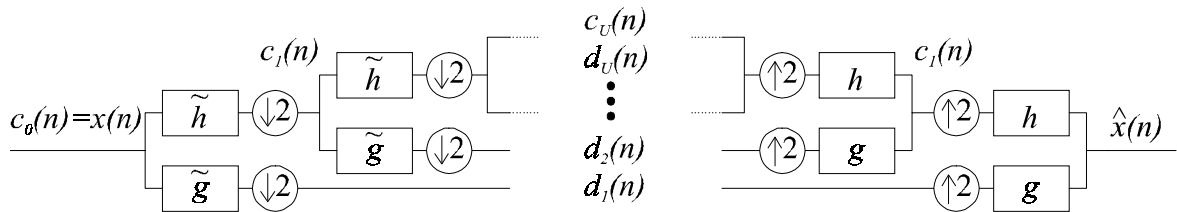
Z pohľadu signálu je báza DWT diskrétna a obsahuje L báзовých vektorov. Pri vstupe $x(n)$ do MRA je jeho báza tvorená posunmi jednotkového impulzu. Pri rozklade signálu do ďalších podpriestorov tvoria báзовé vektory čoraz lepšie aproximácie waveletov a funkcií mierky. Situácia je znázornená na obr. 2.21.

Pri konečnej dĺžke signálu treba zabezpečiť korektnú manipuláciu so vzorkami na jeho okrajoch. V prípade DWT sa užívajú najmä tieto riešenia: periodické rozšírenie signálu, symetrické rozšírenie signálu (ak má báza symetrické funkcie resp. vektory) a konštrukcia waveletov na intervale (vtedy DWT obsahuje špeciálne *okrajové* wavelety, t.j. báza nie je formovaná len zmenami mierky a posunmi základného waveletu) [170].

Vlastnosti, ako aj samotná existencia WT sú podmienené vlastnosťami koeficientov pre zmenu rozlíšenia $h_{mra}(n)$ a $g_{mra}(n)$. Keď ich interpretujeme ako impulzové charakteristiky filtrov, môžeme WR a DWT vypočítať bankami filtrov. Pritom všetky požiadavky na wavelety, funkcie mierky a vzťahy medzi nimi môžeme vyjadriť ako požiadavky na filtre prípadne na štruktúru banky filtrov.

2.11.1 Výpočet DWT bankami filtrov

Operácie vykonávané pri výpočte WR a DWT vzťahmi (2.180) a (2.181) sú v oblasti číslicového spracovania signálu známe ako operácie, ktoré vykonáva 2-pásmová banka filtrov (FB) pri rozkladaní signálu (analýze) na subpásma resp. pri ich spätnom skladaní (syntéze). Ak pre impulzové charakteristiky filtrov pre syntézu platí $h(n) = h_{mra}(n)$, $g(n) = g_{mra}(n)$ a filtre pre analýzu sú ich časovou reverziou, t.j. platí $\tilde{h}(n) = h_{mra}(-n)$, $\tilde{g}(n) = g_{mra}(-n)$, potom môžeme výpočet DWT schématicky prekresliť do tvaru na obr.2.22. Tento tvar predstavuje kaskádu 2-pásmových FB. Signál rozkladajú vždy na dva signály s rozdielnym charakterom, dolnopriepustným a hornopriepustným. Signál s dolnopriepustným (DP) charakterom je rozkladaný rekurzívne ďalej, t.j. jedná sa o *rekurzívnu FB*.



Obr. 2.22 Schéma výpočtu DWT pomocou rekurzívnej 2-pásmovej banky filtrov

Aby FB umožnila výpočet DWT, musia filtre spĺňať požiadavky tzv. *ortogonálneho riešenia* banky filtrov. Nech $h_0(n)$ je impulzová odpoveď dolnopriepustného filtra (DP) s konečnou impulzovou odpoveďou párnej dĺžky N spĺňajúca nasledovné podmienky:

$$\sum_n h_0(n) = \sqrt{2}, \quad \sum_k h_0(n)h_0(n-2k) = \delta(k), \quad (2.182)$$

potom impulzové odpovede filtrov vo FB môžeme vyjadriť pomocou $h_0(n)$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(n) &= h_0(-n), & h(n) &= h_0(n), \\ \tilde{g}(n) &= (-1)^n h_0(N-1-n), & \tilde{g}(n) &= (-1)^n h_0(N-1+n). \end{aligned} \quad (2.183)$$

Pomocou konceptu rekurzívnych bánk filtrov môžeme podpriestory, do ktorých DWT signál rozkladá, charakterizovať z frekvenčného hľadiska. Každý podpriestor obsahuje len časť spektra pôvodného signálu (subpásma), pričom šírka subpásm klesá nie lineárne ale logaritmicky.

Príklady ortogonálnych riešení FB, odpovedajúcich waveletov a funkcií mierky sú na obr. 2.26. Pri aplikácii DWT na 2D signál sa používa rekurzívny rozklad podľa obr. 2.27 (porovnaj s tvarom spektra 2D HT na obr. 2.6). Charakter aproximácie obrazu pre vybrané DWT je na obr. 2.29. Výsledky ktoré vybrané DWT pri aproximácii dosahujú, vyznievajú v prospech DWT s dlhými impulzovými charakteristikami filtrov a hladkými báзовými funkciami.

2.11.2 Biortogonálne DWT

V doterajšom texte sme hovorili o DWT ako o ortogonálnej (resp. ortonormálnej) transformácii. Koncept odpovedajúcich ortogonálnych bánk filtrov však neumožňuje pri použití filtrov s lineárnou fázovou charakteristikou (tvoriacich symetrické bázové funkcie) dosiahnuť úplnú rekonštrukciu signálu. Tú umožňuje dosiahnuť až všeobecné, *biortogonálne* riešenie banky filtrov. Pri návrhu filtrov potom máme k dispozícii viac stupňov voľnosti (napr. môžeme použiť filtre s rôznou dĺžkou impulzovej odpovede). Nech $\tilde{h}(n)$, $h(n)$ sú impulzové charakteristiky DP filtrov pre ktoré platí podmienka biortogonalita [170]:

$$\sum_n \tilde{h}(n) = \sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad \sum_n \tilde{h}(n)h(n-2k) = \delta(k), \quad (2.184)$$

potom impulzové odpovede HP filtrov vo FB môžeme vyjadriť :

$$\tilde{g}(n) = (-1)^n h(2l+1-n) \quad g(n) = (-1)^n \tilde{h}(2l+1-n), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.185)$$

V prípade $\tilde{h}(n) = h(-n)$ dostávame predošlé ortogonálne riešenie. Biortogonálne filtre môžeme použiť v reláciách zmeny rozlíšenia v tvare:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t) &= \sqrt{2} \sum \tilde{h}(n) \tilde{\phi}(n-2t) & \phi(t) &= \sqrt{2} \sum h(n) \phi(2t-n), \\ \tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum \tilde{g}(n) \tilde{\phi}(n-2t) & \psi(t) &= \sqrt{2} \sum g(n) \phi(2t-n), \end{aligned} \quad (2.186)$$

kde nové funkcie $\tilde{\phi}(t)$ a $\tilde{\psi}(t)$ sú *duálna funkcia mierky* resp. *duálny wavelet*. Ich posuny a zmeny mierky tvoria bázy podpriestorov \tilde{V}_m resp. \tilde{W}_m , podobne ako $\phi(t)$ a $\psi(t)$ tvoria bázy podpriestorov V_m a W_m . V priestore $L^2(\mathbb{R})$ potom existujú dve hierarchie podpriestorov:

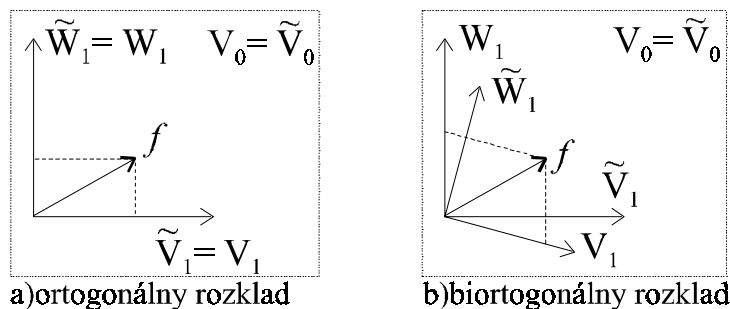
$$\begin{aligned} \dots &\subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \\ \dots &\subset \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \subset \dots \end{aligned} \quad (2.187)$$

pričom

$$V_m \perp \tilde{W}_m, \quad \tilde{V}_m \perp W_m, \quad (2.188)$$

$$V_{m-1} = V_m + W_m, \quad \tilde{V}_{m-1} = \tilde{V}_m + \tilde{W}_m. \quad (2.189)$$

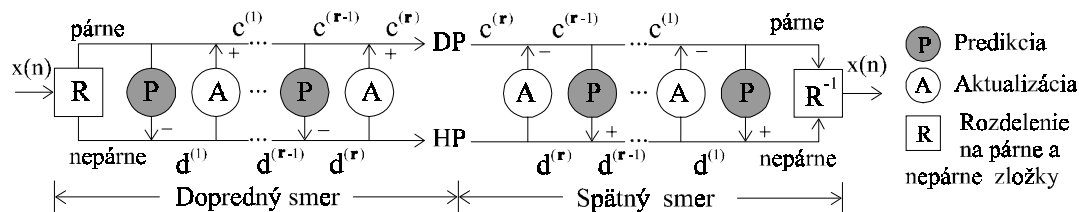
Pri analýze signál pomocou filtrov s impulzovými charakteristikami $\tilde{h}(n)$ a $\tilde{g}(n)$ rozložíme do podpriestorov \tilde{V}_m resp. \tilde{W}_m . Získané koeficienty reprezentujú signál zároveň aj v priestoroch V_m resp. W_m , t.j. signál pri syntéze zrekonštruujeme pomocou $h(n)$ a $g(n)$. Situácia je znázornená na obr. 2.23.



Obr. 2.23 Spôsob rozkladu signálu do ortogonálnych a biortogonálnych podpriestorov

2.11.3 Lifting schéma

Biortogonálne DWT môžeme efektívne vypočítať metódou nazvanou *lifting schéma* [171][172]. Pomocou jednoducho invertovateľných krokov umožňuje tvoriť zložité biortogonálne systémy. Princípálna schéma je na obr. 2.24.



Obr. 2.24 Operácie vykonávané pri výpočte DWT realizovanej lifting schémou

Na začiatku je signál rozdelený na párne a nepárne zložky (tzv. *lenivá transformácia*). Získané množiny sú potom navzájom *predikované* a *aktualizované*, kým nie sú považované za "*dekorelované*". Cieľom predikcie je čo najlepšie predpovedať nepárne zložky a vynulovať ich, t.j. získať čo najmenšie hodnoty v HP časti po doprednej transformácii. Aktualizáciou sa snažíme zachovať v DP časti (párne zložky) čo najviac vlastností pôvodného obrazu. To sa stáva dôležitým najmä pri opakovaní výpočtu v DP časti, t.j. aby bola predikcia v ďalších úrovniach rozkladu aj naďalej účinná.

Lifting schéma umožňuje výhodne realizovať klasické DWT, pričom svojou štruktúrou umožňuje jednoduché rozšírenie konceptu DWT. Jej vlastnosti a spôsob použitia môžeme potom zhrnúť v nasledovných bodoch:

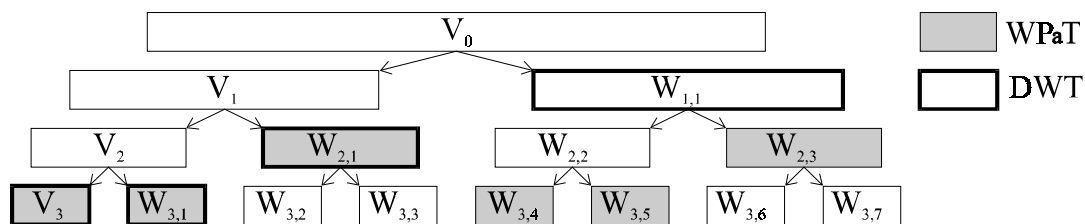
1. urýchlenie implementácie DWT (v 1D prípade až dvojnásobne)
2. možnosť vykonať výpočty bez použitia prídavnej pamäte (t.j. in-place)
3. jednoduchý návrh vlastných DWT so zaručenou invertovateľnosťou
4. konštrukcia nelineárnych DWT [173]
5. použitie DWT pre nerovnomerne navzorkované signály
6. konštrukcia DWT na intervaloch, krivkách, povrchoch

Vlastnosti výslednej transformácie sú určené vlastnosťami prediktorov a spôsobom ich aplikácie. Teoreticky môžeme použiť ľubovoľné prediktory. Priečková štruktúra nám zaručuje biortogonalitu a tým aj úplnú rekonštrukciu. Koncept prediktorov predstavuje silný vzťah medzi transformačným a prediktívnym kódovaním. Lifting schéma takto principiálne umožňuje dvojaký prístup k dekorelácii dát: a) použiť transformačný prístup b) využiť priamo predikčný princíp a snažiť sa data dekorelovať priamo návrhom sústavy prediktorov použitých v lifting schéme.

V kontexte kompresie obrazu sa stávajú dôležitými okrem zefektívnenia klasickej DWT predovšetkým možnosti použitia nelineárnych (prípadne adaptívnych) DWT a DWT na intervaloch (t.j. na ohraničených signáloch ako napr. obraz). Pri bezstratovej kompresii obrazu sa s výhodou používa lifting schéma v celočíselných DWT, v ktorých prediktory zaokrúhľujú predikované hodnoty (nelineárna operácia) [174].

2.11.4 Waveletová paketová transformácia (WPaT)

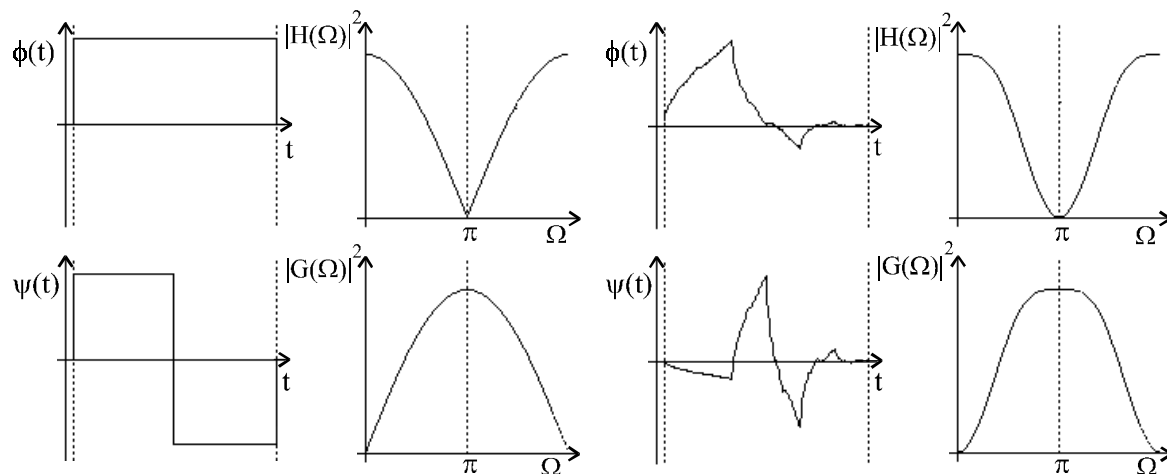
Waveletová paketová transformácia [1], [175] rozširuje koncept DWT o rozklad diferenciálnych priestorov. V MRA potom vzniká úplná hierarchická stromová štruktúra podľa obr. 2.25. Reprezentácia signálu v celej hierarchii je redundantná, stačí použiť iba niektoré podpriestory. Výber najvhodnejšej stromovej štruktúry na reprezentáciu daného signálu podľa daného kritéria je ekvivalentný s hľadaním najlepšej bázy. Môže byť realizovaný adaptívne, alebo pevne pre danú triedu signálov. Najbežnejšie kritériá pri použití na kompresiu obrazu sú: minimalizácia entropie signálu, minimalizácia počtu bitov reprezentácie signálu a skreslenia pri danej množine kvantizátorov.



Obr. 2.25 Hierarchická štruktúra podpriestorov pri waveletovej paketovej transformácii

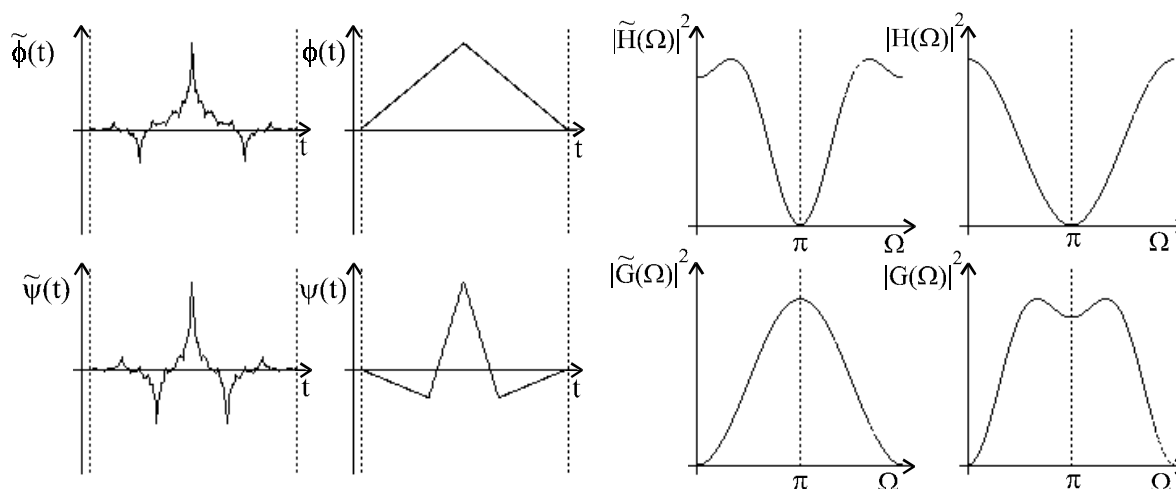
Pri použití biortogonálnych waveletov existujú analogicky k (2.185) dve hierarchie podpriestorov, pričom hierarchia podpriestorov pri analýze ma identickú štruktúru ako hierarchia podpriestorov pri syntéze. Princíp delenia subpásom pri WPaT môže byť rozšírený aj do oblasti času (nazývaný aj *časovo-frekvenčná segmentácia*) [176]. Príklad rozloženia subpásom pri waveletovej paketovej transformácii a jej rozšírenie o delenie koeficientov v čase sú na [obr. 2.28](#).

V praxi sa WPaT z úspechom využíva v FBI štandarde na kompresiu otlakov prstov.

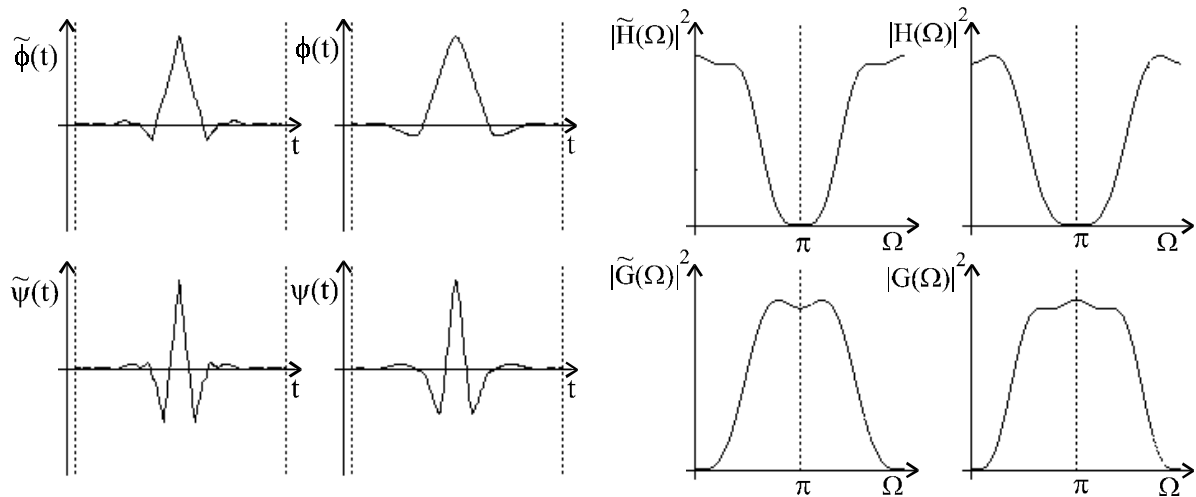


a) Haar, $h_0(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) D4, $h_0(n) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)$

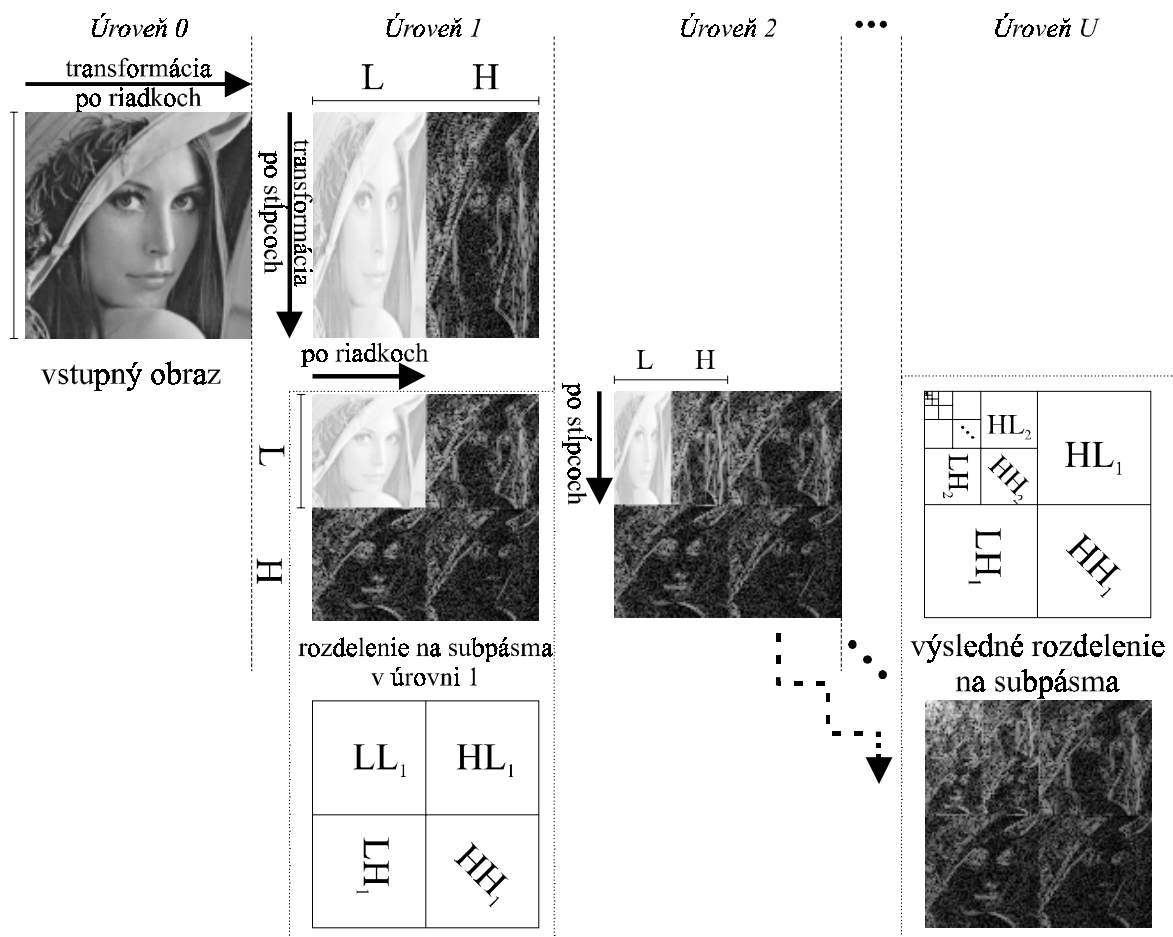


c) CDF 5/3, $\tilde{h}(n) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$, $h(n) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

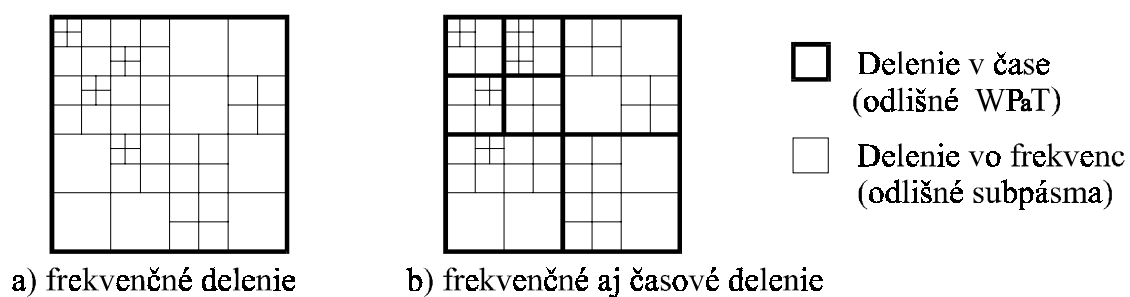


d) CDF 9/7 použitý v FBI štandarde na kompresiu otláčkov prstov a v algoritme SPIHT
 $\tilde{h}(n) \approx (0,03782, -0,02384, -0,11062, 0,37740, 0,85269, 0,37740, -0,11062, -0,02384, 0,03782)$
 $h(n) \approx (-0,064538, -0,040689, 0,418092, 0,788485, 0,418092, -0,040689, -0,064538)$

Obr. 2.26 Porovnanie ortogonálnych (a,b) a biortogonálnych (c,d) waveletov (pozn. D4 - Daubechies 4, CDF - Cohen-Daubechies-Fauveau)



Obr. 2.27 Spôsob výpočtu 2D DWT rozkladom na subpásma v banke filtrov (v každom transformačnom kroku sa signál rozdelí na časť s dolnopriepustným L (Low) a hornopriepustným H (high) charakterom, pričom v krokoch sa striedajú smery x a y)



Obr. 2.28 Príklady rozloženia subpásiem pri waveletovej paketovej transformácii a jej rozšírenie o delenie koeficientov v čase



a) Haar , MSE: 454.3



b) Daubechies 4, MSE: 391.24



c) CDF 5/3, MSE: 368.5



d) CDF 5/3 s vymenenými filterami pre analýzu a syntézu, MSE: 546.5



e) Daubechies 20, MSE: 322.4



f) CDF 9/7, MSE: 324.3

Obr. 2.29 Aproximácia obrazu vybranými waveletovými transformáciami pri vynulovaní 98,5 % waveletových koeficientov