
6.2.2 Nepriame metódy návrhu filtrov IIR

Dobre prepracované metódy návrhu analógových filtrov umožnili vznik skupiny nepriamych metód návrhu IIR filtrov. Všetky tieto metódy vychádzajú z návrhov klasických analógových filtrov, ktoré nám umožňujú pomerne jednoducho a rýchlo určiť prenosovú funkciu $H(p)$. Z tejto chceme získať prenosovú funkciu diskretného filtra $H(z)$. Vzťah medzi týmito prenosovými funkciami nie je obyčajná zámena komplexného parametra p za iný komplexný parameter z , ale predstavuje zložitú transformáciu.

Metódy, ktoré vychádzajú z navrhnutej prenosovej funkcie analógového filtra $H(p)$ sa nazývajú nepriame. Postup návrhu môžeme rozdeliť do nasledujúcich bodov:

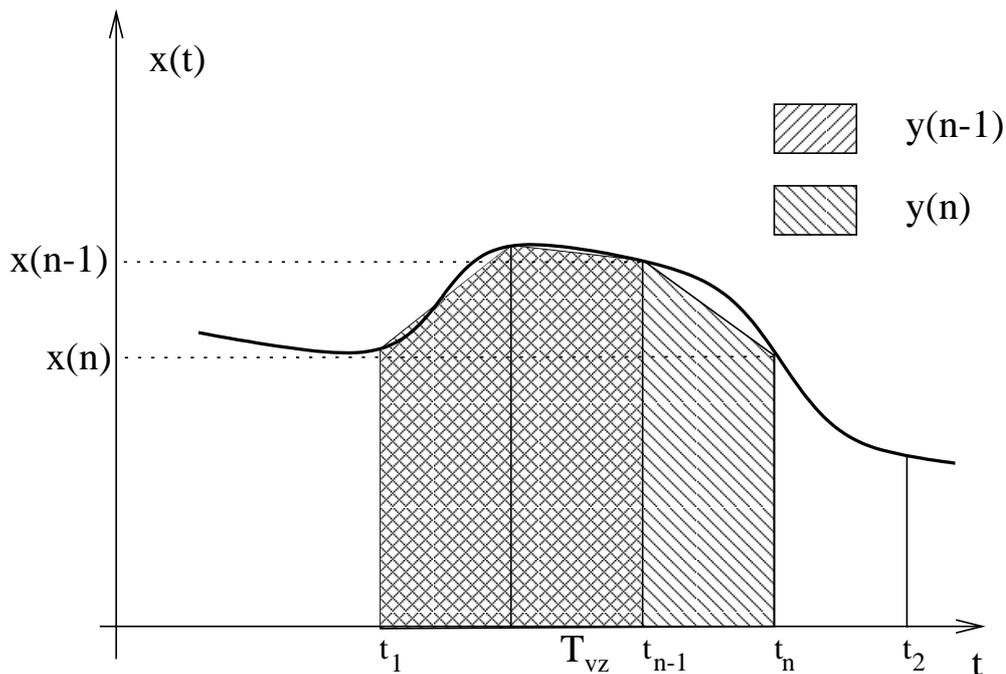
1. formulácia požiadaviek na diskretný filter
2. pretransformovanie požiadaviek na analógový normovaný dolnopriepustný filter (NDP)
3. návrh NDP spojitého filtra - nájdenie prenosovej funkcie $H(p)$
4. pretransformovanie funkcie $H(p)$ na funkciu $H(z)$.

V ďalšom opíšeme nasledujúce dve metódy:

- metódu bilineárnej transformácie,
- metódu invariantnosti impulzovej charakteristiky.

6.2.2.1 Metóda bilineárnej transformácie

Podstata metódy spočíva v matematickej interpretácii komplexnej premennej v Laplaceovej transformácii, kde p je operátor derivácie funkcie podľa času, ako aj skutočnosti, že v teórii diskretných sústav táto operácia nie je definovaná. Riešenie vychádza z numerického výpočtu derivácie. Táto úvaha bola opísaná v r.1947 A.Tustinom. Vysvetlime, čo je jej podstatou:



Obr.6.6 Numerická integrácia

Využijeme poznatok, že prenosová funkcia derivátora $H_D(z)$ je recipročná k prenosovej funkcii integrátora $H_I(z)$

$$H_D(z) = \frac{1}{H_I(z)} \quad (6.26)$$

kde D označuje deriváciu a I integráciu.

Z obr.6.6 vyjadríme prenosovú funkciu numerického integrátora s využitím obdĺžnikového pravidla. Majme danú funkciu $x(t)$. Integrál tejto funkcie určíme ako hodnotu $y(n)$ podľa predpisu:

$$y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{2} \cdot T_{vz} \quad (6.27)$$

kde $T_{vz} = \frac{1}{f_{vz}}$ je vzdialenosť medzi vzorkami funkcie $x(t)$. Ak interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ rovnomerne rozdelíme na úseky dĺžky T_{vz} , môžeme od začiatkovej hodnoty $y(-1)$, ktorá je nulová, až po $n = n_2$, ktorá odpovedá hodnote t_2 dostať aproximáciu hľadaného integrálu. Výsledok bude tým presnejší, čím je interval T_{vz} menší (čím je väčšie f_{vz}).

Rov.(6.27) je vlastne diferenčnou rovnicou diskretného integrátora. Ak na túto rovnicu aplikujeme transformáciu Z , dostaneme:

$$Y(z) = Y(z) \cdot z^{-1} + \frac{T_{vz}}{2} [X(z) + X(z) \cdot z^{-1}] \quad (6.28)$$

a z nej

$$H_I(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_{vz}}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (6.29)$$

čo je prenosová funkcia integrátora. Prenosovú funkciu derivátora dostaneme jednoduchou inverziou $H_I(z)$ (rov.(6.26)).

$$H_D(z) = \frac{2}{T_{vz}} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (6.30)$$

Obidve funkcie, $H_I(z)$ aj $H_D(z)$ predstavujú tzv. bilinéarne relácie. Tustinov derivátor môžeme využiť pri transformácii prenosovej funkcie spojitého systému $H(p)$ základnou jednoduchou substitúciou. Každú mocninu p nahradíme rovnakou mocnicou $H_D(z)$, presne podľa princípu frekvenčných transformácií. Túto transformáciu môžeme vyjadriť predpisom:

$$p^n \rightarrow [H_D(z)]^n = \alpha^n \cdot \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]^n \quad (6.31)$$

Použitie bilinéarnej transformácie vedie k prenosovej funkcii $H(z)$ rovnakého rádu ako je najvyšší rád prenosovej funkcie analógového filtra .

Vlastnosti takto získanej diskkrétnej sústavy sú ovplyvňované vlastnosťami funkcie $H_D(z)$.

Zistíme, aké má $H_D(z)$ frekvenčné charakteristiky. Rov.(6.30) upravme:

$$\alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \alpha \cdot \frac{z^{1/2} - z^{-1/2}}{z^{1/2} + z^{-1/2}} \quad (6.32)$$

Dosadením $z = e^{j\Omega}$ dostávame frekvenčnú charakteristiku

$$H_D(\Omega) = \alpha \cdot \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}} = j \cdot \alpha \cdot \frac{\sin \frac{\Omega}{2}}{\cos \frac{\Omega}{2}} = j \cdot \alpha \cdot \tan \frac{\Omega}{2} \quad (6.33)$$

Táto transformačná funkcia $H_D(e^{j\Omega})$ má v celom rozsahu pomerového kmitočtu rýdzoimaginárny charakter. Jej priebeh je nakreslený na obr.6.7. Musíme si uvedomiť, že rozsah $\Omega \in \langle 0, \pi \rangle$ v diskkrétnej sústave odpovedá kladnej normovanej poloosi $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ v spojitaj sústave, pričom koncové body sú jednoznačné a nezáleží pri nich na hodnote α . Voľbou tejto konštanty môžeme teda zabezpečiť presné stotožnenie ešte jedného bodu frekvenčnej charakteristiky diskkrétnej sústavy (obr.6.7). Použijeme k tomu vzťah (6.34)

$$\alpha \cdot \tan \frac{\Omega_x}{2} = \omega_x \quad (6.34)$$

z ktorého určíme parameter α

$$\alpha = \omega_x \cdot \frac{1}{\tan \frac{\Omega_x}{2}} \quad (6.35)$$

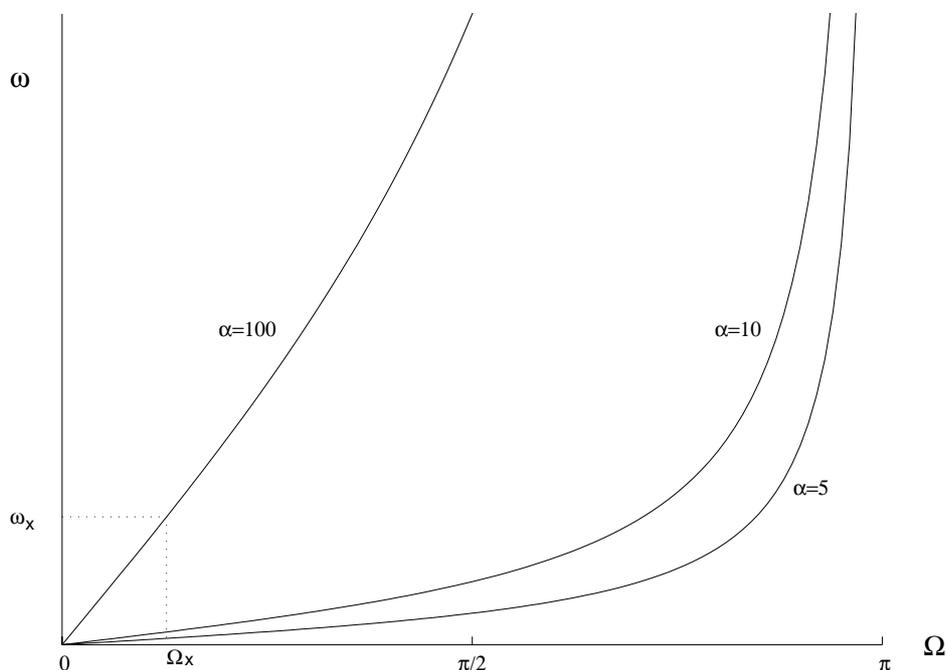
resp.

$$\alpha = \omega_x \cdot \cot \frac{\Omega_x}{2} \quad (6.36)$$

Vďaka monotónnosti a spojitosti funkcie opísanej rov.(6.33), táto metóda mení spojité sústavy na diskkrétne bez toho, aby sa v ich frekvenčných charakteristikách prejavili nepriaznivé vplyvy vzorkovania, pričom zabezpečí pretransformovanie frekvenčnej charakteristiky spojitého originálu v celom rozsahu do základnej periódy frekvenčnej charakteristiky diskkrétnej sústavy. Pri transformácii nastane iba nelineárne prečíslovanie frekvenčnej osi v súhlase s funkciou $\alpha \cdot \tan \frac{\Omega}{2}$.

Úplne sa zachovávajú vlastnosti magnitudovej frekvenčnej charakteristiky originálu (teda dolnopriepustný filter ostáva dolnopriepustným aj v diskkrétnej oblasti, monotónny priebeh ostáva monotónnym, zvlnený ostáva zvlneným). Napriek tomu ak je fázová frekvenčná charakteristika originálu lineárna, mení sa na nelineárnu.

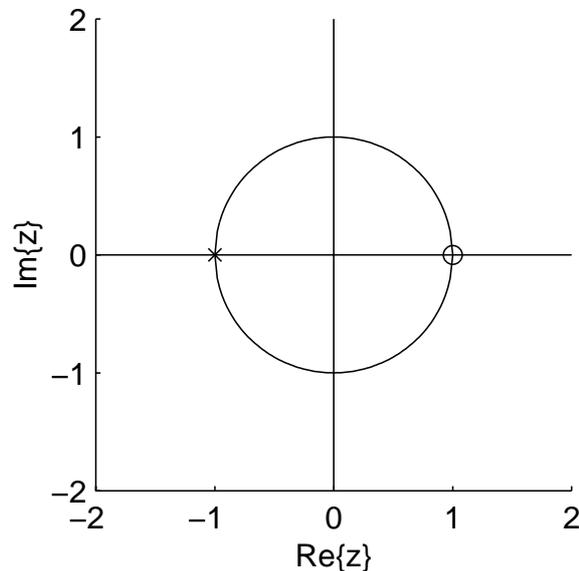
Práve preto je metóda založená na bilineárnej transformácii výhodná pri návrhu diskrétnych systémov kde kladieme dôraz na kvalitatívne vlastnosti magnitudovej frekvenčnej charakteristiky, resp. tlmenia. Spomínaná nevýhoda v oblasti fázovej charakteristiky nie je pre nás rušivá, lebo lineárnu fázovú charakteristiku môžeme realizovať bez problémov pomocou FIR filtrov. (pozri kapitola 5).



Obr.6.7 Frekvenčná charakteristika $H_D(z)$

Pozrime sa, ako bilineárna transformácia ovplyvňuje polohu koreňov prenosovej funkcie filtra.

Zo vzťahu (6.32) je jasné, že prenosová funkcia derivátora má jednoduché reálne korene $z_0 = 1$ a $z_x = -1$. Na obr.6.8 je nakreslená ich poloha.



Obr.6.8. Rozloženie nulových bodov a pólov $H_D(z)$

Predpokladajme, že prenosová funkcia analógového filtra má tvar:

$$H(p) = \frac{1}{p+1} \quad (6.37)$$

a v komplexnej p rovine má teda jeden pól, ktorý je umiestnený v bode $p_x = -1$ (obr.6.9a). Po transformácii každého pólu prenosovej funkcie $H(p)$ do roviny z dostávame jeden pól a jeden nulový bod prenosovej funkcie digitálneho filtra $H(z)$. Ak dosadíme $H_D(z)$ do $H(p)$, z rov.(6.37) dostávame:

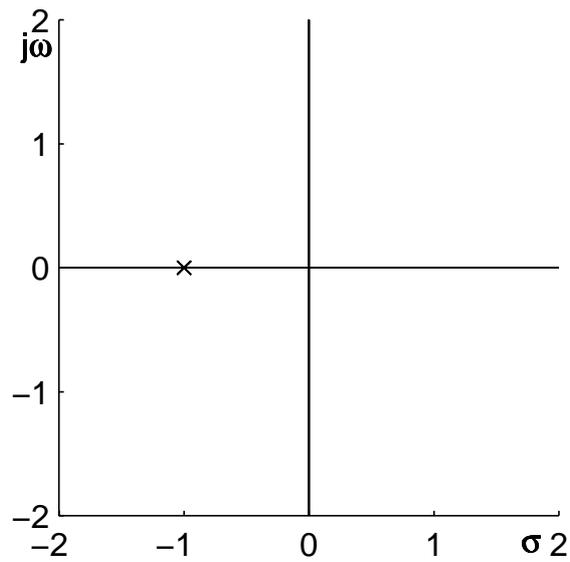
$$H(z) = \frac{1}{\alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1+z^{-1}}{\alpha - \alpha \cdot z^{-1} + 1 + z^{-1}} = \frac{z+1}{z(\alpha+1) + (1-\alpha)} \quad (6.38)$$

Korene prenosovej funkcie digitálneho filtra sú

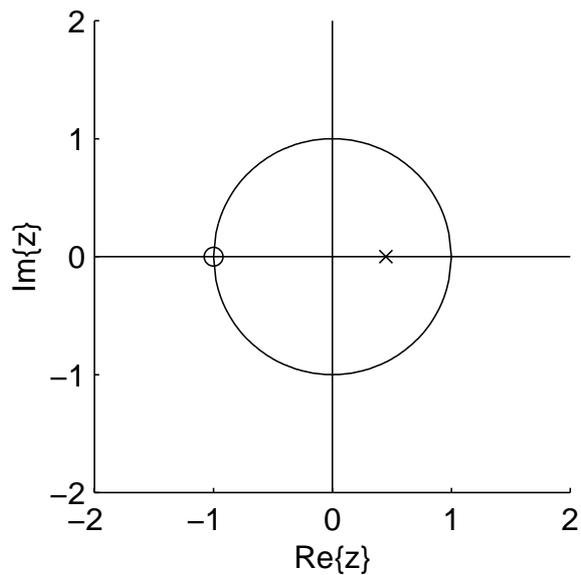
$$z_0 = -1 \text{ a } z_x = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (6.39)$$

a ich rozloženie v komplexnej rovine je na obr.6.9b.

Zo vzťahu (6.39) je zrejmé, že hodnota konštanty ovplyvňuje polohu pólu. Ak si uvedomíme, že konštantu súvisí s hodnotou f_{vz} podľa rov.(6.29), potom zväčšenie f_{vz} posúva pól bližšie k jednotkovej kružnici a naopak.



a/



b/

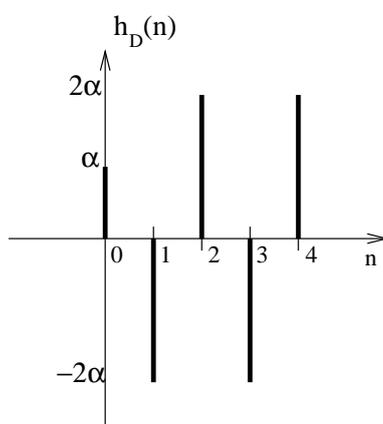
Obr.6.9 Rozloženie koreňov prenosovej funkcie a) $H(p)$ a b) $H(z)$

Ako vyzerá impulzová charakteristika $h_D(n)$? Vychádzame z rov.(6.30)

$$\begin{aligned}
 & \alpha \cdot (1 - z^{-1}) : (1 + z^{-1}) = \alpha - 2\alpha \cdot z^{-1} + 2\alpha \cdot z^{-2} - 2\alpha \cdot z^{-3} + \dots \\
 & \underline{-\alpha \cdot (1 + z^{-1})} \\
 & \quad -2\alpha \cdot z^{-1} \\
 & \quad \underline{2\alpha \cdot z^{-1} + 2\alpha \cdot z^{-2}} \\
 & \quad \quad 2\alpha \cdot z^{-2} \\
 & \quad \quad \underline{-2\alpha \cdot z^{-2} - 2\alpha \cdot z^{-3}} \\
 & \quad \quad \quad -2\alpha \cdot z^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{h}_D(n) = \{\alpha, -2\alpha, 2\alpha, -2\alpha, \dots\} \tag{6.40}$$

čo je impulzová charakteristika na hranici stability (Obr.6.10).



Obr.6.10 Impulzová charakteristika $h_D(n)$

Základom návrhu IIR filtrov pomocou bilineárnej Tustinovej transformácie je návrh analógového filtra typu "normovaný dolný priepust" (ďalej NDP) na báze prevádzkových parametrov. Týmto návrhom sa nebudeme podrobne zaoberať, jeho podstatou je riešenie aproximačnej úlohy, teda nájsť funkciu, ktorá bude aproximovať prevádzkové tlmenie analógového filtra. Označme si maximálne tlmenie v pásme prepúšťania (PP) ako A_{\max} a šírku PP $0 \div \omega_k$, minimálne tlmenie v pásme tlmenia (PT) ako A_{\min} a šírku PT $\omega_k \rightarrow \infty$. Pri riešení tejto úlohy vychádzame z charakteristickej rovnice filtra

$$G(p) \cdot G(-p) = 1 + \varphi(p) \cdot \varphi(-p) \quad (6.41)$$

resp.

$$G(j\omega) \cdot G(-j\omega) = 1 + \varphi(j\omega) \cdot \varphi(-j\omega) \quad (6.42)$$

kde $G(p)$ je prevádzkový činiteľ prenosu,
 $\varphi(p)$ je filtračná funkcia

Rov.(6.42) môžeme prepísať do tvaru

$$|G(j\omega)|^2 = 1 + |\varphi(j\omega)|^2 \quad (6.43)$$

resp. po znormovaní požiadaviek vo frekvenčnej oblasti na hranicu pásma prepúšťania ω_k

$$\left| G\left(j\frac{\omega}{\omega_k}\right) \right|^2 = 1 + \left| \varphi\left(j\frac{\omega}{\omega_k}\right) \right|^2 \quad (6.44)$$

a z toho je prevádzkové tlmenie $A\left(j\frac{\omega}{\omega_k}\right)$

$$A\left(j\frac{\omega}{\omega_k}\right) = 10 \cdot \log \left[1 + \left| \varphi\left(j\frac{\omega}{\omega_k}\right) \right|^2 \right] \quad (6.45)$$

Rov.(6.45) sa využíva pri aproximácii prevádzkového tlmenia pomocou filtračnej funkcie. Riešenie tohoto problému nie je jednoznačnou úlohou. Splnenie stanovených požiadaviek možno dosiahnuť rôznymi filtračnými funkciami. Mnohé z nich sú bežne používané a filtre,navrhnuté pomocou nich, sa nazývajú menami týchto funkcií. Najznámejšie z nich, ktoré v ďalšom opíšeme, sú:

- funkcia typu Butterworth
- funkcia typu Čebyšev
- funkcia typu Cauer-Čebyšev.

6.2.2.1.1 Filter typu Butterworth

Úvodom si zavedieme substitúciu, ktorú budeme v celom ďalšom texte využívať:

$$\frac{p}{\omega_k} = s \quad (6.46)$$

potom rov.(6.41) bude mať tvar:

$$G(s) \cdot G(-s) = 1 + \varphi(s) \cdot \varphi(-s) \quad (6.47)$$

Filtračná funkcia typu Butterworth je:

$$\varphi(s) = \varepsilon \cdot s^n \quad (6.48)$$

a po jej dosadení do rov.(6.47) dostávame:

$$G(s) \cdot G(-s) = 1 + \varepsilon \cdot s^n \cdot \varepsilon \cdot (-s)^n = 1 + \varepsilon^2 \cdot s^n \cdot (-s)^n = 1 + \varepsilon^2 \cdot (-1)^n \cdot s^{2n} \quad (6.49)$$

z čoho pre n párne rov.(6.49) prechádza do tvaru:

$$G(s) \cdot G(-s) = 1 + \varepsilon^2 \cdot s^{2n} \quad (6.50)$$

a pre n nepárne do tvaru:

$$G(s) \cdot G(-s) = 1 - \varepsilon^2 \cdot s^{2n} \quad (6.51)$$

Ak máme definované požiadavky na veľkosť prevádzkového tlmenia v pásme prepúšťania $A_{\max}[dB]$ a v pásme tlmenia $A_{\min}[dB]$, môžeme z rov.(6.50) napísať v tvare:

$$A(\Omega) = 10 \cdot \log \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_K} \right)^{2n} \right) \quad (6.52)$$

a z tejto rovnice z požiadaviek na PP ($\frac{\Omega_K}{\Omega_K} = 1$) vyjadrimo ε

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1 \quad (6.53)$$

a z požiadaviek na PT vyjadrimo stupeň filtra n

$$n \geq \frac{\log \left(\frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1} \right)}{2 \cdot \log \left(\frac{\Omega_K}{\Omega_K} \right)} \quad (6.54)$$

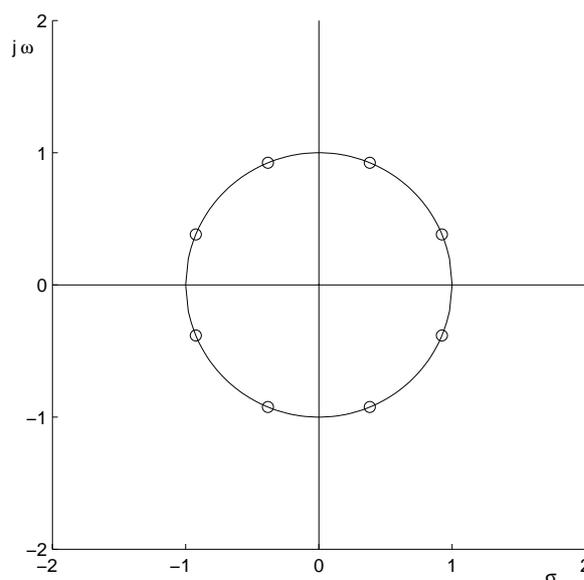
Z rov.(6.53) je zrejmé, že ak $A_{\max} = 3dB$ (čo je maximálne dovolené prevádzkové tlmenie v PP), potom $\varepsilon = 1$.

Z rov.(6.54) určíme stupeň n ktorý musí byť celé číslo. Vypočítaním ε a n určíli sme filtračnú funkciu typu Butterworth. Po jej dosadení do rov.(6.47) vypočítame korene prevádzkového činiteľa prenosu $G(s)$ (nulové body). Tieto ležia na kružnici, ktorej polomer je $\frac{1}{n\sqrt{\varepsilon}}$, a v prípade, že $\varepsilon = 1$ je polomer rovný 1. Rozloženie koreňov pre n párne (obr.6.11) je:

$$s_k = e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \quad (6.55)$$

a pre n nepárne

$$s_k = e^{j\frac{2k\pi}{2n}} \quad (6.56)$$



Obr.6.11 Rozloženie koreňov prevádzkového činiteľa prenosu $G(s)$ pre filter typu Butterworth

Vzťah medzi prevádzkovým činiteľom prenosu a prenosovou funkciou je daný rovnicou:

$$H(s) = \frac{1}{G(s)} \quad (6.57)$$

a po dosadení rov.(6.50), resp. (6.51), dostávame:

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 s^{2n}} \quad (6.58)$$

resp.

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 - \varepsilon^2 (s)^{2n}} \quad (6.59)$$

Magnitúdovú frekvenčnú charakteristiku dostaneme, ak za s dosadíme $j\frac{\omega}{\omega_k}$. Rov.(6.58), resp. (6.59) nadobudnú tvar:

$$\left| H\left(j\frac{\omega}{\omega_k}\right) \right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^{2n}} \quad (6.60)$$

resp.

$$\left| H\left(j\frac{\omega}{\omega_k}\right) \right|^2 = \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^{2n}} \quad (6.61)$$

Priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky je na obr.6.12.

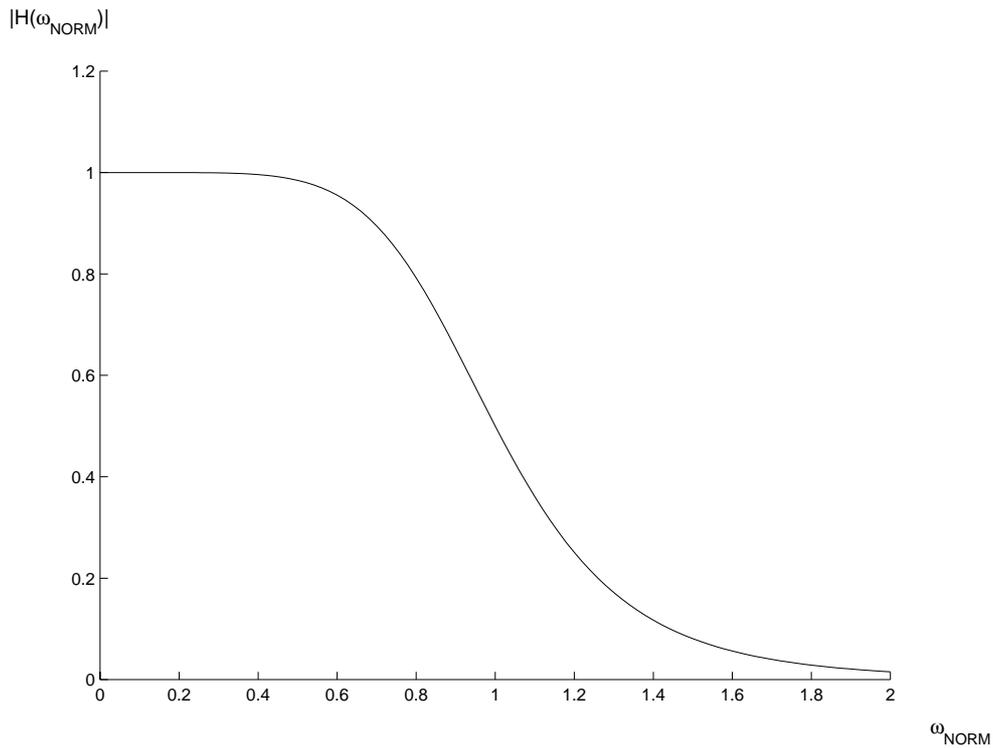
6.2.2.1.2 Filter typu Čebyšev

Vychádzame z rov.(6.47). Filtračná funkcia typu Čebyšev má tvar:

$$\varphi(s) = \varepsilon \cdot T_n(s) \quad (6.60)$$

kde $T_n(s)$ je Čebyševovský polynóm n -tého stupňa komplexnej premennej s a ε je parameter, ktorý určuje veľkosť zvlňenia.

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \cos(n \cdot \arccos(s)) && \text{pre } |s| < 1 \\ T_n(s) &= \cosh(n \cdot \operatorname{arccosh}(s)) && \text{pre } |s| > 1 \end{aligned} \quad (6.61)$$



Obr.6.12 Priebeh magnítudovej frekvenčnej charakteristiky $|H(j\frac{\omega}{\omega_K})|$

resp.

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_K}\right) = \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{\omega}{\omega_K}\right)\right) \quad \text{pre PP} \quad (6.62)$$

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_K}\right) = \cosh\left(n \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega}{\omega_K}\right)\right) \quad \text{pre PT}$$

Postup návrhu filtra je podobný ako v predchádzajúcom prípade. Z požiadaviek na PP určíme ε

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1 \quad (6.63)$$

a z požiadaviek na PT určíme stupeň filtra n

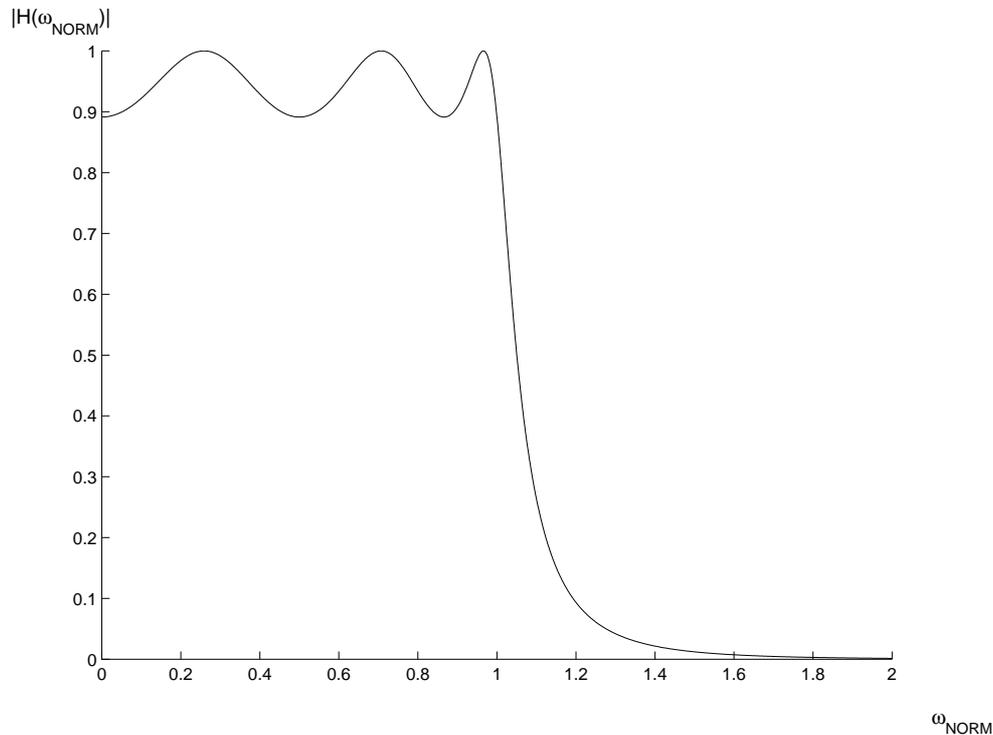
$$n \geq \frac{\operatorname{arccosh} \frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}}{\operatorname{arccosh} \frac{\omega_K}{\omega_K}} \quad (6.64)$$

Ak vzťahy (6.63) a (6.64) dosadíme do rov.(6.60) a túto do rov.(6.47), jej vyriešením dostaneme korene rovnice, nulové body, v normovanej s rovine. Súradnice nulových bodov v komplexnej s rovine sú dané:

$$s_k = j \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) \pm \sin\left(\frac{2k-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (6.65)$$

a ležia na elipse.

Priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky je na obr.6.13.



Obr.6.13. Priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky $|H(j\frac{\omega}{\omega_k})|$

6.2.2.1.3 Filter typu Cauer-Čebyšev

Filtre, o ktorých sme sa zmienili v predchádzajúcich kapitolách, mali filtračnú funkciu $\varphi(s)$ polynomiálneho typu. Filtre typu Cauer-Čebyšev majú filtračnú funkciu $\varphi(s)$ lomenú racionálnu funkciu. Tvar filtračnej funkcie pre párne n je:

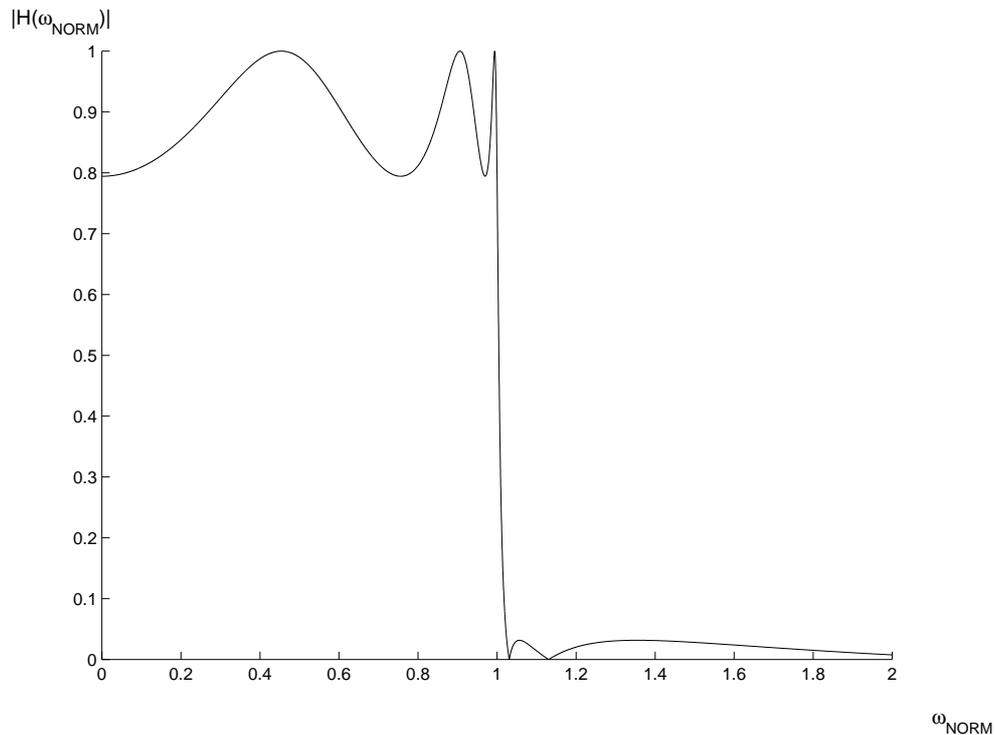
$$\varphi(s) = k \cdot \frac{(\Omega_1^2 - s^2) \cdot (\Omega_3^2 - s^2) \cdot \dots \cdot (\Omega_{2n-1}^2 - s^2)}{(1 - \Omega_1^2 \cdot s^2) \cdot (1 - \Omega_3^2 \cdot s^2) \cdot \dots \cdot (1 - \Omega_{2n-1}^2 \cdot s^2)} \quad (6.66)$$

a pre n nepárne

$$\varphi(s) = k \cdot \frac{s \cdot (\Omega_2^2 - s^2) \cdot (\Omega_4^2 - s^2) \cdot \dots \cdot (\Omega_{2n}^2 - s^2)}{(1 - \Omega_2^2 \cdot s^2) \cdot (1 - \Omega_4^2 \cdot s^2) \cdot \dots \cdot (1 - \Omega_{2n}^2 \cdot s^2)} \quad (6.67)$$

Priamo z uvedených rovníc vidíme, že póly prevádzkového činiteľa prenosu (nulové body prenosovej funkcie) ležia priamo na imaginárnej osi komplexnej roviny s v bodoch $\pm \frac{1}{\omega_1 \omega_\kappa}, \pm \frac{1}{\omega_3 \omega_\kappa}, \dots$, kým nulové body prevádzkového činiteľa prenosu (póly prenosovej funkcie) dostaneme riešením rov.(6.47), ak za $\varphi(s)$ dosadíme vzťah z rov.(6.66) alebo (6.67). Tieto budú ležať na elipse.

Priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky je na obr.6.14.



Obr.6.14. Priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky $\left| H\left(j\frac{\omega}{\omega_\kappa}\right) \right|$

Príklad 6.2

Návrh DP filtra typu Cauer-Čebyšev.

6.2.2.1.4 Frekvenčné transformácie

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali návrhom dolnopriepustného filtra. Získanie prenosovej funkcie $H(z)$ iných typov filtrov (hornopriepustného filtra -HP, pásmového priepustu-PP, pásmového záveru-PZ), ak poznáme prenosovú funkciu $H(s)$ normovaného analógového dolnopriepustného filtra umožňujú frekvenčné transformácie, ktoré sú dôverne známe z návrhu analógových filtrov. Frekvenčné transformácie môžeme využiť dvoma spôsobmi. Jeden z možných spôsobov je urobiť frekvenčnú transformáciu v analógovej oblasti, t.j. transformovať normovaný DP filter na analógový filter takého typu, ktorý korešponduje s požadovaným digitálnym filtrom a potom aplikovať bilineárnu transformáciu na pretransformovanie z p roviny do roviny z . Druhá možnosť je taká, že normovaný analógový DP filter pomocou bilineárnej transformácie pretransformujeme na dolnopriepustný digitálny filter a ten transformujeme na požadovaný pomocou vhodnej frekvenčnej transformácie. Oba postupy vedú k návrhu filtrov, ktoré sú identické. V ďalšom si ukážeme prvý spôsob.

Dolnopriepustný filter

Pri ďalších úvahách budeme vychádzať zo skutočnosti, že vieme navrhnuť NDP filter. Hranica pásma prepúšťania tohoto filtra je $\omega_k = 1$ a jeho prenosová funkcia je $H(s)$. Požiadavky na filter formulované vo frekvenčnej oblasti sme normovali k hranici pásma prepúšťania a normovaný komplexný kmitočet je daný vzťahom (6.46) - $s = \frac{p}{\omega_k}$. Prenosovú funkciu digitálneho dolnopriepustného filtra $H_d(z)$ dostaneme pomocou rovnice (6.31)

$$p^n \rightarrow H_D(z) = \alpha^n \cdot \left[\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right]^n$$

potom pre transformáciu $s \rightarrow z$ môžeme napísať:

$$s \rightarrow \alpha \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6.71)$$

Táto transformácia transformuje prenosovú funkciu NDP filtra $H(s)$ na prenosovú funkciu DP digitálneho filtra $H_d(z)$.

Hornopriepustný filter

Frekvenčná transformácia, ktorá transformuje NDP filter na hornopriepustný je daná vzťahom:

$$s = \frac{\omega_k}{p} \quad (6.72)$$

kde ω_k je hranica pásma prepúšťania HP filtra

Prenosovú funkciu $H(z)$ digitálneho HP filtra dostaneme, ak do vzťahu (6.72) dosadíme za komplexný kmitočet p vzťah (6.31) a takto vyjadrený normovaný komplexný kmitočet s dosadíme do prenosovej funkcie $H(s)$ NDP filtra.

$$s \rightarrow \frac{\omega_k}{\alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \beta \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (6.73)$$

Pásmový priepust

Z NDP filtra s prenosovou funkciou $H(s)$ dostaneme prenosovú funkciu $H(p)$ pásmového priepustu ak použijeme priamu frekvenčnú transformáciu :

$$s = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p \cdot \Delta \cdot \omega} \quad (6.74)$$

kde $\omega_0 = \sqrt{\omega_{-k} \cdot \omega_k} = \sqrt{\omega_{-k} \cdot \omega_k}$, čo je geometrická stredná hodnota pásma prepúšťania a súčasne pásma tlmenia a $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{-k}$ je šírka pásma prepúšťania.

Prenosovú funkciu digitálneho pásmového priepustu dostaneme, ak do rov.(6.74) za komplexný kmitočet p dosadíme vzťah (6.31)

$$s \rightarrow \frac{\left(\alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \omega_0^2}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \cdot \Delta\omega} \quad (6.75)$$

a po úprave

$$s \rightarrow v \cdot \frac{z^{-2} - 2 \cdot k \cdot z^{-1} + 1}{1 - z^{-2}} \quad (6.76)$$

Tento vzťah vo frekvenčnej oblasti vyjadruje súvislosť medzi kruhovou frekvenciou ω v rovine p a pomerovou kruhovou frekvenciou Ω v rovine z má tvar:

$$\omega_k = v \cdot \frac{k - \cos \Omega}{\sin \Omega} \quad (6.77)$$

Konštanty v a k môžeme vyjadriť zo vzťahu (6.77), ak stotožníme hodnotu -1 (s - rovina) s hodnotou Ω_{-k} (z - rovina) a hodnotu 1 s hodnotou Ω_k . Po dosadení do rov.(6.77) dostaneme

$$-1 = v \cdot \frac{k - \cos \Omega_{-k}}{\sin \Omega_{-k}} \quad (6.78a)$$

$$1 = v \cdot \frac{k - \cos \Omega_k}{\sin \Omega_k} \quad (6.78b)$$

Ak si uvedomíme, že vzťahy (6.78a) a (6.78b) sa líšia iba znamienkom, môžeme ich dať do rovnosti

$$-v \cdot \frac{k - \cos \Omega_k}{\sin \Omega_k} = v \cdot \frac{k - \cos \Omega_{-k}}{\sin \Omega_{-k}} \quad (6.79)$$

a z nej po úprave dostávame koeficient

$$k = \frac{\cos \frac{\Omega_{-k} + \Omega_k}{2}}{\cos \frac{\Omega_{-k} - \Omega_k}{2}} \quad (6.80)$$

Po dosadení tohoto vzťahu do rov.(6.77) a úprave dostávame

$$v = \cot \left[\frac{\Omega_k - \Omega_{-k}}{2} \right] \quad (6.81)$$

Pásmový záver

Prenosovú funkciu pásmového záveru $H(p)$ zo známej prenosovej funkcie NDP filtra dostaneme pomocou priamej frekvenčnej transformácie :

$$s \rightarrow \frac{\Delta\omega \cdot p}{p^2 + \omega_0^2} \quad (6.82)$$

Z nej po dosadení bilineárnej transformácie za komplexný kmitočet p dostávame prenosovú funkciu $H(z)$ digitálneho pásmového záveru.

$$s \rightarrow \frac{\Delta\omega \cdot \alpha \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \omega_0^2} \quad (6.83)$$

a po úprave

$$s \rightarrow v \cdot \frac{1 - z^{-2}}{z^{-2} - 2 \cdot k \cdot z^{-1} + 1} \quad (6.84)$$

a vo frekvenčnej oblasti

$$\omega_k = v \cdot \frac{\sin \Omega}{\cos \Omega - k} \quad (6.85)$$

Hodnoty v a k dostaneme z predpokladu stotožnenia frekvenčnej osi digitálneho filtra Ω s frekvenčnou osou NDP analógového filtra, t.j. stotožníme hodnotu 1 (s rovina) s hodnotou Ω_{-k} a súčasne hodnotu -1 s hodnotou Ω_k

$$1 = v \cdot \frac{\sin \Omega_{-k}}{\cos \Omega_{-k} - k} \quad (6.86a)$$

$$-1 = v \cdot \frac{\sin \Omega_k}{\cos \Omega_k - k} \quad (6.86b)$$

Tieto dve rovnice sú rozdielne iba v znamienkach, preto môžeme napísať

$$v \cdot \frac{\sin \Omega_{-k}}{\cos \Omega_{-k} - k} = -v \cdot \frac{\sin \Omega_k}{\cos \Omega_k - k} \quad (6.87)$$

a z toho po úprave

$$k = \frac{\cos \frac{\Omega_{-k} + \Omega_k}{2}}{\cos \frac{\Omega_k - \Omega_{-k}}{2}} \quad (6.88)$$

Po dosadení tohoto vzťahu do rov.(6.85) a po úprave dostaneme

$$v = \tan \left[\frac{\Omega_k - \Omega_{-k}}{2} \right] \quad (6.89)$$

Odvodené vzťahy sú uvedené v Tab.6.1.

Príklad 6.3

Návrh hornopriepustného filtra.

6.2.2.2 Metóda invariantnej impulzovej charakteristiky

Vychádzame z predpokladu známej prenosovej funkcie analógového filtra $H(p)$, ktorú navrhujeme pomocou niektorej z metód syntézy filtrov. Táto funkcia vo všeobecnosti je racionálnou funkciou

$$H(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \quad (6.90)$$

kde $A(p)$ je polynóm čitateľa a jeho korene predstavujú nulové body prenosovej funkcie $H(p)$ a $B(p)$ je polynóm menovateľa a jeho korene predstavujú póly funkcie $H(p)$. Ak túto funkciu rozložíme na parciálne zlomky, prenosovú funkciu môžeme prepísať do tvaru

$$H(p) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{p + p_{xi}} \quad (6.91)$$

Impulzovú charakteristiku analógového filtra dostaneme nájdením originálov každého člena súčtu vo vzťahu (6.91) pomocou inverznej Laplaceovej integrálnej transformácie

$$h(t) = \sum_{i=1}^N k_i e^{-p_{xi}t} \quad (6.92)$$

Impulzovú charakteristiku digitálneho filtra dostaneme navzorkovaním impulzovej charakteristiky analógového filtra dostávame:

$$h(nT_{vz}) = \sum_{i=1}^N k_i e^{-p_{xi}nT_{vz}} = \sum_{i=1}^N k_i \left(e^{-p_{xi}T_{vz}} \right)^n \quad (6.93)$$

Prenosovú funkciu $H(z)$ digitálneho filtra dostaneme pomocou transformácie Z vzťahu (6.93)

$$H(z) = Z\{h(nT_{vz})\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^N k_i \left(e^{-p_{xi}T_{vz}} \right)^n \cdot z^{-n} \right] = \sum_{i=1}^N \frac{k_i z}{z - e^{-p_{xi}T_{vz}}} \quad (6.94)$$

Ak označíme frekvenčnú charakteristiku spojitého filtra $H(\omega)$ a digitálneho filtra, ktorý sme navrhli $H(\Omega)$, potom vďaka vzorkovacej teoréme, ktorá tu bola použitá, platí vzťah:

$$H(\Omega) = \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H \left[j \left(\omega - \frac{2\pi k}{T_{vz}} \right) \right] \quad (6.95)$$

Zo vzťahu vyplýva, že frekvenčná charakteristika digitálneho filtra je periodicky sa opakujúcou frekvenčnou charakteristikou analógového filtra.

FREKVENČNÉ TRANS FORMÁCIE ANALÓGOVÉHO FILTRA NDP NA DIGITÁLNY FILTER		
TYP DIGITÁLNEHO FILTRA	TRANSFORMÁCIA	VÝZNAM PARAMETROV
DOLNÝ PRIEPUST	$s \rightarrow \alpha \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$	$\alpha = \cot(\pi \Phi \kappa)$
HORNÝ PRIEPUST	$s \rightarrow \beta \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	$\beta = \tan(\pi \Phi \kappa)$
PÁSMOVÝ PRIEPUST	$s \rightarrow v \frac{z^{-2} - 2kz^{-1} + 1}{1 - z^{-2}}$	$v = \cot\left(\frac{\Omega\kappa - \Omega - \kappa}{2}\right)$ $k = \frac{\cos\left(\frac{\Omega\kappa + \Omega - \kappa}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega - \kappa - \Omega\kappa}{2}\right)}$
PÁSMOVÝ ZÁVER	$s \rightarrow v \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2kz^{-1} + z^{-2}}$	$v = \tan\left(\frac{\Omega\kappa - \Omega - \kappa}{2}\right)$ $k = \frac{\cos\left(\frac{\Omega - \kappa + \Omega\kappa}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega\kappa - \Omega - \kappa}{2}\right)}$

Tab.6.1