Príklad

2.5. Určte transformáciu Z diskrétneho kosínusového signálu.

Funkcia, ktorá popisuje analógový kosínusový signál má tvar :

$$c(t) = A.\cos(2\pi ft - \alpha) = \frac{A}{2}e^{j(2\pi ft-\alpha)} + \frac{A}{2}e^{-j(2\pi ft-\alpha)} \qquad (2.37)$$

Môžeme ju interpretovať ako superpozíciu dvoch exponenciálnych vektorov s obráteným smerom natáčania. Prechod na diskrétny tvar umožňuje diskretizácia premennej času t podľa predpisu:

$$t \to n.T_{vz} = n\frac{1}{f_{vz}} \qquad \text{a}$$

$$2\pi.f.t = 2\pi f\frac{n}{f_{vz}} = 2\pi.\Phi.n = \Omega.n$$

Kosínusový diskrétny signál má potom tvar :

$$c(n) = A.\cos(\Omega n - \alpha) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega n-\alpha)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega n-\alpha)} \qquad (2.38)$$

a transformáciou Z rov.(2.38) dostaneme:

$$Z\{\mathbf{c}(n)\} = C(z) = \frac{A}{2}e^{-j\alpha}Z\{e^{j\Omega n}\} + \frac{A}{2}e^{j\alpha}Z\{e^{-j\Omega n}\} = C_1(z) + C_2(z) \qquad (2.39)$$

kde:

$$C_1(z) = \frac{A}{2}e^{-j\alpha}.\frac{1}{1-e^{j\Omega}.z^{-1}} \qquad (2.40)$$

a

$$C_2(z) = \frac{A}{2}e^{j\alpha}\frac{1}{1-e^{-j\Omega}z^{-1}} \qquad (2.41)$$

Ak porovnáme vzťah (2.32) so vzťahom (2.39) , tento predstavuje prenosovú funkciu $C(z)$ a má tvar:

$$C(z) = A.\frac{\cos\alpha - \cos(\Omega+\alpha).z^{-1}}{1-2.\cos\Omega.z^{-1}+z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad (2.42)$$

Impulzová charakteristika $h(n)$ tohoto systému je kosínusový signál v tvare (2.38) (systém generuje kosínusový signál). Potom už príslušnú diferenčnú rovnicu dostaneme v tvare:

$$y(n) = A.\cos\alpha.x(n) - A.\cos(\Omega+\alpha).x(n-1) + 2\cos\Omega.y(n-1) - y(n-2) \qquad (2.43)$$

Nie je ťažké sa presvedčiť, že ak na vstup privedieme jednotkový impulz $\delta(n)$, pričom systém má nulové začiatočné podmienky, na výstupe dostaneme skutočný signál $y(n) = c(n)$. Ak podrobne budeme skúmať činnosť tohoto systému, rov.(2.43) nás upozorní na jednu mimoriadne dôležitú skutočnosť: Pre $n \geq 2$ diferenčná rovnica sa redukuje na tvar:

$$y(n) = 2\cos\Omega.y(n-1) - y(n-2) \qquad (2.44)$$

ktorá reprezentuje vlastné kmity systému. Tie sú ale kosínusového typu a preto rov.(2.44) môžeme upraviť do tvaru:

$$\frac{y(n) + y(n-2)}{2.y(n-1)} = \cos\Omega \qquad (2.45)$$

Tento vzťah má na pravej strane konštantu, ktorej hodnota závisí iba od voľby pomerového kruhového kmitočtu $\Omega = 2\pi.\frac{f}{f_{vz}} = 2\pi.\Phi$.