Číslicové spracovanie signálov II

Dvojrozmerné signály a sústavy

Gregor Rozinaj

Katedra telekomunikácií

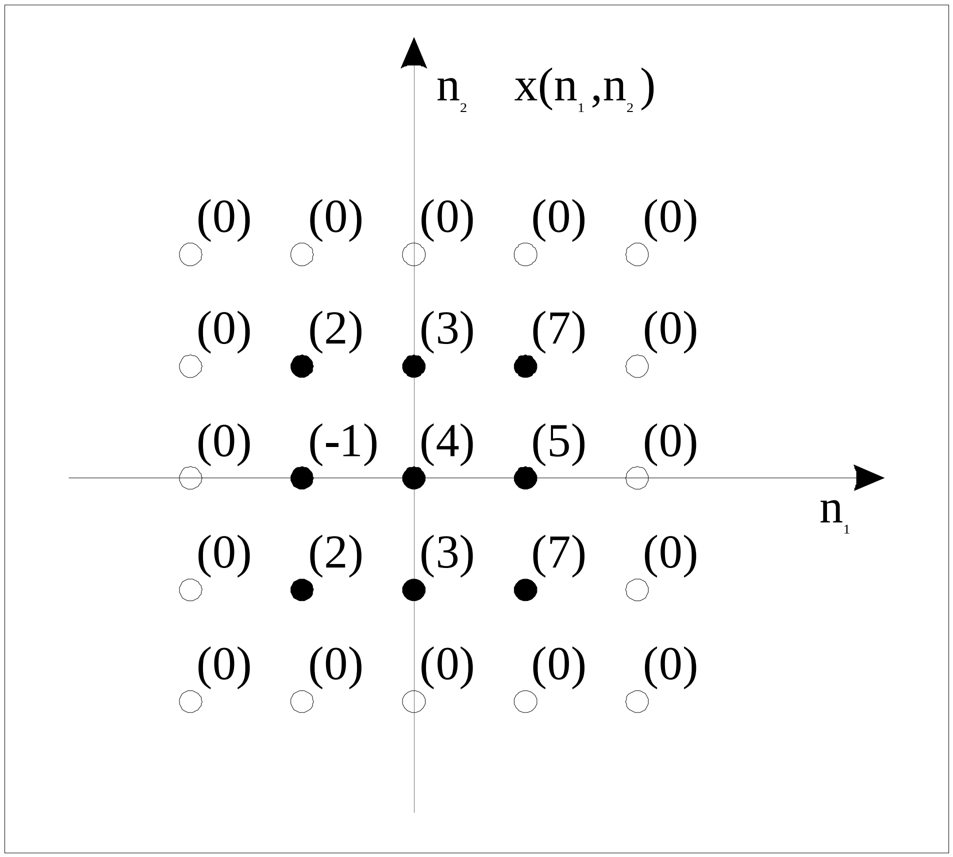
FEI STU Bratislava

Príprava fólií: Anton Marček

2D signály - zákl. pojmy (1/3)

- 2D diskrétne signály (diskrétne v priestore, spojité v hodnotách)
- $x(n_1,n_2)$ - postupnosť hodnôt definovaná pre všetky celočíselné hodnoty n_1 a n_2 (pre neceločíselné hodnoty n_1 a n_2 nie je nulová, ale je nedefinovaná)
- $x(n_1,n_2)$ - funkcia, resp. funkčná hodnota

2D signály - zákl. pojmy (2/3)



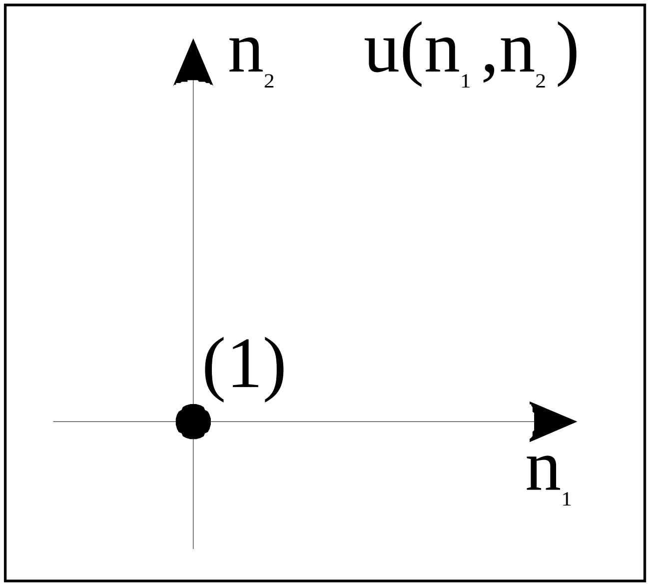
2D signály - zákl. pojmy (3/3)

<u>Významné postupnosti, resp. triedy postupností</u>

- jednotkový (Kroneckerov) impulz
- jednotkový skok
- separovateľné postupnosti
- periodické postupnosti

2D Kroneckerov impulz (1/3)

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & pre \quad n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & inak \end{cases}$$



2D Kroneckerov impulz (2/3)

Použitie

- impulzová charakteristika $h(n_1,n_2)$
- $x(n_1,n_2)$ - lineárna kombinácia posunutých Kroneckerových impulzov

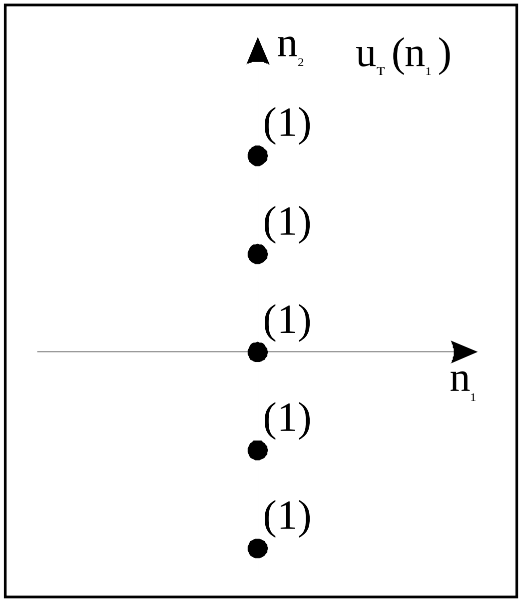
$$
\begin{aligned}
x(n_1,n_2) = \ldots &+ x(-1,-1)u(n_1+1,n_2+1) + x(0,-1)u(n_1,n_2+1) + \\
&+ x(1,-1)u(n_1-1,n_2+1) + \ldots + x(-1,0)u(n_1+1,n_2) + \\
&+ x(0,0)u(n_1,n_2) + x(1,0)u(n_1-1,n_2) + \ldots \\
= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} & x(k_1,k_2)u(n_1-k_1,n_2-k_2)
\end{aligned}
$$

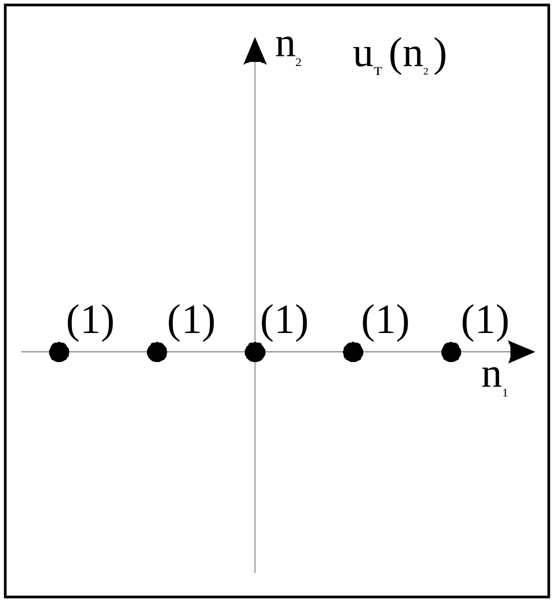
2D Kroneckerov impulz (3/3)

Riadkové impulzy - nie je ekvivalent pre 1D

$$x(n_1,n_2)=u_T(n_1)=\begin{cases}1 & pre \quad n_1=0\\ 0 & inak\end{cases}$$

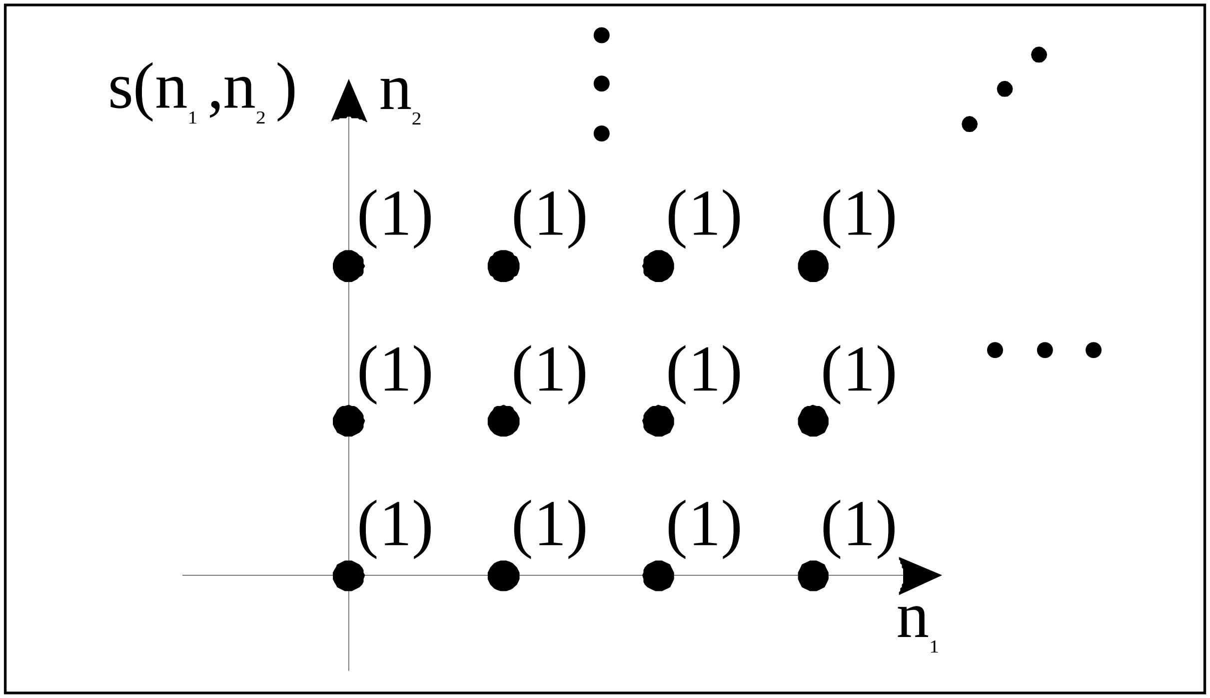
$$x(n_1,n_2)=u_T(n_2)=\begin{cases}1 & pre \quad n_2=0\\ 0 & inak\end{cases}$$





2D jednotkový skok (1/3)

$$s(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & pre \quad n_1, n_2 \geq 0 \\ 0 & inak \end{cases}$$



2D jednotkový skok (2/3)

<u>Vzťah medzi jednotkovým skokom a Kroneckerovým impulzom</u>

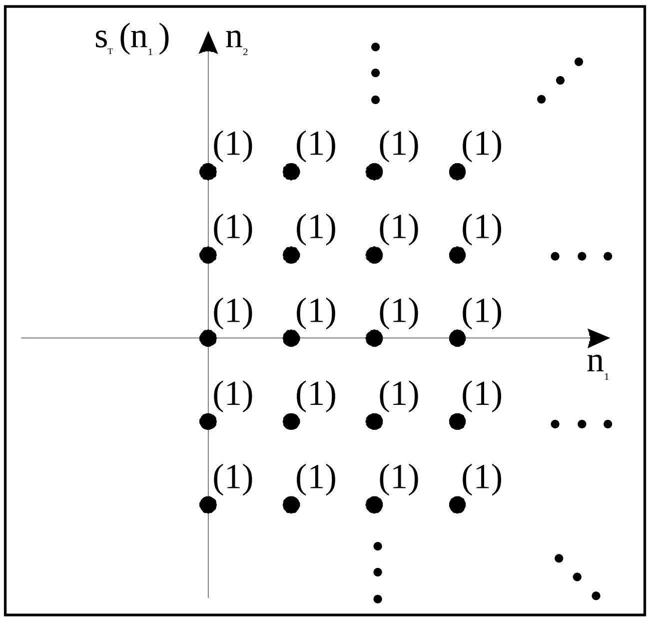
$$s(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} u(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

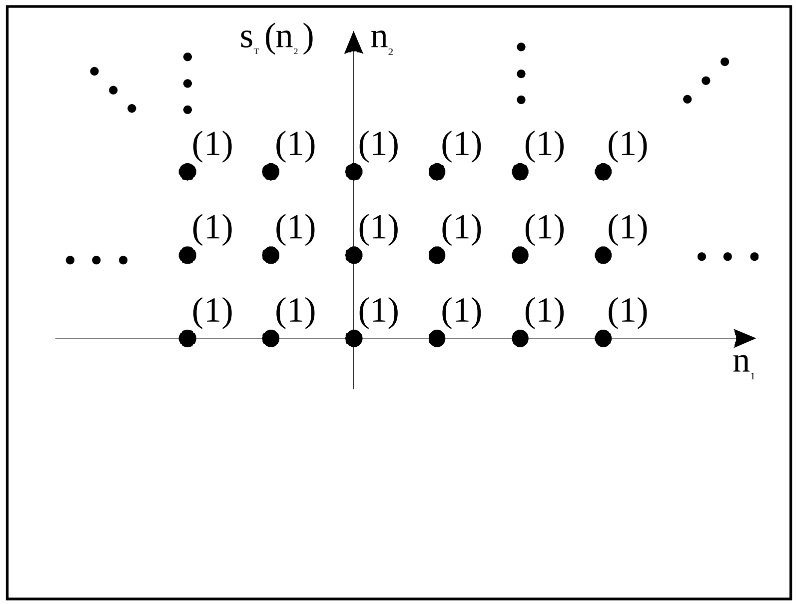
$$u(n_1, n_2) = s(n_1, n_2) - s(n_1 - 1, n_2) - s(n_1, n_2 - 1) + s(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

2D jednotkový skok (3/3)

<u>Špecifické jednotkové skoky</u> - nie je ekv. pre 1D

$$x(n_1,n_2)=s_T(n_1)=\begin{cases}1 & pre \quad n_1 \geq 0\\ 0 & inak\end{cases} \qquad x(n_1,n_2)=s_T(n_2)=\begin{cases}1 & pre \quad n_2 \geq 0\\ 0 & inak\end{cases}$$





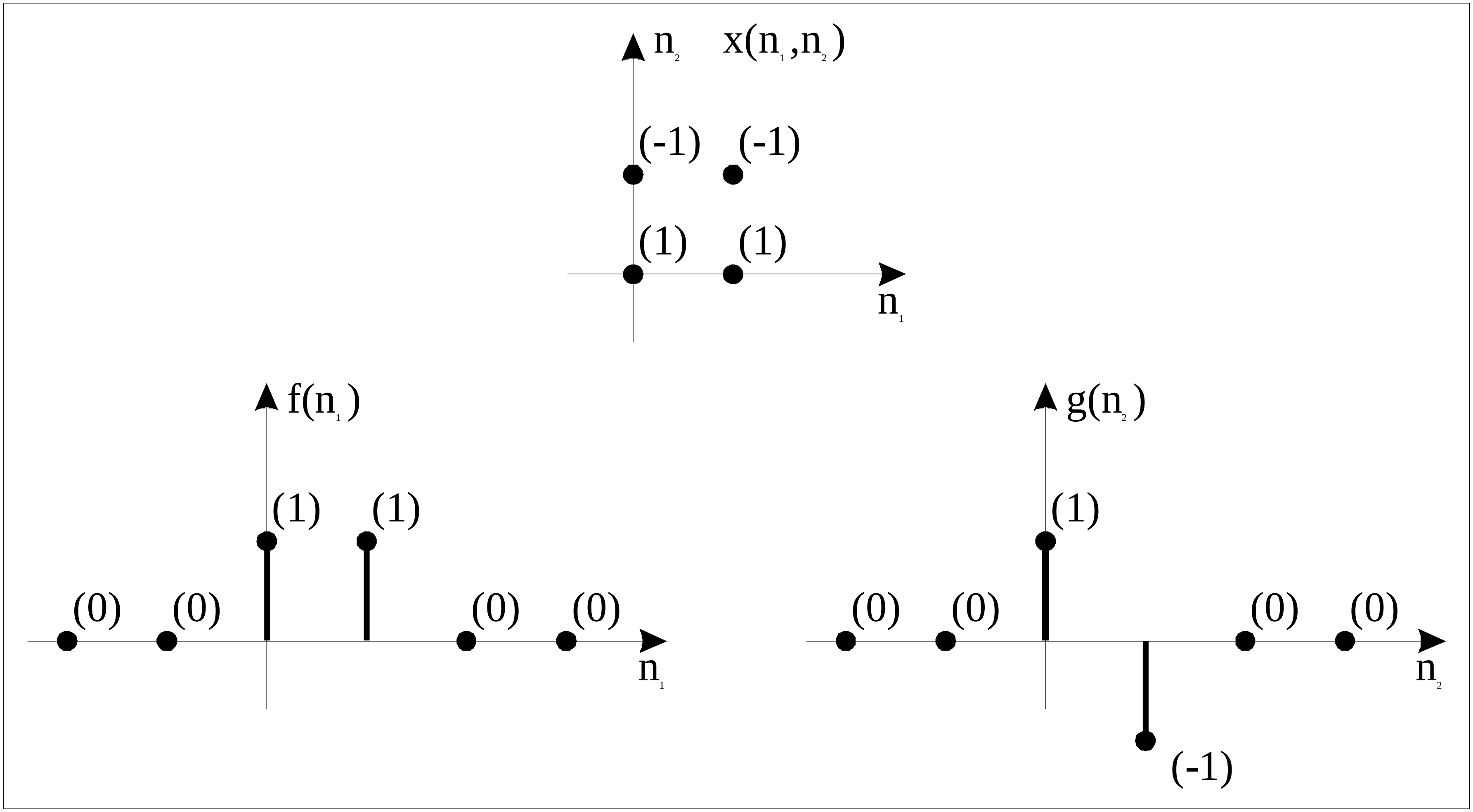
Separovateľné postupnosti (1/2)

$$x(n_1, n_2) = f(n_1) \cdot g(n_2)$$

- $f(n_1)$ - 1D postupnosť; fcia len n_1
- $g(n_2)$ - 1D postupnosť; fcia len n_2
- Kroneckerov impulz a jednotkový skok - separovateľné postupnosti

$$u(n_1, n_2) = u(n_1) \cdot u(n_2)$$
$$s(n_1, n_2) = s(n_1) \cdot s(n_2)$$

Separovateľné postupnosti (2/2)



Periodické postupnosti (1/3)

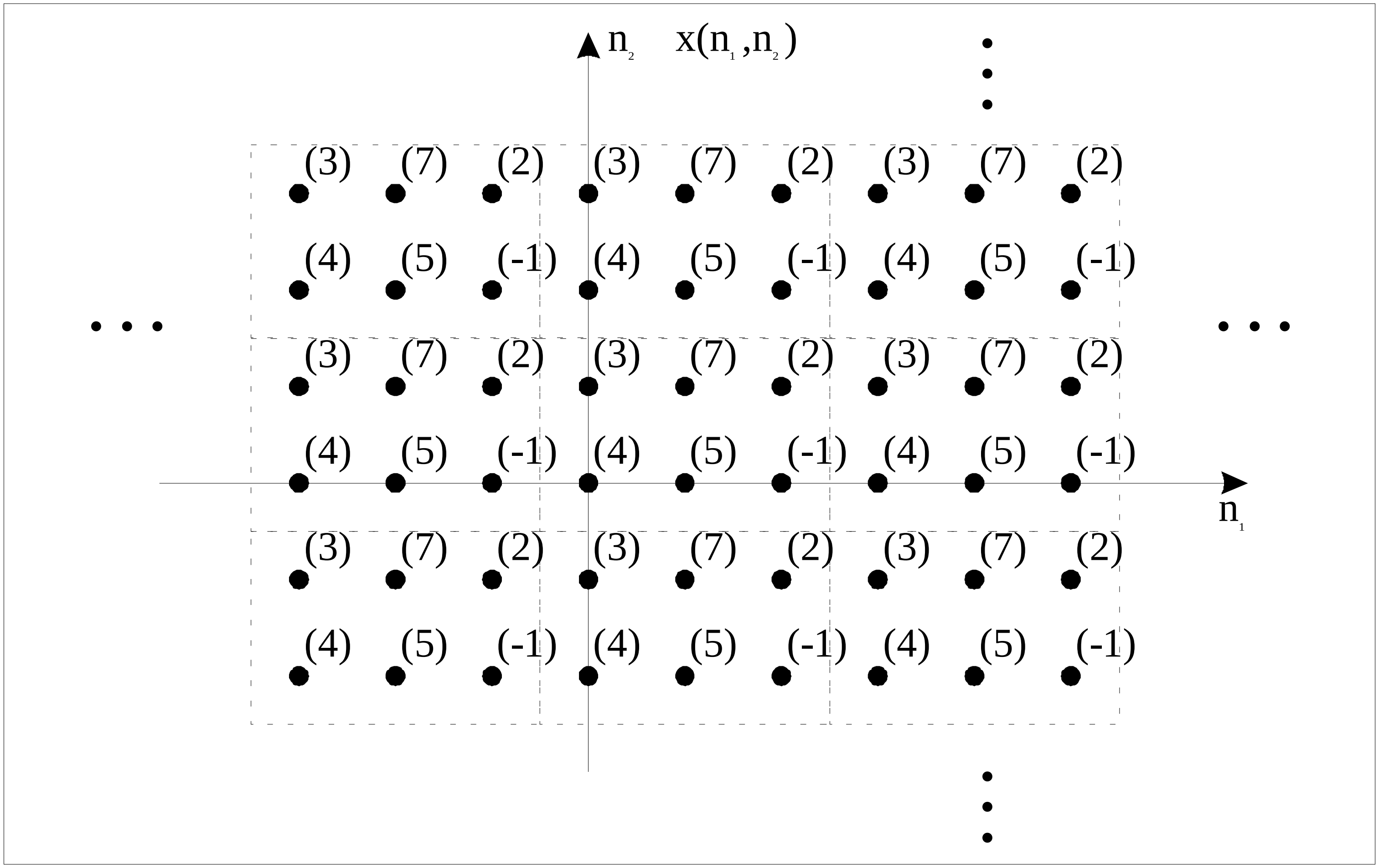
$$x(n_1, n_2) = x(n_1 + N_1, n_2) = x(n_1, n_2 + N_2) \quad pre \quad \forall (n_1, n_2)$$

- $x(n_1, n_2)$ - periodická postupnosť s periódou $N_1 x N_2$ (N_1 a N_2 - celé čísla)

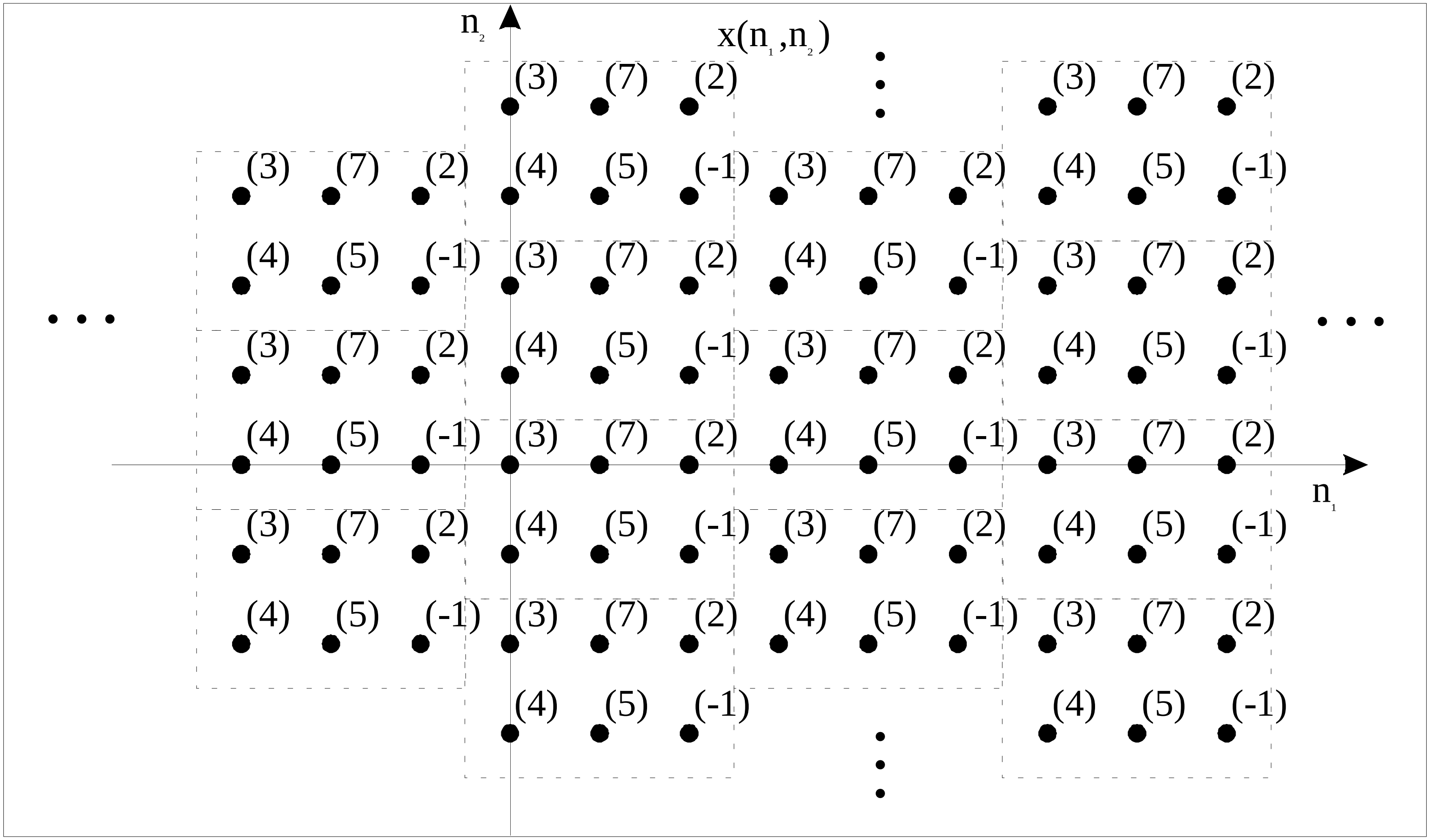
<u>Príklad:</u>

$$\cos(\pi \cdot n_1 + (\pi / 2) \cdot n_2) \quad perioda \quad 2x4$$

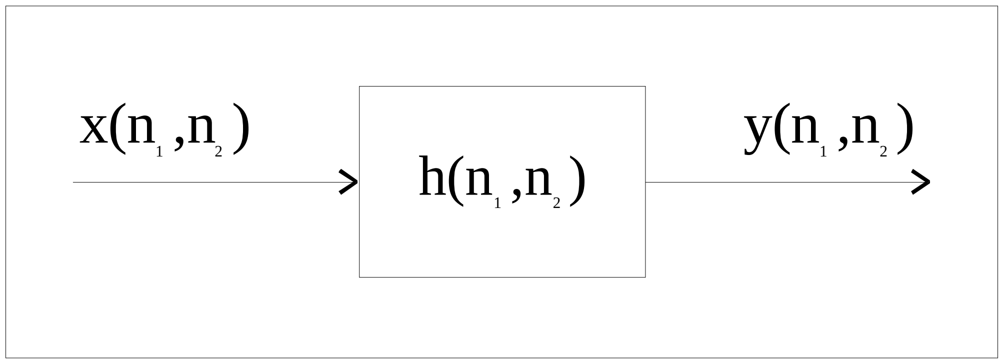
Periodické postupnosti (2/3)



Periodické postupnosti (3/3)



2D sústavy



$$y(n_1,n_2)=T[x(n_1,n_2)]$$

- *LSI systémy - Linear Shift-Invariance* - lineárny systém, invariantný proti posuvu

Linearita

$$T\left[a \cdot x_1(n_1,n_2) + b \cdot x_2(n_1,n_2)\right] = a \cdot y_1(n_1,n_2) + b \cdot y_2(n_1,n_2)$$

$x_1(n_1,n_2), x_2(n_1,n_2)$ - vstupné signály

$y_1(n_1,n_2), y_2(n_1,n_2)$ - výstupné signály

$T\left[x_1(n_1,n_2)\right] = y_1(n_1,n_2)$

$T\left[x_2(n_1,n_2)\right] = y_2(n_1,n_2)$

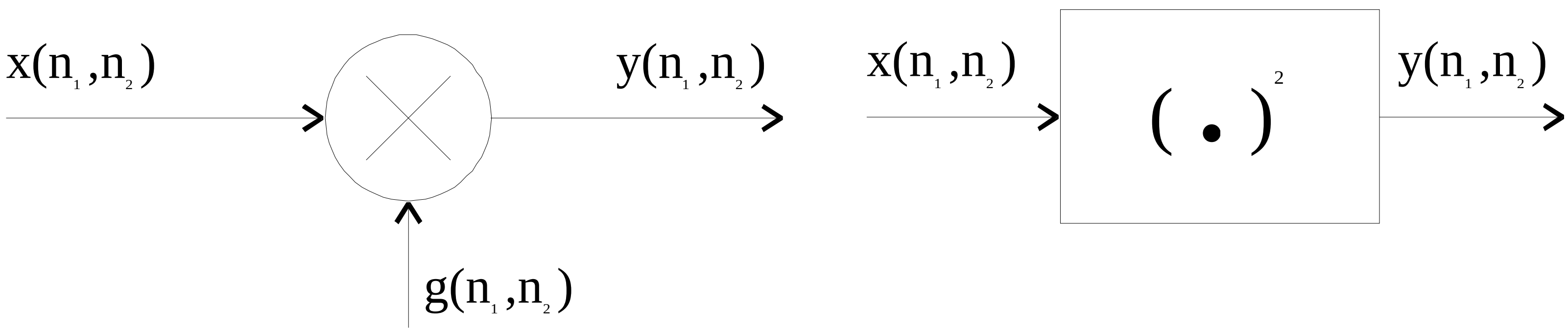
a, b - skalárne konštanty

Princíp superpozície a proporcionality

Invariantnosť proti posuvu

$$T[x(n_1-m_1,n_2-m_2)] = y(n_1-m_1,n_2-m_2) \qquad T[x(n_1,n_2)] = y(n_1,n_2)$$

<u>Príklady</u>



$y(n_1,n_2) = T[x(n_1,n_2)] = x(n_1,n_2)g(n_1,n_2)$

a)

$y(n_1,n_2) = T[x(n_1,n_2)] = x^2(n_1,n_2)$

b)

Impulzová charakteristika (1/2)

Predpoklady

- *lineárny systém*
- *systém invariantný proti posuvu*

$$y(n_1,n_2)=T[x(n_1,n_2)]=T\left[\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)u(n_1-k_1,n_2-k_2)\right]$$

$$=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)T[u(n_1-k_1,n_2-k_2)]$$

Impulzová charakteristika (2/2)

$$h(n_1, n_2) = T[u(n_1, n_2)]$$
$$h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = T[u(n_1 - k_1, n_2 - k_2)]$$

$$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)] = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

LSI systém je úplne charakterizovaný impulzovou odpoveďou h(n$_1$,n$_2$)

2D konvolúcia (1/10)

$$y(n_1,n_2)=x(n_1,n_2)*h(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)h(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

<u>Vlastnosti 2D konvolúcie:</u>

- Komutatívnosť

$$x(n_1,n_2)*y(n_1,n_2)=y(n_1,n_2)*x(n_1,n_2)$$

- Asociatívnosť

$$(x(n_1,n_2)*y(n_1,n_2))*z(n_1,n_2)=x(n_1,n_2)*(y(n_1,n_2)*z(n_1,n_2))$$

2D konvolúcia (2/10)

Vlastnosti 2D konvolúcie (pokračovanie):

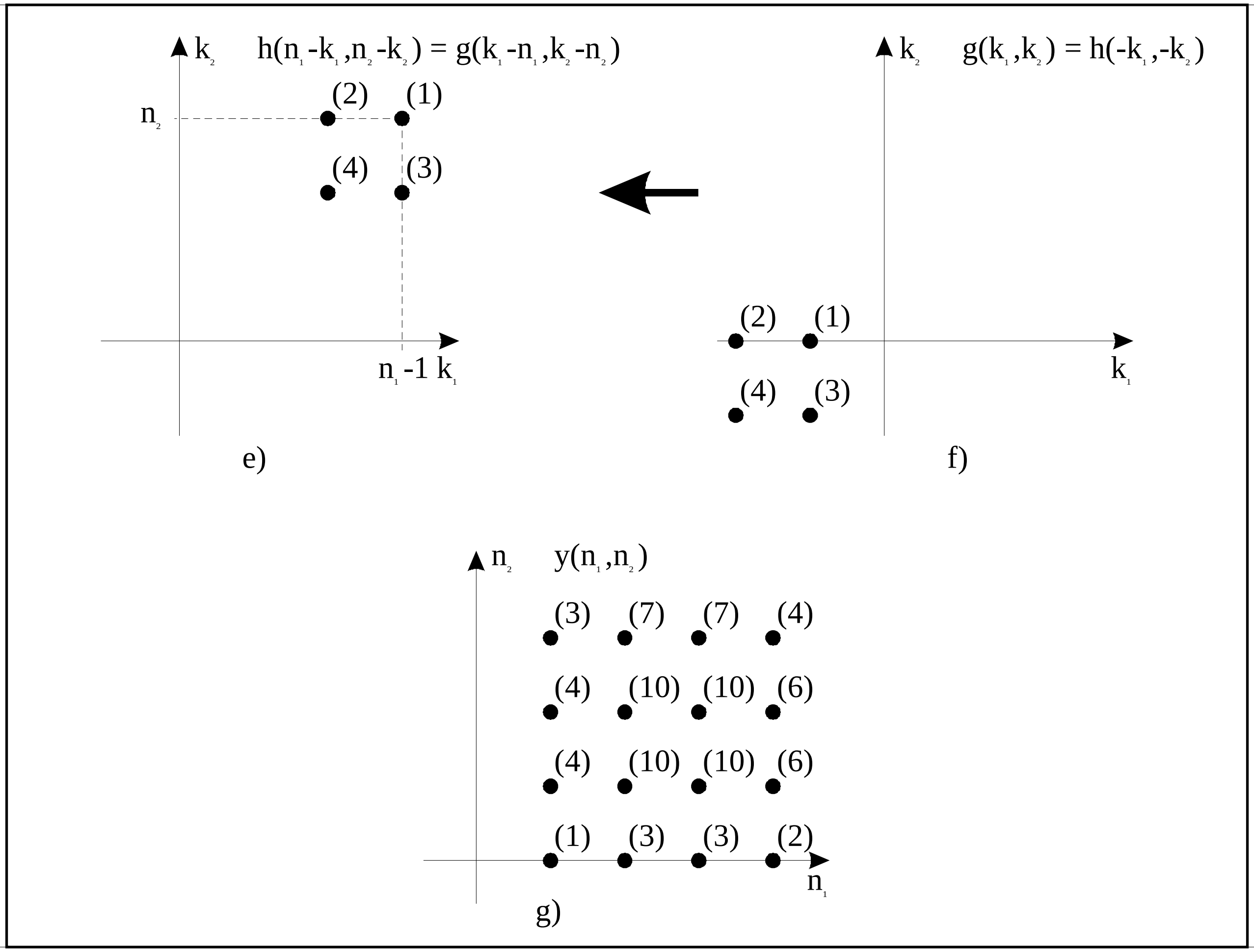
- Distributívnosť

$$x(n_1, n_2) * (y(n_1, n_2) + z(n_1, n_2)) = (x(n_1, n_2) * y(n_1, n_2)) + (x(n_1, n_2) * z(n_1, n_2))$$

- Konvolúcia s posunutým Kroneckerovým impulzom

$$x(n_1, n_2) * u(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

2D konvolúcia - graficky (3/10)



2D konvolúcia (4/10)

<u>Grafický postup pri výpočte 2D konvolúcie:</u>

- zámena n_1, n_2 v $h(n_1,n_2)$ a $x(n_1,n_2)$ za k_1, k_2
- zrkadlenie $h(k_1,k_2)$ proti začiatku súradnicovej sústavy
- posuv $h(-k_1,-k_2)$ o n_1 a n_2 bodov (určujú miesto, v ktorom sa počíta konvolúcia) v kladnom smere osí k_1 a k_2
- súčin prekrývajúcich sa bodov postupností $x(k_1,k_2)$ a $h(n_1-k_1, n_2-k_2)$ a súčet získaných súčinov; výsledkom je hodnota výstupnej postupnosti $y(n_1,n_2)$ v bode (n_1,n_2)

2D konvolúcia (5/10)

- *<u>Separovateľný LSI systém</u>* - $h(n_1,n_2)$ je separovateľná postupnosť
- zníženie výpočtovej náročnosti pri výpočte konvolúcie
- $x(n_1,n_2)$ - vstupná postupnosť rozmeru NxN
- $h(n_1,n_2)$ - imp. odpoveď rozmeru MxM

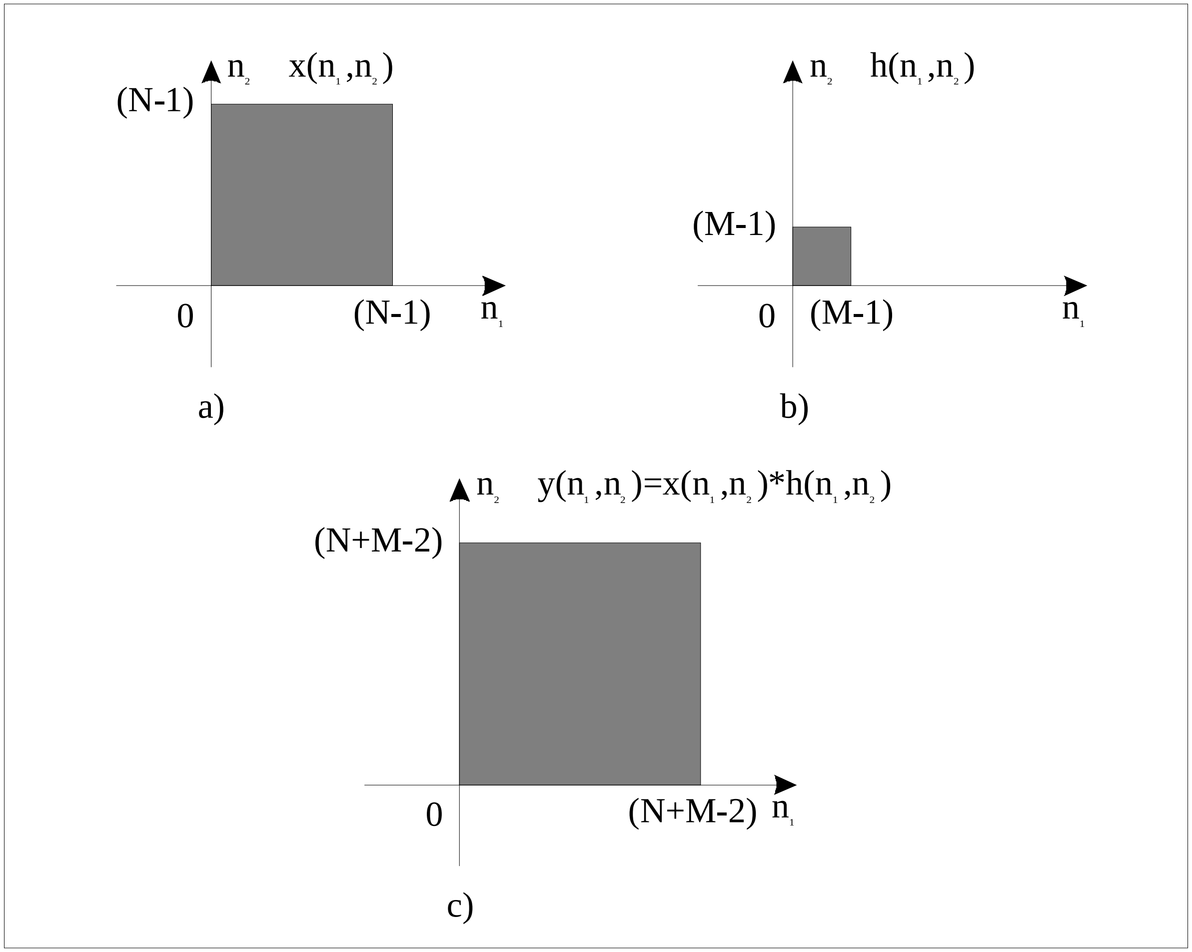
$$x(n_1,n_2)=0 \quad mimo \quad 0 \le n_1 \le N-1 \quad 0 \le n_2 \le N-1$$
$$h(n_1,n_2)=0 \quad mimo \quad 0 \le n_1 \le M-1 \quad 0 \le n_2 \le M-1$$

2D konvolúcia (6/10)

$$y(n_1,n_2)=x(n_1,n_2)*h(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)h(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

- $y(n_1,n_2)$ - výstupná postupnosť rozmeru (N+M-1)x(N+M-1)
- počet aritmetických operácií - $(N+M-1)^2M^2$ (1 aritmetická operácia - 1 násobenie a 1 sčítanie)

2D konvolúcia (7/10)



2D konvolúcia (8/10)

- $h(n_1,n_2)$ - separovateľná

$$h(n_1,n_2)=h_1(n_1)\cdot h_2(n_2)$$

$$h_1(n_1)=0 \quad mimo \quad 0\le n_1 \le M-1$$
$$h_2(n_2)=0 \quad mimo \quad 0\le n_2 \le M-1$$

$$y(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)h_1(n_1-k_1)h_2(n_2-k_2)$$

$$=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}h_1(n_1-k_1)\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)h_2(n_2-k_2)$$

$$f(k_1,n_2)=\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)h_2(n_2-k_2)$$ - 1D konvolúcia pre pevné k_1

2D konvolúcia (9/10)

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h_1(n_1 - k_1) f(k_1, n_2)$$ - 1D konvolúcia pre pevné n_2

Počet aritmetických operácií

- $NM(N+M-1)+M(N+M-1)^2$
- Úspora:

$$K = \frac{(N+M-1)^2 M^2}{NM(N+M-1)+M(N+M-1)^2}$$

2D konvolúcia (10/10)

NxN	***MxM***	***Nesep.***	***Separ.***	***K***
256x256	3x3	599076	397836	1.51
256x256	5x5	1690000	670800	2.52
256x256	7x7	3363556	950012	3.54

Diferenčná rovnica

$$\sum_{(k_1,k_2)\in R_b}\sum b(k_1,k_2)\,y(n_1-k_1,n_2-k_2)=\sum_{(k_1,k_2)\in R_a}\sum a(k_1,k_2)\,x(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

$a(k_1,k_2),\ b(k_1,k_2)$ - reálne postupnosti s konečným počtom nenulových hodnôt

$R_a,\ R_b$ - oblasť (k_1,k_2), kde je $a(k_1,k_2)$, resp. $b(k_1,k_2)$ nenulové

$$y(n_1,n_2)=\sum_{(k_1,k_2)\in R_a}\sum a(k_1,k_2)\,x(n_1-k_1,n_2-k_2)-\sum_{(k_1,k_2)\in R'_b}\sum b'(k_1,k_2)\,y(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

Fourierova transformácia (1/8)

- ***Dopredná FT:***

$$X(\Omega_1,\Omega_2)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}x(n_1,n_2)e_1^{-j\Omega_1 n_1}e_2^{-j\Omega_2 n_2}$$

Spektrum analyzovanej postupnosti

- ***Inverzná (spätná) FT:***

$$x(n_1,n_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Omega_1=-\pi}^{\pi}\int_{\Omega_2=-\pi}^{\pi}X(\Omega_1,\Omega_2)\cdot e_1^{j\Omega_1 n_1}e_2^{j\Omega_2 n_2}\,d\Omega_1\,d\Omega_2$$

$h(n_1,n_2) \quad \leftrightarrow \quad H(\Omega_1,\Omega_2)$ Frekvenčná char. LSI sústavy

Fourierova transformácia (2/8)

- $x(n_1,n_2)$ - fcia (reálna) diskr. prem. n_1, n_2
- $X(\Omega_1, \Omega_2)$ - fcia (komplexná) spoj. prem. Ω_1, Ω_2

$$X(\Omega_1,\Omega_2) = |X(\Omega_1,\Omega_2)| e^{j\Theta_X(\Omega_1,\Omega_2)} = X_R(\Omega_1,\Omega_2) + jX_I(\Omega_1,\Omega_2)$$

Spektrum diskrétnej postupnosti je spojité.

Spektrum diskrétnej postupnosti je periodické s periódou 2π x 2π.

$$X(\Omega_1,\Omega_2) = X(\Omega_1 + 2\pi, \Omega_2) = X(\Omega_1, \Omega_2 + 2\pi)$$

Fourierova transformácia (3/8)

Základné vlastnosti:

$$F\{x(n_1,n_2)\} = X(\Omega_1,\Omega_2) \qquad a \qquad F\{y(n_1,n_2)\} = Y(\Omega_1,\Omega_2)$$

- Linearita

$$a \cdot x(n_1,n_2) + b \cdot y(n_1,n_2) \quad \leftrightarrow \quad a \cdot X(\Omega_1,\Omega_2) + b \cdot Y(\Omega_1,\Omega_2)$$

- Konvolúcia

$$x(n_1,n_2) * y(n_1,n_2) \quad \leftrightarrow \quad X(\Omega_1,\Omega_2) \cdot Y(\Omega_1,\Omega_2)$$

- Násobenie

$$x(n_1,n_2) \cdot y(n_1,n_2) \quad \leftrightarrow \quad X(\Omega_1,\Omega_2) * Y(\Omega_1,\Omega_2)$$

Fourierova transformácia (4/8)

<u>Základné vlastnosti (pokračovanie):</u>

- Separovateľnosť

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1)x_2(n_2) \quad \leftrightarrow \quad X(\Omega_1, \Omega_2) = X_1(\Omega_1)X_2(\Omega_2)$$

- Veta o posunutí

$$x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \quad \leftrightarrow \quad X(\Omega_1, \Omega_2)e^{-j\Omega_1 m_1}e^{-j\Omega_2 m_2}$$

$$e^{-j\Psi_1 n_1}e^{-j\Psi_2 n_2}x(n_1, n_2) \quad \leftrightarrow \quad X(\Omega_1 - \Psi_1, \Omega_2 - \Psi_2)$$

- Parsevalova teoréma

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2)\overline{y(n_1, n_2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega_1=-\pi}^{\pi} \int_{\Omega_2=-\pi}^{\pi} X(\Omega_1, \Omega_2)\overline{Y(\Omega_1, \Omega_2)}\, d\Omega_1\, d\Omega_2$$

Fourierova transformácia (5/8)

Základné vlastnosti (pokračovanie):

- Parsevalova teoréma (pokr.)

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |x(n_1, n_2)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega_1=-\pi}^{\pi} \int_{\Omega_2=-\pi}^{\pi} |X(\Omega_1, \Omega_2)|^2 \, d\Omega_1 \, d\Omega_2$$

- Symetria

$$\begin{aligned}
x(-n_1, n_2) &\quad\leftrightarrow\quad X(-\Omega_1, \Omega_2) \\
x(n_1, -n_2) &\quad\leftrightarrow\quad X(\Omega_1, -\Omega_2) \\
x(-n_1, -n_2) &\quad\leftrightarrow\quad X(-\Omega_1, -\Omega_2) \\
\overline{x(n_1, n_2)} &\quad\leftrightarrow\quad \overline{X(-\Omega_1, -\Omega_2)}
\end{aligned}$$

Fourierova transformácia (6/8)

Základné vlastnosti (pokračovanie):

- Symetria (pokr.)

$$x(n_1, n_2): real \qquad \leftrightarrow \qquad X(\Omega_1, \Omega_2) = \overline{X(-\Omega_1, -\Omega_2)}$$

$$X_R(\Omega_1, \Omega_2), \left|X(\Omega_1, \Omega_2)\right| \quad - \text{párne symetrické}$$

$$X_I(\Omega_1, \Omega_2), \Theta_X(\Omega_1, \Omega_2) \quad - \text{nepárne symetrické}$$

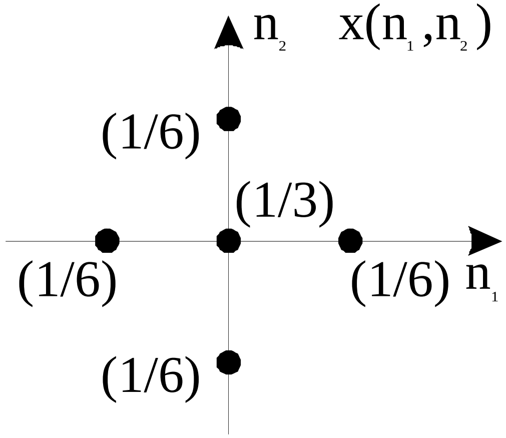
$$x(n_1, n_2): \text{reálne, párne} \qquad \leftrightarrow \qquad X(\Omega_1, \Omega_2): \text{reálne, párne}$$

$$x(n_1, n_2): \text{reálne, nepárne} \qquad \leftrightarrow \qquad X(\Omega_1, \Omega_2): \text{imag., nepárne}$$

Fourierova transformácia (7/8)

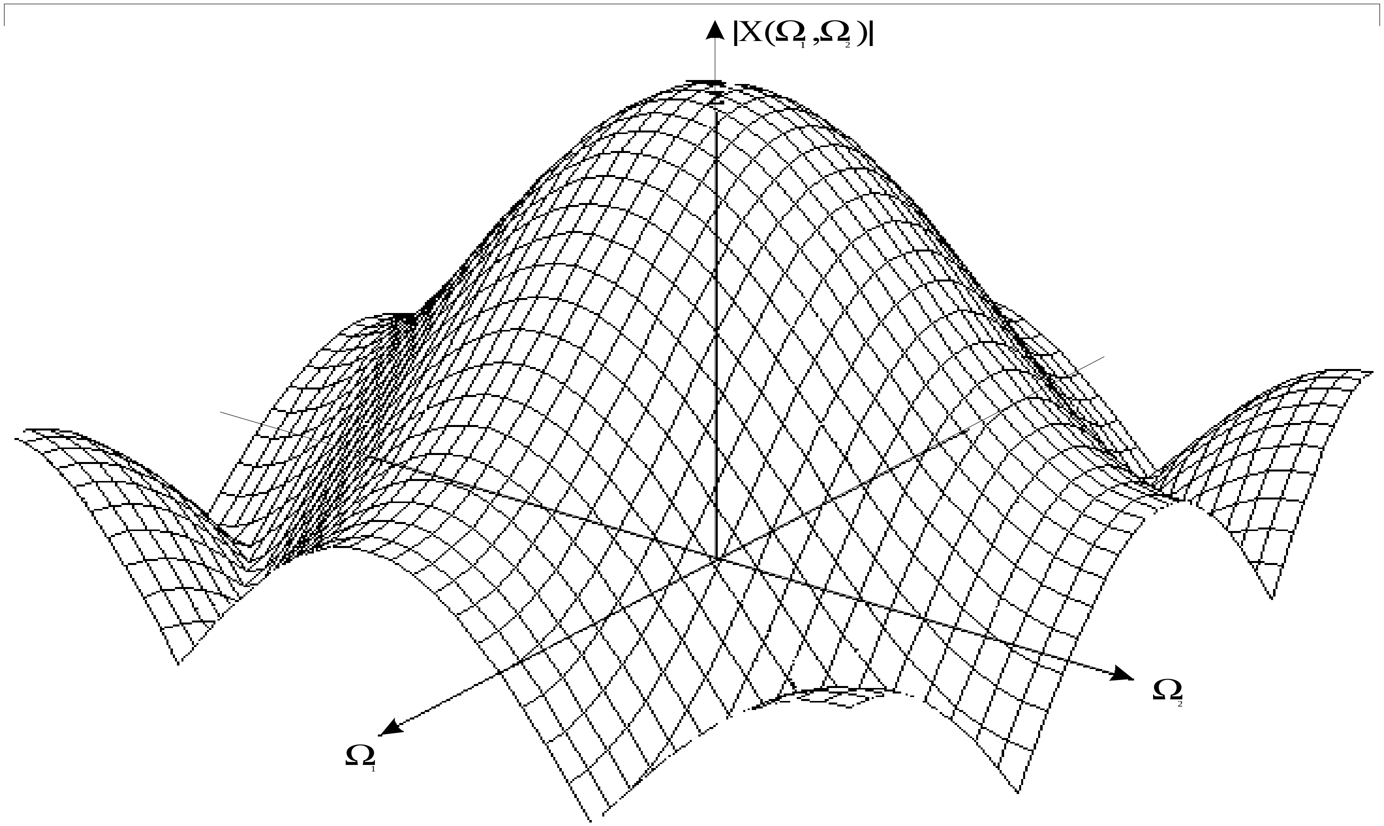
Príklad:

$$x(n_1,n_2)=\frac{1}{3}u(n_1,n_2)+\frac{1}{6}\left(u(n_1+1,n_2)+u(n_1-1,n_2)+u(n_1,n_2+1)+u(n_1,n_2-1)\right)$$



$$X(\Omega_1,\Omega_2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cos\Omega_1+\frac{1}{3}\cos\Omega_2$$

Fourierova transformácia (8/8)



2D Z-transformácia (1/3)

$$X(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

$$z_1 = r_1 \cdot e^{j\Omega_1}$$

$$z_2 = r_2 \cdot e^{j\Omega_2}$$

- komplexné premenné

Ak $r_1 = r_2 = 1$, tak

$$X(z_1, z_2)\Big|_{z_1 = e^{j\Omega_1}, z_2 = e^{j\Omega_2}} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) z_1^{-j\Omega_1 n_1} z_2^{-j\Omega_2 n_2} = X(\Omega_1, \Omega_2)$$

- frekvenčná charakteristika $x(n_1,n_2)$

2D Z-transformácia (2/3)

Základné vlastnosti:

$Z\{x(n_1,n_2)\} = X(z_1,z_2) \qquad a \qquad Z\{y(n_1,n_2)\} = Y(z_1,z_2)$

- Linearita

$$a \cdot x(n_1,n_2) + b \cdot y(n_1,n_2) \quad \leftrightarrow \quad a \cdot X(z_1,z_2) + b \cdot Y(z_1,z_2)$$

- Konvolúcia

$$x(n_1,n_2) * y(n_1,n_2) \quad \leftrightarrow \quad X(z_1,z_2) \cdot Y(z_1,z_2)$$

2D Z-transformácia (3/3)

Základné vlastnosti (pokračovanie):

- Separovateľné postupnosti

$$x_1(n_1)\cdot x_2(n_2) \quad \leftrightarrow \quad X_1(z_1)\cdot X_2(z_2)$$

- Posuv postupnosti

$$x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \quad \leftrightarrow \quad X(z_1, z_2)\cdot z_1^{-m_1}\cdot z_2^{-m_2}$$

- Symetria

$$x(-n_1, -n_2) \quad \leftrightarrow \quad X\left(z_1^{-1}, z_2^{-1}\right)$$

Prenosová funkcia (1/8)

$$\sum_{(k_1,k_2)\in R_b}\sum b(k_1,k_2)\,y(n_1-k_1,n_2-k_2)=\sum_{(k_1,k_2)\in R_a}\sum a(k_1,k_2)\,x(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\sum_{(k_1,k_2)\in R_b}\sum b(k_1,k_2)\,y(n_1-k_1,n_2-k_2)\,z_1^{-n_1}z_2^{-n_2}=$$

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\sum_{(k_1,k_2)\in R_a}\sum a(k_1,k_2)\,x(n_1-k_1,n_2-k_2)\,z_1^{-n_1}z_2^{-n_2}$$

$$\sum_{(k_1,k_2)\in R_b}\sum b(k_1,k_2)\,Y(z_1,z_2)\,z_1^{-k_1}z_2^{-k_2}=\sum_{(k_1,k_2)\in R_a}\sum a(k_1,k_2)\,X(z_1,z_2)\,z_1^{-k_1}z_2^{-k_2}$$

Prenosová funkcia (2/8)

$$H(z_1, z_2) = \frac{Y(z_1, z_2)}{X(z_1, z_2)} = \frac{\sum\limits_{(k_1,k_2)\in R_a}\sum a(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}}{\sum\limits_{(k_1,k_2)\in R_b}\sum b(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}} = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)}$$

$$\sum_{(k_1,k_2)\in R_a}\sum a(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} = A(z_1, z_2)$$

$$\sum_{(k_1,k_2)\in R_b}\sum b(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} = B(z_1, z_2)$$

<u>Vzťah medzi prenosovou fciou a impulzovou charakteristikou</u>

$$H(z_1, z_2) = Z\{h(n_1, n_2)\} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

Prenosová funkcia (3/8)

Frekvenčná charakteristika LSI sústav

$$H(z_1, z_2)\Big|_{z_1 = e^{j\Omega_1}, z_2 = e^{j\Omega_2}} = H(\Omega_1, \Omega_2)$$

$\Omega_1 = 2\pi \dfrac{f_1}{f_{VZ1}}, \Omega_2 = 2\pi \dfrac{f_2}{f_{VZ2}}$ Normované kruhové frekvencie

f_{VZ1}, f_{VZ2} Vzorkovacie frekvencie

Prenosová funkcia (4/8)

Príklad

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 + 2z_1^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z_1^{-1} + \frac{1}{4} z_2^{-1} + \frac{1}{8} z_2^{-2}} \qquad x(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & -1 \le n_1 \le 1 \quad -1 \le n_2 \le 1 \\ 0 & \mathit{inak} \end{cases}$$

$$y(n_1, n_2) = ?$$

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 + 2z_1^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z_1^{-1} + \frac{1}{4} z_2^{-1} + \frac{1}{8} z_2^{-2}} = \frac{Y(z_1, z_2)}{X(z_1, z_2)}$$

$$Y(z_1, z_2) - \frac{1}{2} z_1^{-1} Y(z_1, z_2) + \frac{1}{4} z_2^{-1} Y(z_1, z_2) + \frac{1}{8} z_2^{-2} Y(z_1, z_2) = X(z_1, z_2) + 2z_1^{-1} X(z_1, z_2)$$

Prenosová funkcia (5/8)

Pomocou inverznej Z-transformácie

$$y(n_1,n_2)-\frac{1}{2}y(n_1-1,n_2)+\frac{1}{4}y(n_1,n_2-1)+\frac{1}{8}y(n_1,n_2-2)=x(n_1,n_2)+2x(n_1-1,n_2)$$

$$y(n_1,n_2)=\underbrace{\frac{1}{2}y(n_1-1,n_2)-\frac{1}{4}y(n_1,n_2-1)-\frac{1}{8}y(n_1,n_2-2)}_{o(n_1,n_2)}+\underbrace{x(n_1,n_2)+2x(n_1-1,n_2)}_{i(n_1,n_2)}$$

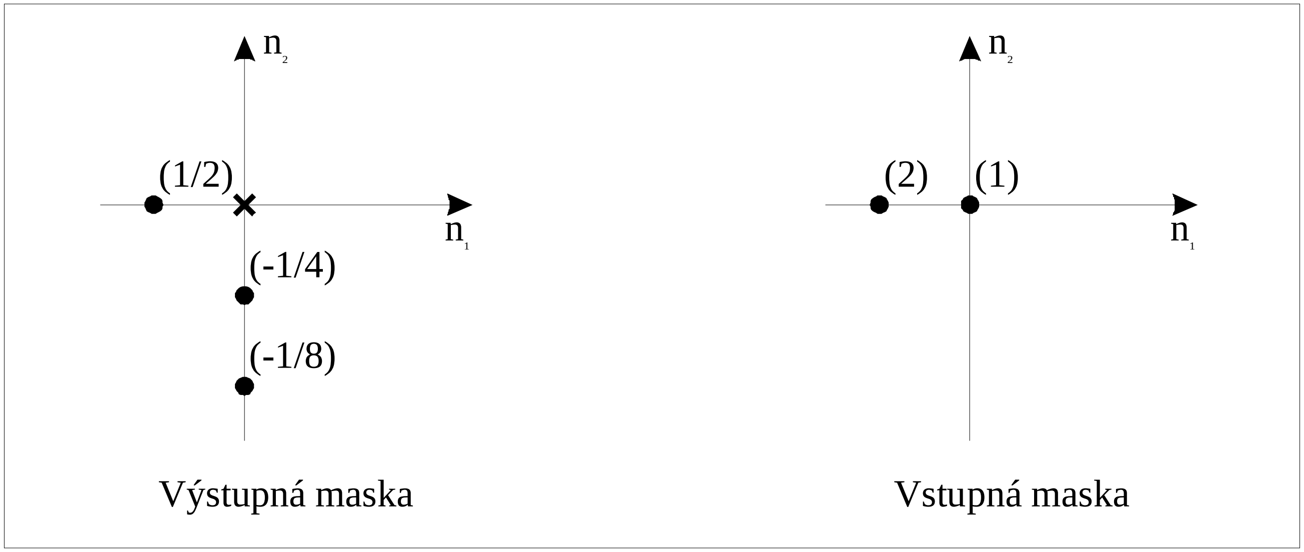
$$o(n_1,n_2)=\frac{1}{2}y(n_1-1,n_2)-\frac{1}{4}y(n_1,n_2-1)-\frac{1}{8}y(n_1,n_2-2)$$ Vplyv výstupného signálu

$$i(n_1,n_2)=x(n_1,n_2)+2x(n_1-1,n_2)$$ Vplyv vstupného signálu

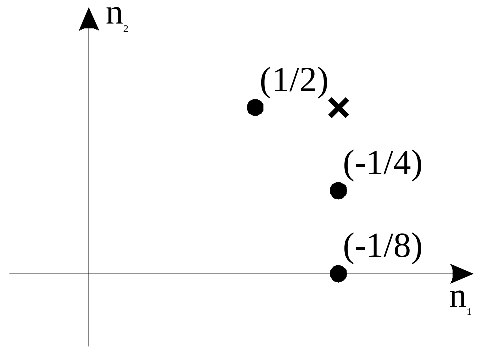
$$y(n_1,n_2)=o(n_1,n_2)+i(n_1,n_2)$$

Prenosová funkcia (6/8)

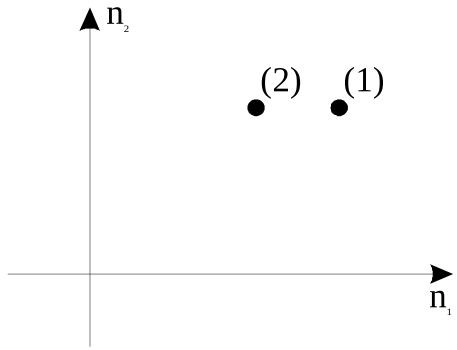
Výstupná a vstupná maska



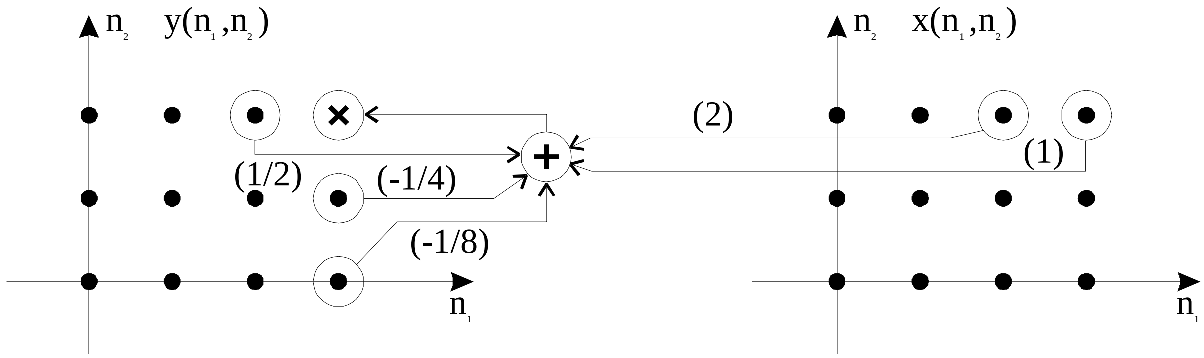
Prenosová funkcia (7/8)



a) Výstupná maska v bode (3,2)

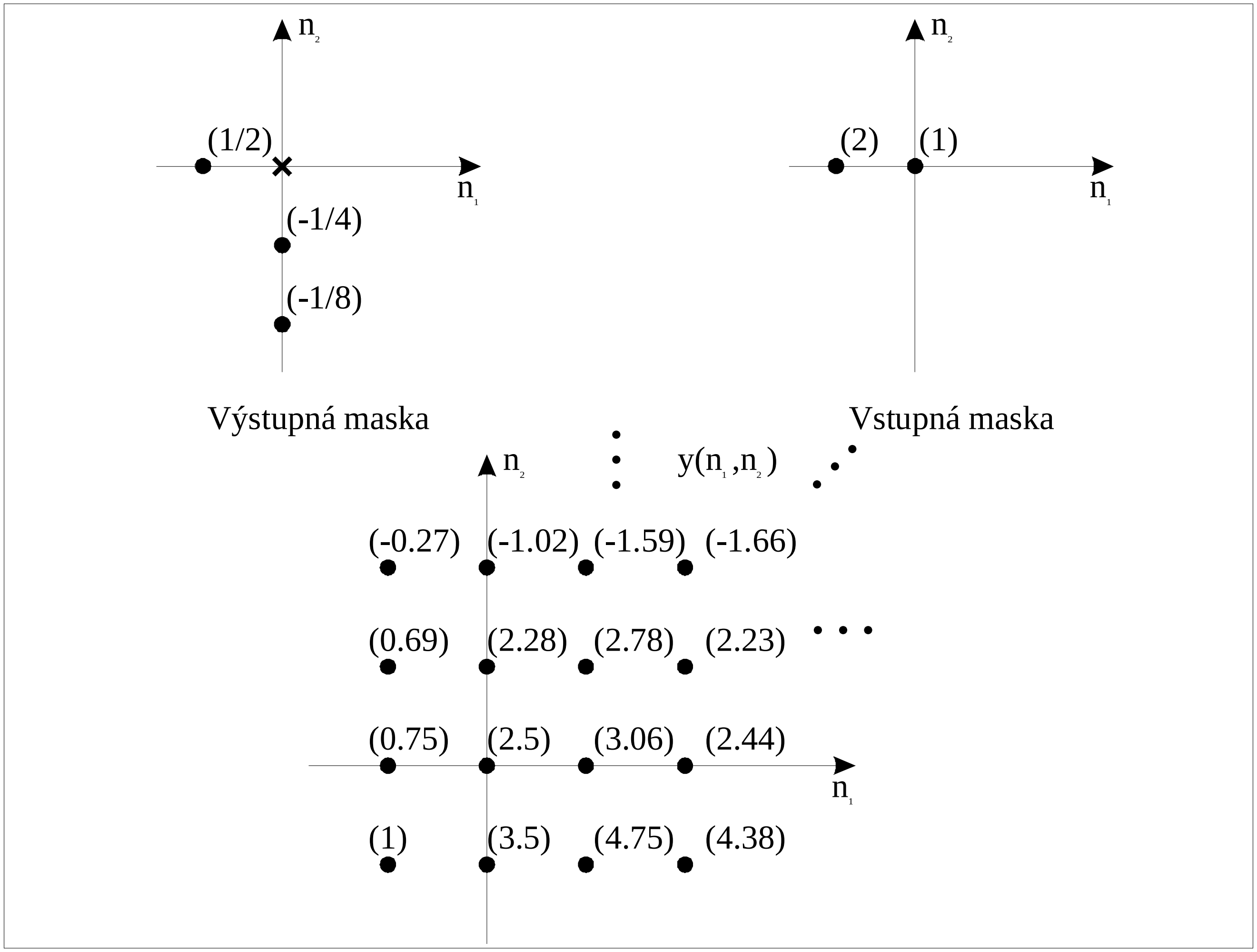


b) Vstupná maska v bode (3,2)



c) Princíp výpočtu hodnoty výstupného signálu v bode (3,2)

Prenosová funkcia (8/8)



LSI sústavy - súhrn

- 2D konvolúcia

$$y(n_1,n_2)=x(n_1,n_2)*h(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}x(k_1,k_2)h(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

- Diferenčná rovnica

$$y(n_1,n_2)=\sum\sum_{(k_1,k_2)\in R_a}a(k_1,k_2)x(n_1-k_1,n_2-k_2)-\sum\sum_{(k_1,k_2)\in R_b'}b'(k_1,k_2)y(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

- Prenosová funkcia

$$Y(z_1,z_2)=H(z_1,z_2)X(z_1,z_2)$$