6.2 Metódy návrhu filtrov

Návrh filtra znamená určenie prenosovej funkcie $H(z)$, ktorá vykazuje frekvenčné charakteristiky $H(\Omega)$ aproximujúce predpísané, resp. požadované systémové charakteristiky s očakávanou presnosťou. Znamená to určenie stupňa čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie $H(z)$ a zároveň hodnôt koeficientov a_k a b_k. Potom nasleduje už otázka modelovania, t.j. ako vypočítanú prenosovú funkciu $H(z)$ budeme realizovať.

Metódy návrhu IIR filtrov môžeme rozdeliť do dvoch skupín. Do prvej skupiny patria tzv. priame metódy návrhu, ako je napr. metóda skusmo, metóda frekvenčného vzorkovania, Pronyho metóda a iné.

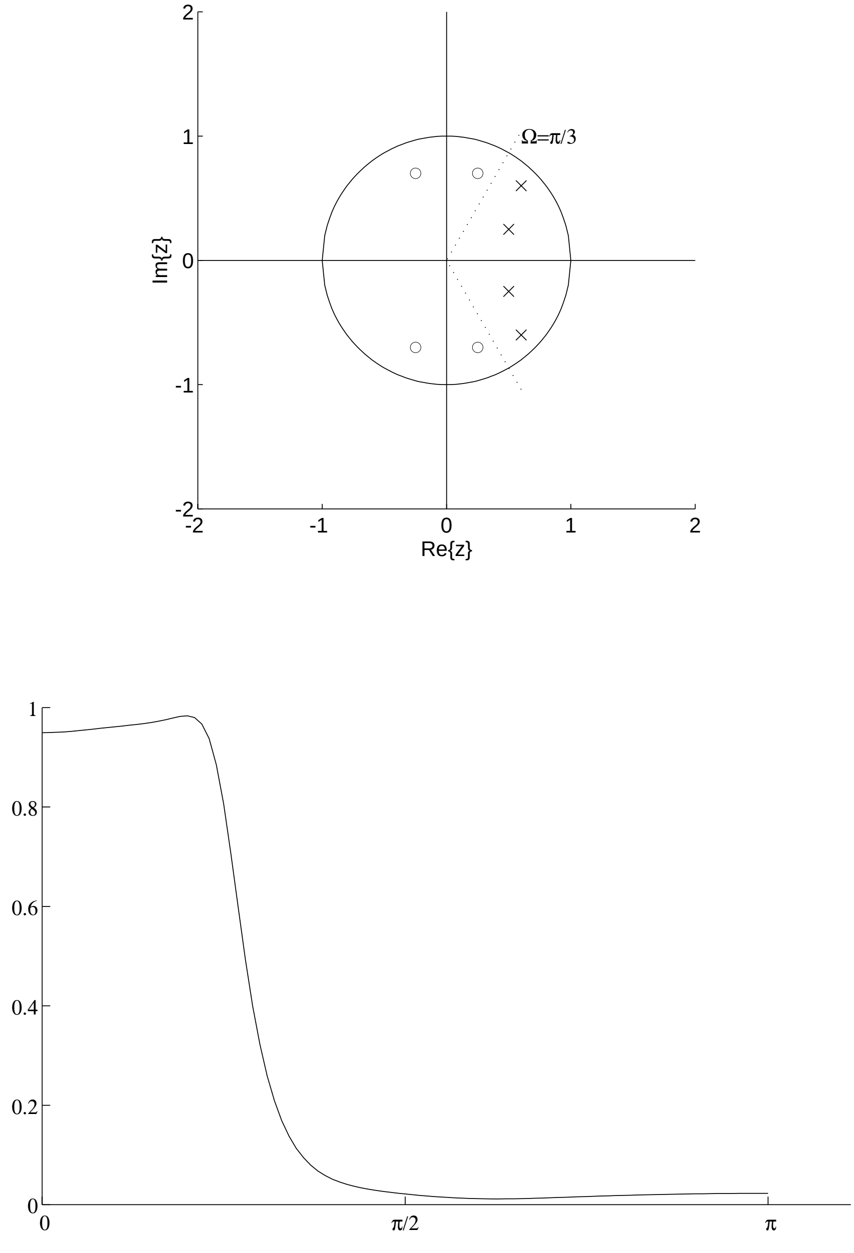
Druhú skupinu metód tvoria metódy nepriame, ktoré vychádzajú z návrhu analógových filtrov. Pri týchto metódach sa vychádza z poznatkov teórie analógových sústav, ktoré umožňovali určiť prenosovú funkciu analógového filtra $H(p)$ veľmi efektívne. Sem patrí metóda bilineárnej (Tustinovej) transformácie a metóda časovej invariantnosti impulzovej charakteristik

6.2.1 Priame metódy návrhu filtrov

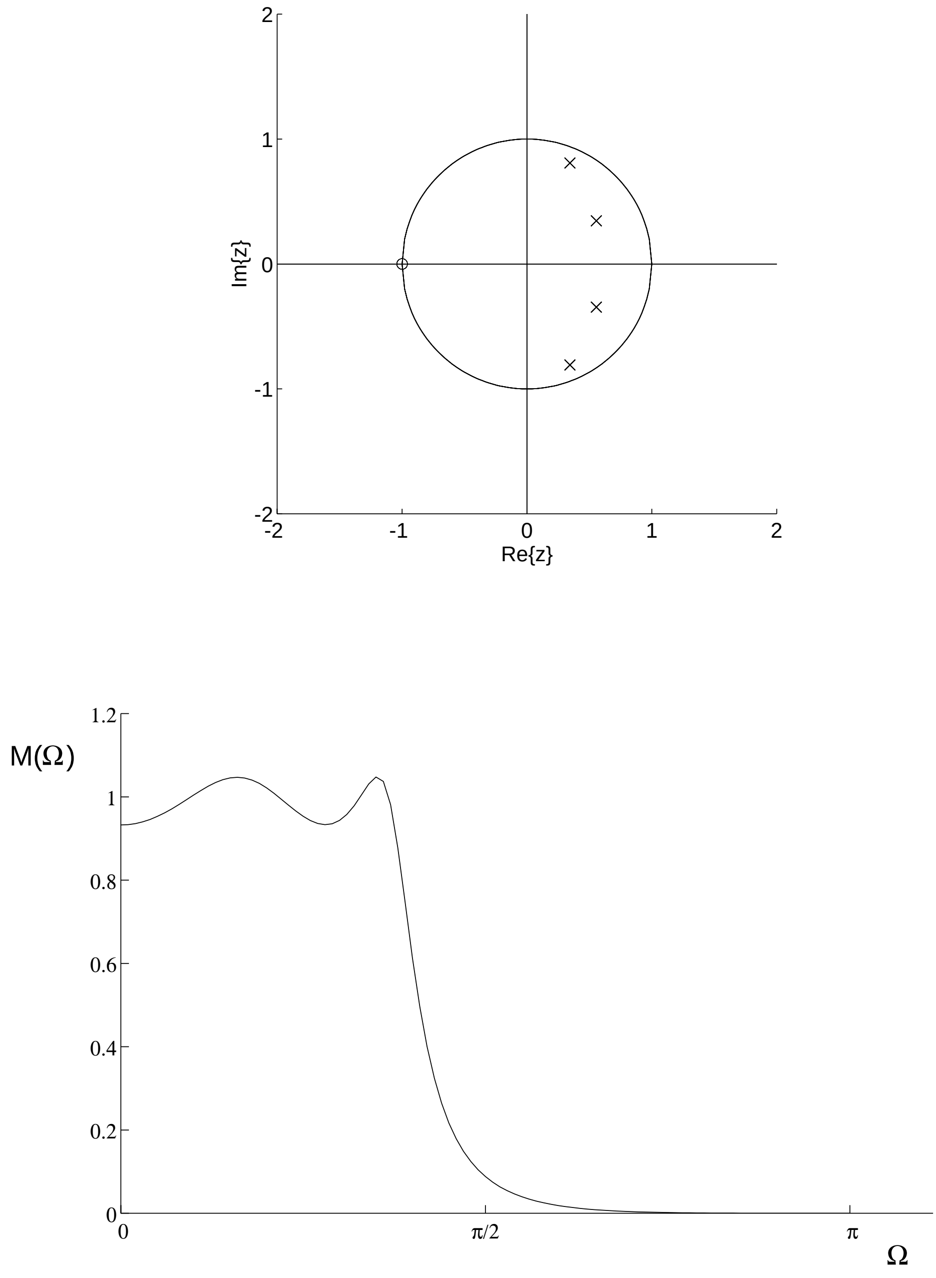
6.2.1.1 Metóda skusmo

Poznatky z druhej kapitoly sú pomôckou pre návrh IIR filtrov pomocou tejto metódy. Požiadavky na magnitúdovú frekvenčnú charakteristiku sa dajú aproximovať s určitou presnosťou. Prísne definovanie presnosti pri požiadavkách nám podstatne skomplikuje samotný návrh. Možnosť využitia výpočtovej techniky s programovými prostriedkami a s grafickým výstupom umožňujú bezprostredne porovnávať definované požiadavky s dosahovanými vlastnosťami navrhovaného filtra, okamžite vyhodnocovať vplyv zásahu navrhujúceho na predchádzajúci variant riešenia.

Po formulovaní požiadaviek na šírku pásma prepúšťania (ďalej *PP*) a pásma tlmenia (ďalej *PT*) môžeme začať s rozmiestňovaním nulových bodov a pólov prenosovej funkcie. Pri ich prvom rozmiestňovaní vychádzame zo



Obr. 6.3. *Návrh rozloženia koreňov $H(z)$ filtra a priebeh magnitúdovej fázovej charakteristiky*



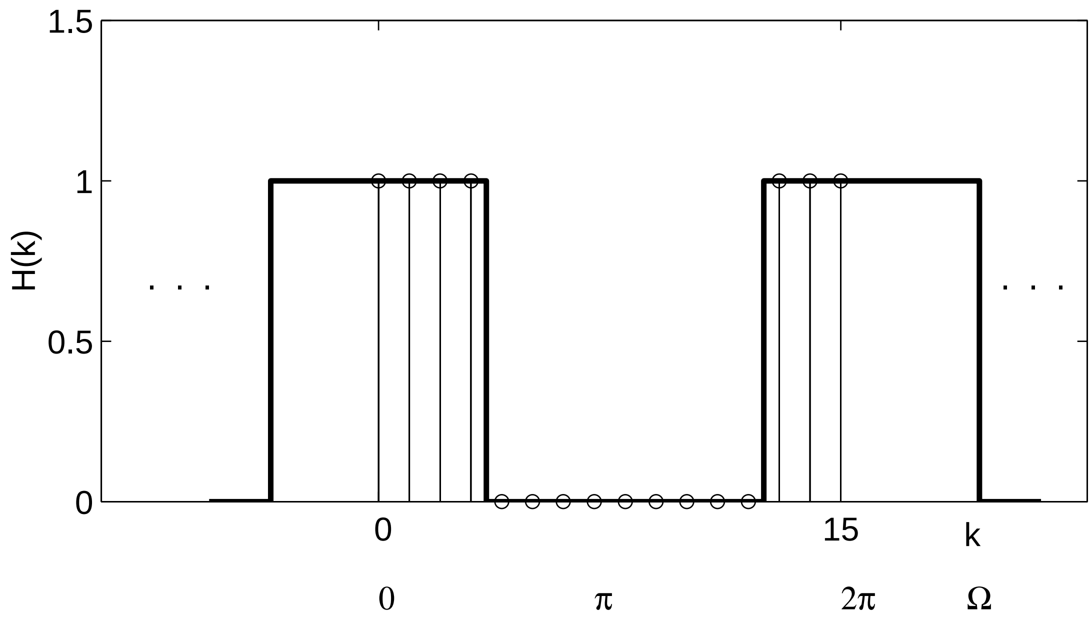
Obr.6.4. *Zmena rozloženia koreňov a priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky*

zásady, že pásmo prepúšťania je vhodne podporované umiestnením pólov a zase pásmo tlmenia nulovými bodmi prenosovej funkcie. Samozrejme, musíme myslieť na zabezpečenie stability týchto systémov a preto póly prenosovej funkcie budeme umiestňovať do vnútra jednotkovej kružnice roviny z. Nulové body môžeme umiestňovať aj mimo nej. Je zrejmé, že proces určenia nulových bodov a pólov nie je jednoznačný.

PRÍKLAD 6.1
Návrh dolnopriepustného filtra metódou skusmo.

6.2.1.2 Metóda frekvenčného vzorkovania

Princíp tejto metódy vychádza z metódy frekvenčného vzorkovania pre návrh FIR filtrov opísanej v kapitole 5.4. Formulované sú požiadavky na magnitúdovú frekvenčnú charakteristiku prenosovej funkcie filtra $H(\Omega)$, resp. na absolútnu hodnotu prenosovej funkcie $|H(\Omega)|$. Požiadavky navzorkujeme na L vzoriek, t.j. v ekvidistantných bodoch $\frac{2\pi}{L}.k$ vyberáme hodnoty magnitúdovej charakteristiky. Postup vzorkovania je ukázaný na obr. (6.5).



Obr.6.5 *Požiadavky na DP filter*

Uvažujme ideálny dolnopriepustný filter s konštantnou magnitúdovou frekvenčnou charakteristikou, ktorú opíšeme:

$$|H(\Omega)| = \langle \begin{array}{ll} 1 & pre \quad |\Omega| \langle \Omega_0 \\ 0 & inde \end{array} \qquad (6.7)$$

Požiadavky na fázovú frekvenčnú charakteristiku nebudeme definovať, výrazne by sme si tým skomplikovali návrh.

Ako je zrejmé z obr.6.5, dostávame $L+1$ vzoriek magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky. Pomocou IDFT vypočítame impulzovú charakteristiku $h(n)$, ktorá má dĺžku $L+1$. Prenosová funkcia $H(z)$ je racionálnou funkciou v tvare:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots\ldots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots\ldots + b_N z^{-N}} \qquad (6.8)$$

Odpovedajúci priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky pre $L+1$ vzoriek dostávame, ak za z dosadíme $e^{j\Omega}$. Vychádzame z predpokladu, že platí

$$L+1 = M+N+1 \qquad (6.9)$$

Označme $H(\Omega) = H(k)$ pre $\Omega = \frac{2\pi}{L}k$ .Potom platí:

$$H(k) = \frac{DFT\{a(n)\}}{DFT\{b(n)\}} = \frac{A(k)}{B(k)} \qquad (6.10)$$

resp.

$$A(k) = H(k) \cdot B(k) \qquad (6.11)$$

Inverznou DFT získame z hodnôt $H(k)$) impulzovú charakteristiku $h(n)$ dĺžky $L+1$.

Rov.(6.11) prepíšeme do maticového tvaru pomocou cyklickej konvolúcie

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_M \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_L & h_{L-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_L & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdot & & & & \cdot & h_4 & h_3 \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ h_L & h_{L-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.12)$$

resp.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (6.13)$$

kde **H** je štvorcová matica veľkosti $(L+1)x(L+1)$
a je stĺpcová matica veľkosti $(M+1)$
b je stĺpcová matica veľkosti $(N+1)$

Stĺpcová matica $\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ má $(L+1)-(N+1)$ nulových prvkov, čo nám umožní redukciu matice $\underline{H}$ o $(L-N)$ stĺpcov. Potom rov.(6.13) prepíšeme do tvaru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{b} \tag{6.14}$$

resp. za predpokladu, že $b_0 = 1$ (podľa rov.(6.8))

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \\ \mathbf{h}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{b}^* \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

kde $\mathbf{H}_1$ je matica veľkosti $(N+1)x(M+1)$,
$\mathbf{h}_1$ je stĺpcová matica veľkosti $(L-M)$,
$\mathbf{H}_2$ je matica veľkosti $Nx(L-M)$.

Z rov.(6.15) môžeme $(L-M)$ rovníc napísať v tvare

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{b}^* \tag{6.16}$$

z toho

$$\mathbf{h}_1 = -\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{b}^* \tag{6.17}$$

kde $\mathbf{h}_1$ a $\mathbf{H}_2$ je známe a môžeme si vyjadriť $\mathbf{b}^*$. Potom zo vzťahu (6.15), pre $M+1$ rovníc napíšeme:

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{b} \tag{6.18}$$

kde $\mathbf{b}$ je stĺpcová matica rovná $\mathbf{b}^*$ doplnená o prvý člen, ktorý je rovný 1. Uvedený postup môže byť použitý v prípade. že matica $\mathbf{H}_2$ nie je singulárna. Samozrejme, konkrétny návrh filtra je v každom prípade pomerne zložitý, pretože sa jedná o riešenie sústav rovníc a je nutné využiť metódy numerickej matematiky.

Podobne, ako pri návrhu FIR filtrov, hľadáme možnosti zníženia stupňa čitateľa a menovateľa, t.j. snažíme sa navrhnúť filter za predpokladu, že platí:

$L+1 \rangle M+N+1$

Počet vzoriek frekvenčnej charakteristiky je väčší ako počet koeficientov čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie $H(z)$ filtra. Rov.(6.14) bude mať potom tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e} \tag{6.19}$$

kde $\mathbf{e}$ je vektor chyby, ktorý má veľkosť (L+1).

Rovnicu (6.17) prepíšeme do tvaru:

$$\mathbf{h}_1 - \mathbf{e} = -\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{b}^* \tag{6.20}$$

kde $\mathbf{H}_2$ je matica veľkosti $Nx(L-M)$ a platí $(L-M) \rangle N$

Minimalizáciou chyby $\mathbf{e}$ dostávame sústavu rovníc

$$\mathbf{H}_2^T \cdot \mathbf{h}_1 = -\mathbf{H}_2^T \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{b}^* \tag{6.21}$$

a z týchto môžeme vypočítať

$$\mathbf{b}^* = -\left[\mathbf{H}_2^T \cdot \mathbf{H}_2\right]^{-1} \cdot \mathbf{H}_2^T \cdot \mathbf{h}_1 \tag{6.22}$$

čím sme vypočítali koeficienty menovateľa prenosovej funkcie filtra $H(z)$.

Na výpočet koeficientov čitateľa prenosovej funkcie použijeme rovnicu (6.18). Potom pre $M+1$ prvkov je chyba nulová a celková chyba je minimálna.

6.2.1.3 Pronyho metóda návrhu filtrov

Pronyho metóda umožňuje navrhnúť filter, ktorý realizuje požiadavky kladené na filter v časovej oblasti, t.j. požiadavky na impulzovú charakteristiku $h(n)$ filtra. Riešenie tejto úlohy naráža na problém riešenia nelineárnych rovníc vo frekvenčnej oblasti. Aby sme nemuseli riešiť nelineárne rovnice, využívajú sa poznatky známe z fyziky, keď Prony v 18. storočí riešil problematiku rozťažnosti plynu pomocou lineárnych rovníc. Pri tejto metóde vychádzame zo známeho faktu, že prenosovú funkciu filtra $H(z)$ môžeme vyjadriť zo známej impulzovej charakteristiky

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

a má tvar:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots\dots + a_M \cdot z^{-M}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots\dots\dots + b_N \cdot z^{-N}} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Túto rovnicu môžeme prepísať do tvaru:

$$B(z).H(z) = A(z) \tag{6.23}$$

alebo v maticovom tvare:

$$
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_M \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdot & \cdot & & & \\ h_1 & h_0 & 0 & \cdot & & & \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdot & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ h_M & h_{M-1} & \cdot & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ h_L & h_{L-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.24)
$$

resp.

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (6.25)
$$

kde $\mathbf{H}$ je matica veľkosti $(L+1)x(L+1)$ a obsahuje prvých $L+1$ hodnôt požadovanej impulzovej charakteristiky (orezanej impulzovej charakteristiky). Stĺpcová matica na ľavej strane má $L-M$ nulových hodnôt a stĺpcová matica na pravej strane má $L-N$ nulových hodnôt. Rov.(6.25) môžeme prepísať do tvaru:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \\ \mathbf{h}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{b}^* \end{bmatrix} \qquad (6.15)
$$

kde $\mathbf{a}$ je stĺpcová matica dĺžky $M+1$ a nachádzajú sa v nej neznáme koeficienty čitateľa prenosovej funkcie $H(z)$ a $\mathbf{b}^*$ je stĺpcová matica dĺžky N, ktorá obsahuje všetky neznáme koeficienty menovateľa prenosovej funkcie $H(z)$ okrem hodnoty $\mathbf{b}_0$ ktorej sme priradili jednotkovú hodnotu.

$\mathbf{H}_1$ je submatica veľkosti $(M+1)x(N+1)$

$\mathbf{h}_1$ je stĺpcová matica veľkosti $(L-M)$

$\mathbf{H}_2$ je submatica veľkosti $(L-M)xN$

Potom dolnú sústavu rovníc $(L-M)$ môžeme napísať

$$
\mathbf{0} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{b}^* \qquad (6.16)
$$

a po úprave:

$$
\mathbf{h}_1 = -\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{b}^* \qquad (6.17)
$$

z ktorých môžeme vypočítať $\mathbf{b}^*$, teda hodnoty koeficientov menovateľa prenosovej funkcie $H(z)$.

Prvých $(M+1)$ rovníc napíšeme v tvare

$$
\mathbf{a} = \mathbf{H}_1 . b^* \qquad (6.18)
$$

a z nich môžeme vypočítať koeficienty čitateľa **a** prenosovej funkcie $H(z)$.

Riešenie týchto rovníc, ak platí:

$$L = M + N$$

a $\mathbf{H}_2$ je štvorcová a nie singulárna matica, nie je problematické a umožňuje vypočítať $M+N+1$ neznámych koeficientov čitateľa a menovateľa prenosovej funkcie filtra.

Navrhnutý filter bude mať požadovaných $L+1$ členov impulzovej charakteristiky. Pretože sa jedná o filter typu IIR, jeho impulzová charakteristika je nekonečná, ale o hodnote $h(n)$ pre každé $n \rangle L$ nevieme nič. V prípade, že chceme zistiť hodnoty impulzovej charakteristiky $h(n)$ pre $n \rangle L$ musíme riešiť aproximačný problém. Obe metódy- metóda frekvenčného vzorkovania aj Pronyho metóda vyžadujú kvalitnú výpočtovú techniku a zodpovedajúce programové vybavenie. Žiadna z týchto metód sa nedá použiť pre návrhy filtrov bez týchto prostriedkov.