
5.3 Oknové funkcie vhodné na skrátenie impulzovej charakteristiky

V predchádzajúcej podkapitole sme si ukázali, ako možno pomocou pravouhlého okna skrátiť ideálnu impulzovú charakteristiku DP-filtra. Nevýhodou tejto metódy je, že dochádza k deformácii frekvenčnej charakteristiky ideálneho DP-filtra a to najmä tam, kde požadovaná amplitúdová charakteristika je nespojitá. Pravouhlé okno (pozri obr.5.7) vykazuje nasledovné vlastnosti:

- šírku hlavného laloka magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky pravouhlého okna môžeme meniť zmenou dĺžky tohto okna. Ak šírku hlavného laloka zadefinujeme ako vzdialenosť dvoch bodov najbližšie k $\Omega = 0$ kde frekvenčná charakteristika nadobúda nulovú hodnotu, potom šírka hlavného laloka bude $4\pi/N$.

- výška prvého postranného laloka je konštantná a predstavuje približne 22% amplitúdy hlavného laloka, resp. -13dB vzhľadom na jej maximum v bode $\Omega = 0$.

Spomenuté dve vlastnosti ovplyvňujú výslednú frekvenčnú charakteristiku dolnopriepustného filtra podľa obr.5.8, ktorú sme dostali konvolúciou magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky ideálneho DP-filtra a magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky pravouhlého okna. Ostrý prechod z pásma prepúšťania do pásma tlmenia ideálnej charakteristiky sa transformoval na postupný prechod. Tento fakt je spôsobený reálnou šírkou hlavného laloka. Ako sme spomenuli, šírka hlavného laloka a tým aj šírka mŕtveho pásma medzi pásmom prepúšťania a pásmom tlmenia sa dá ovplyvňovať počtom vzoriek N . Pripomeňme si však, že dávka N priamo súvisí s rádom navrhovaného FIR filtra. Druhá spomenutá vlastnosť, t.j. konštantná výška magnitúd postranných lalokov, má za následok zvlnenie frekvenčnej charakteristiky tam, kde sa požaduje konštantná, čiže v pásme prepúšťania, resp. v pásme tlmenia, kde má byť nulová. Žiaľ, veľkosť zvlnenia sa nedá pre pravouhlé okno nijako ovplyvniť. Ako vidíme na obr.5.8a a 5.8b, po použití pravouhlého okna ostáva veľkosť zvlnenia konštantná nezávisle od počtu vzoriek, na ktorý bola impulzová charakteristika skrátená. Tento poznatok je známy ako Gibbsov jav (podľa amerického matematika Josiah Willard Gibbs). Rôzni autori publikovali možnosť použitia iných okien ako pravouhlého, ktoré pomáhajú redukovať nežiadúce javy skrátenia ideálnej impulzovej charakteristiky. Poznamenajme, že "ideálne okno" by malo mať frekvenčnú charakteristiku rovnú jednotkovému impulzu, čo odpovedá nekonečne širokému pravouhlému oknu.

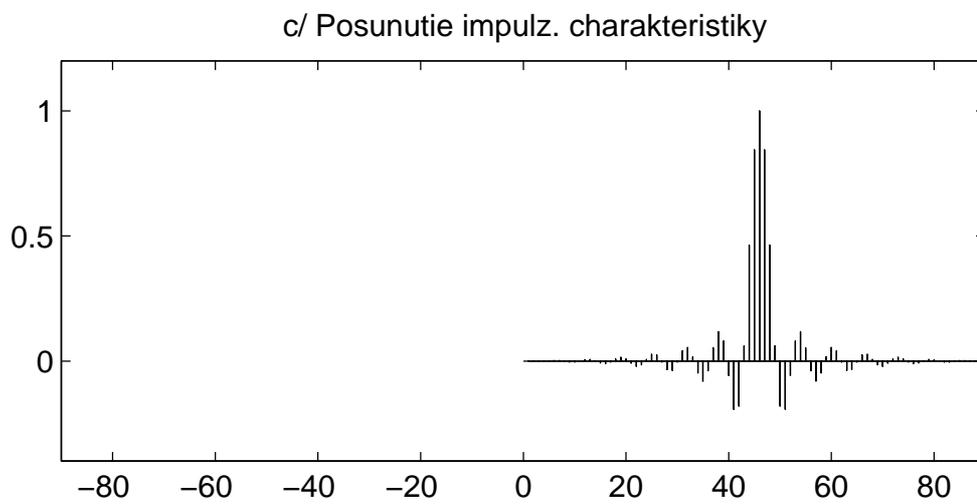
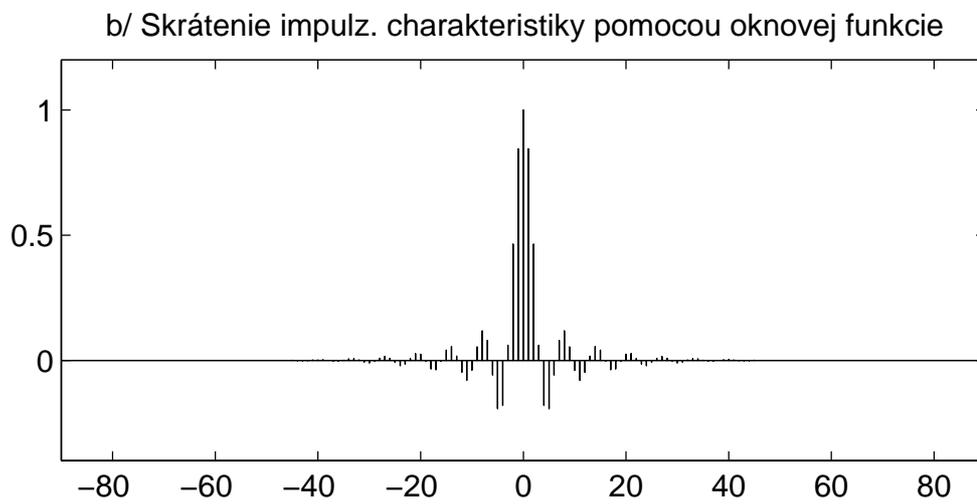
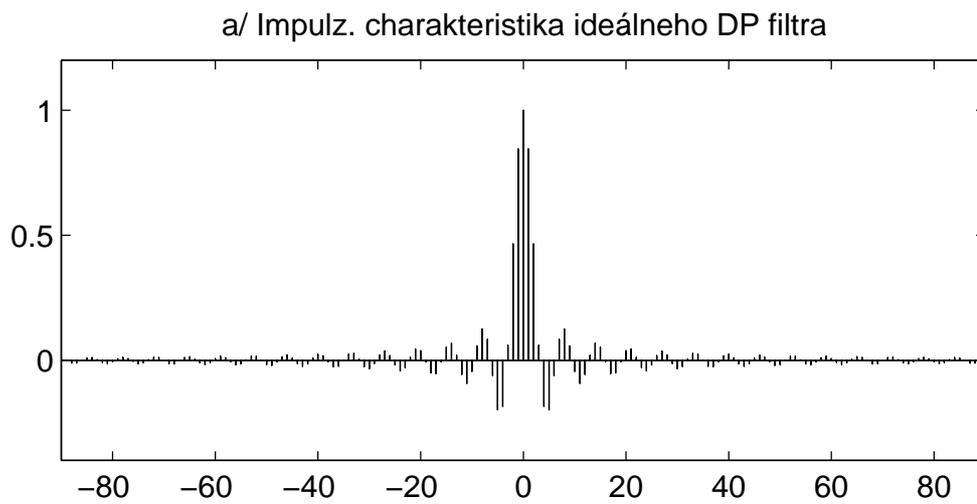
Bartlettovo okno

Predpokladajme trojuholníkové okno (trojuholníkovo okno a jeho spektrálna funkcia je na obr.5.9).

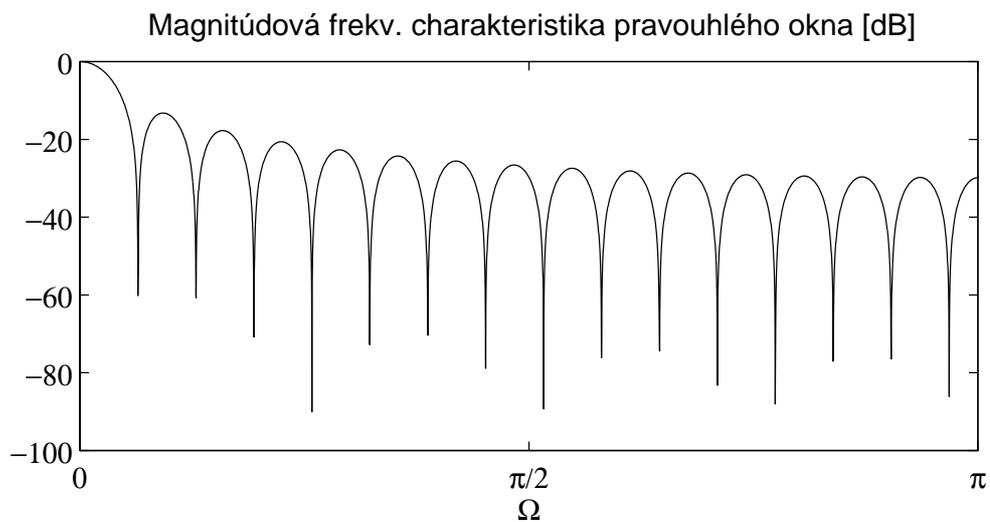
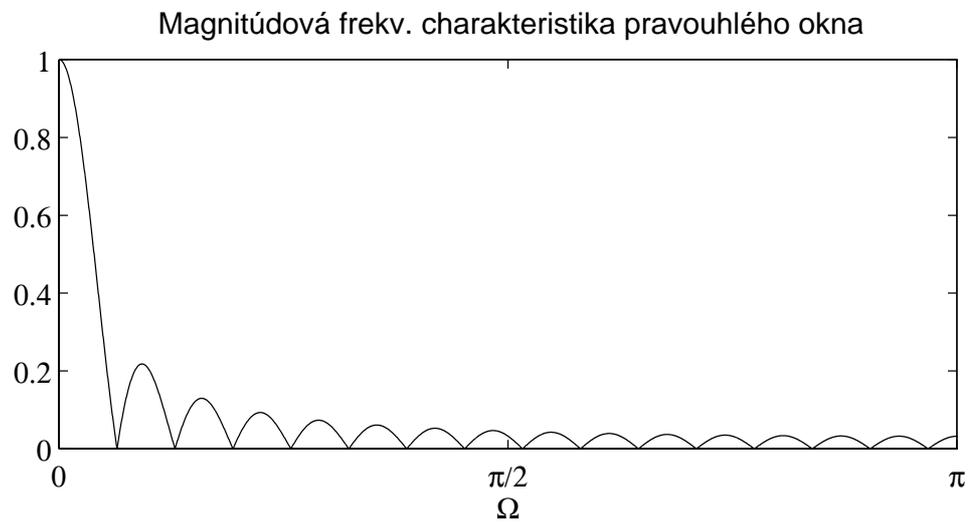
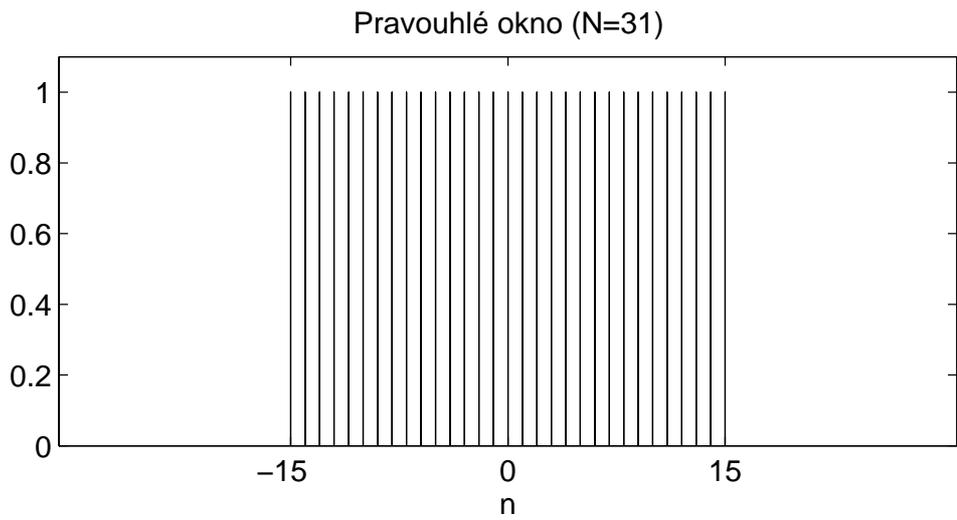
$$w_T(n) = 1 - \frac{2|n|}{N-1} \quad \text{pre} \quad -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2 \quad (5.11)$$

Ako vidíme, prvý postranný lalok je menší ako pri pravouhlom okne. Jeho magnitúda vykazuje asi -25 dB voči maximu. Šírka hlavného laloku je však teraz , čiže dva krát väčšia ako pri pravouhlom okne.

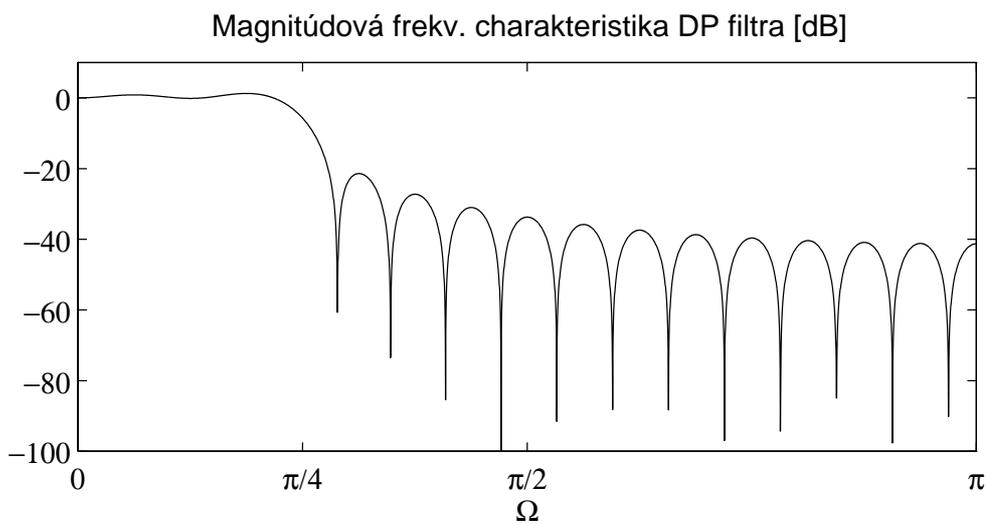
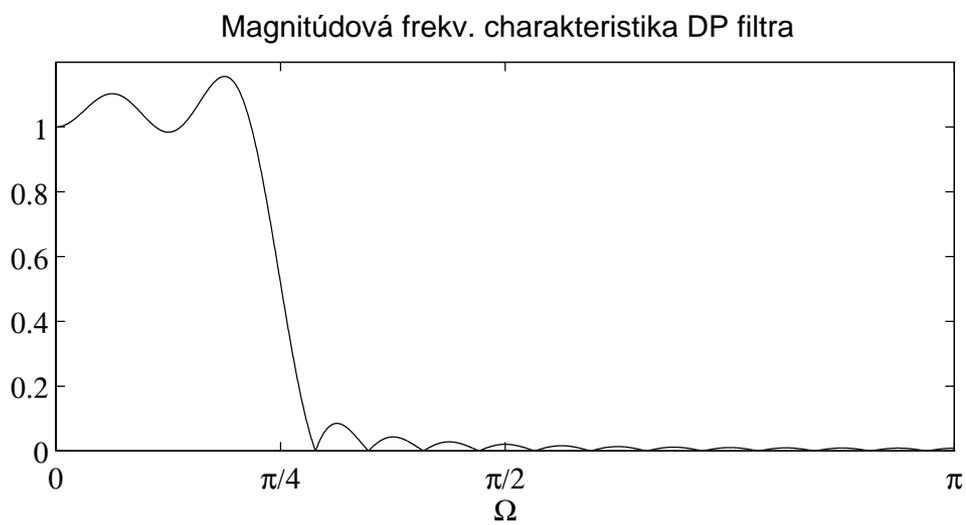
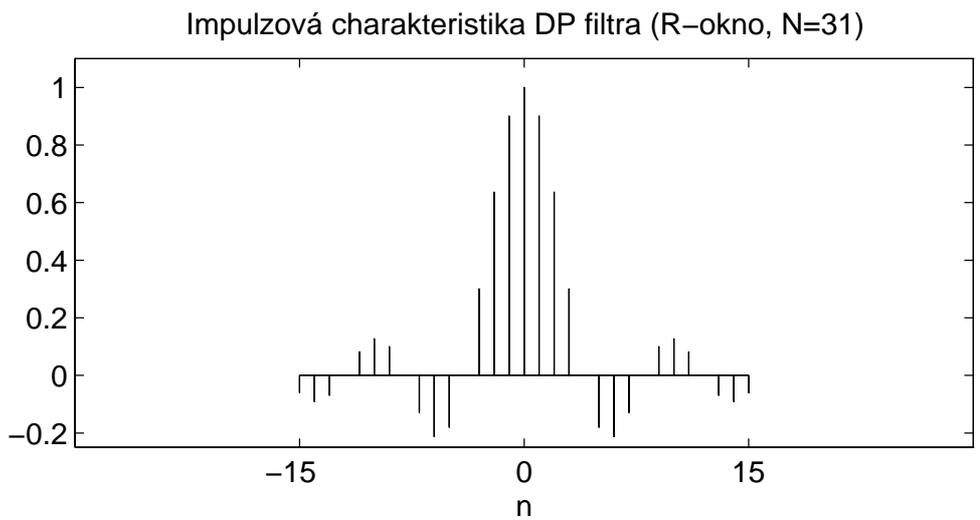
Magnitúdová frekvenčná charakteristika FIR DP filtra po aplikovaní trojuholníkového okna je na obr.5.10. Priebeh tejto frekvenčnej charakteristiky je síce pomerne hladký, ale mŕtve pásmo je v porovnaní s pravouhlým oknom širšie, čo je hlavnou nevýhodou trojuholníkového alebo Bartlettovho okna.



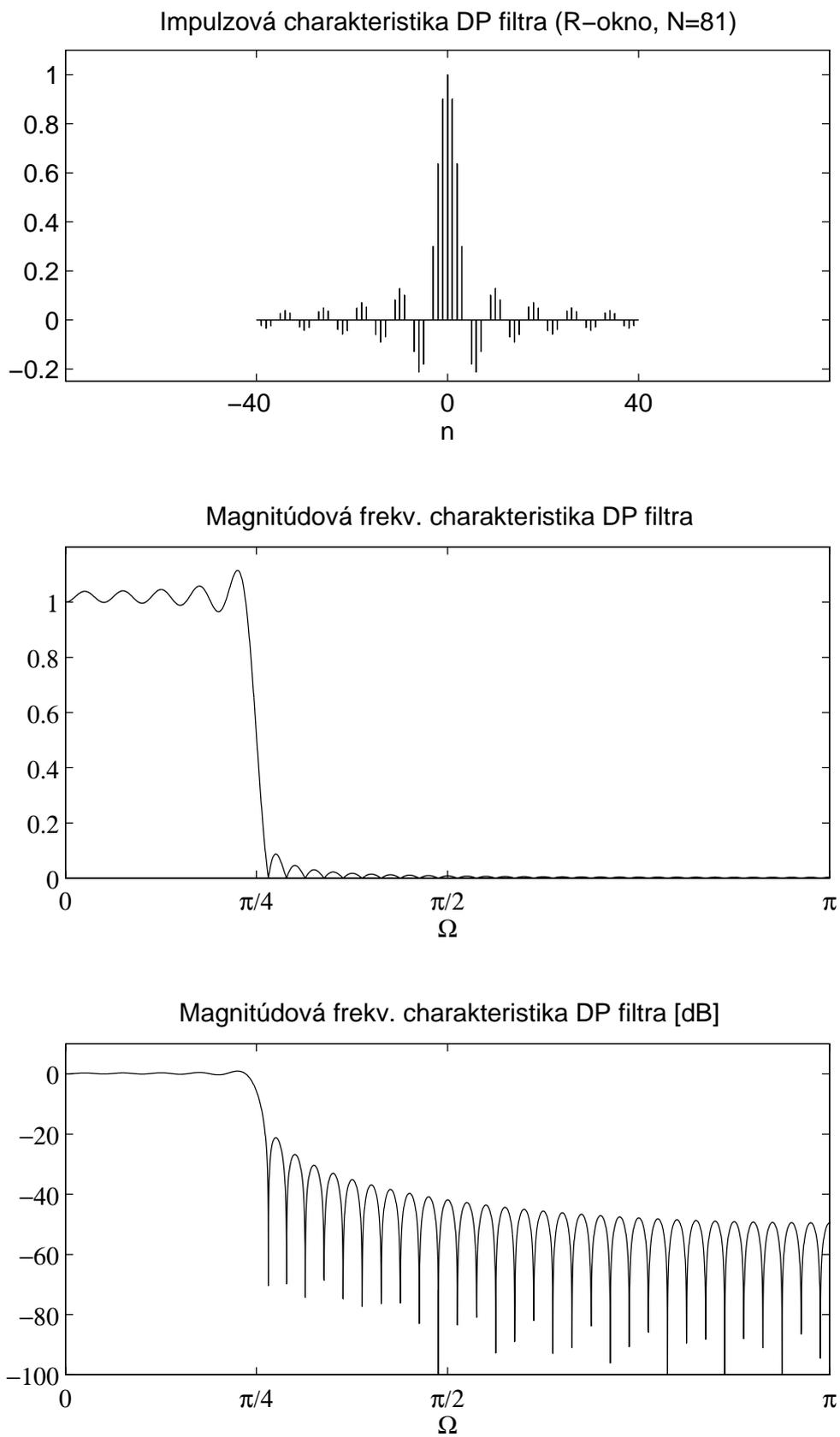
Obr. 5.6 Úprava impulzovej charakteristiky ideálneho DP filtra



Obr. 5.7 Magnitúdová frekvenčná charakteristika DP filtra získaná pomocou pravouhlého okna



Obr. 5.8a Magnitudová frekvenčná charakteristika DP filtra získaná pomocou pravouhlého okna



Obr. 5.8b Magnitúdová frekvenčná charakteristika DP filtra získaná pomocou pravouhlého okna

Hanningovo okno

Nasledujúce okno patrí do triedy tzv. kosínusových okien, pretože ich priebeh je tvorený jednou alebo viacerými kosínusovými funkciami.

Analytický vzťah pre Hanningovo okno je

$$w_C(n) = 0.5 + 0.5 \cos(2\pi n/(N-1)) \quad \text{pre } -\frac{(N-1)}{2} \leq n \leq \frac{(N-1)}{2} \quad (5.12)$$

Priebeh oknovej funkcie a jej spektrum je na obr.5.11 pre $N=31$. Magnitúda prvého postranného laloku vykazuje $-31dB$ oproti maximu, čo je o $6dB$ lepšie ako pri trojuholníkovom okne. Keďže šírka hlavného laloku je taká istá ako pri trojuholníkovom okne, považujeme Hanningovo okno za lepšie.

Zmenšenie postranného laloku Hanningovho okna oproti pravouhlému oknu sa dá ľahko vysvetliť ak, si Hanningovo okno predstavíme ako nekonečnú kosínusovú postupnosť s jednosmernou zložkou $c(n)$, prenásobenú pravouhlým oknom, čiže

$$w_C(n) = (0.5 + 0.5 \cos(2\pi n/(N-1)))w_R(n) \quad \text{resp.} \quad (5.13)$$

$$w_C(n) = c(n).w_R(n) \quad \text{pre všetky } n$$

Násobeniu v časovej oblasti odpovedá konvolúcia vo frekvenčnej oblasti. Priebeh Fourierovej transformácie $c(n)$, $w_R(n)$ ako aj konvolúcia oboch signálov je na obr.5.12. Spektrum $W_R(\Omega)$ sa nasuperponuje na každý impulz spektra $C(\Omega)$ a jednotlivé zložky sa vzájomne rušia v oblasti postranných lalokov.

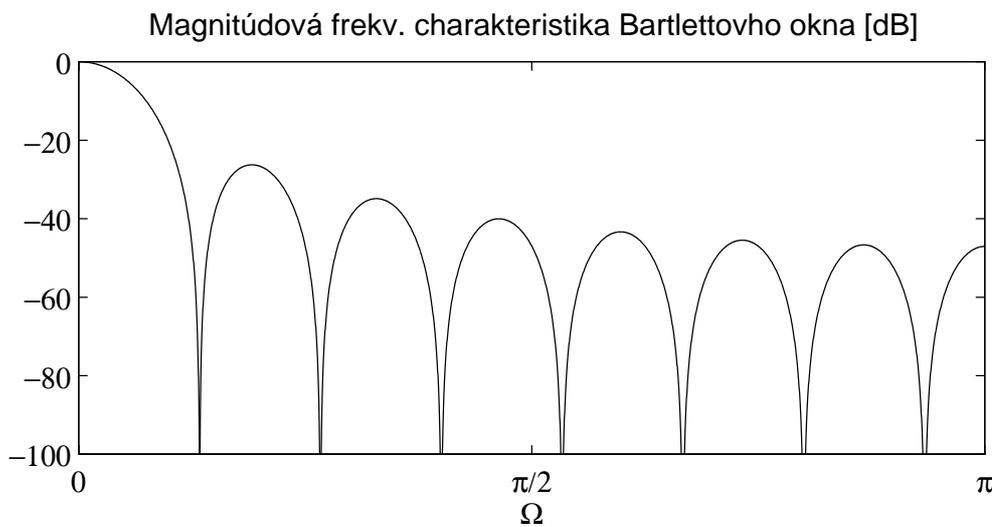
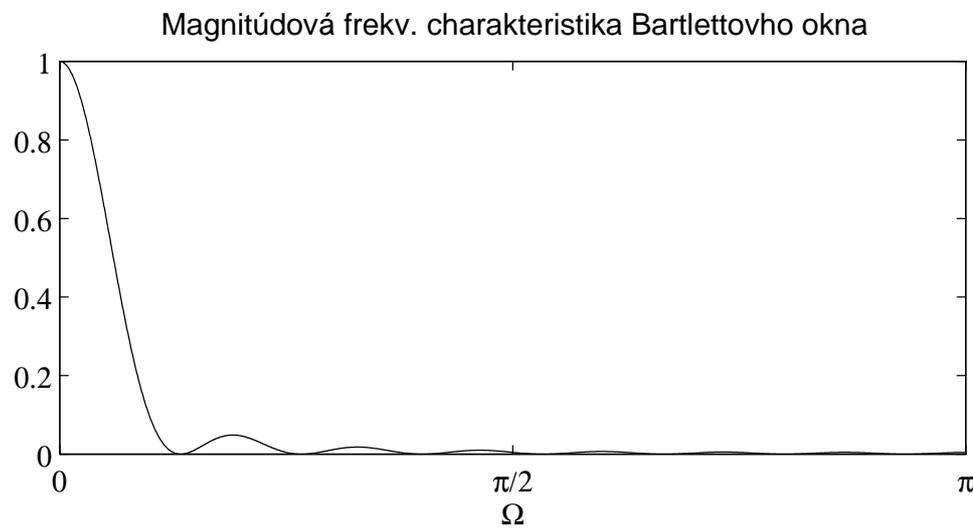
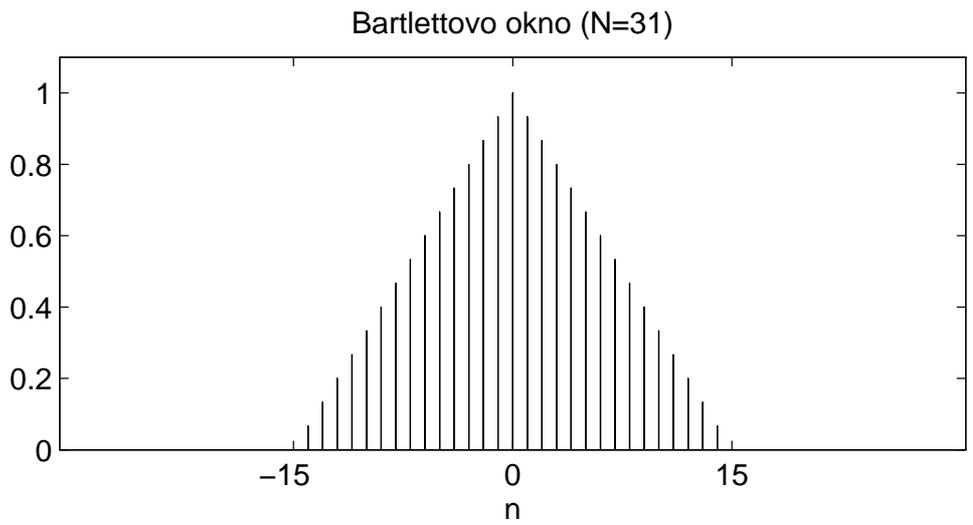
Aproximácia ideálneho DP filtra pomocou Hanningovho okna v časovej a vo frekvenčnej oblasti je na obr.5.13. Odstup pásma tlmenia od pásma prepúšťania je asi $-44dB$.

Hammingovo okno

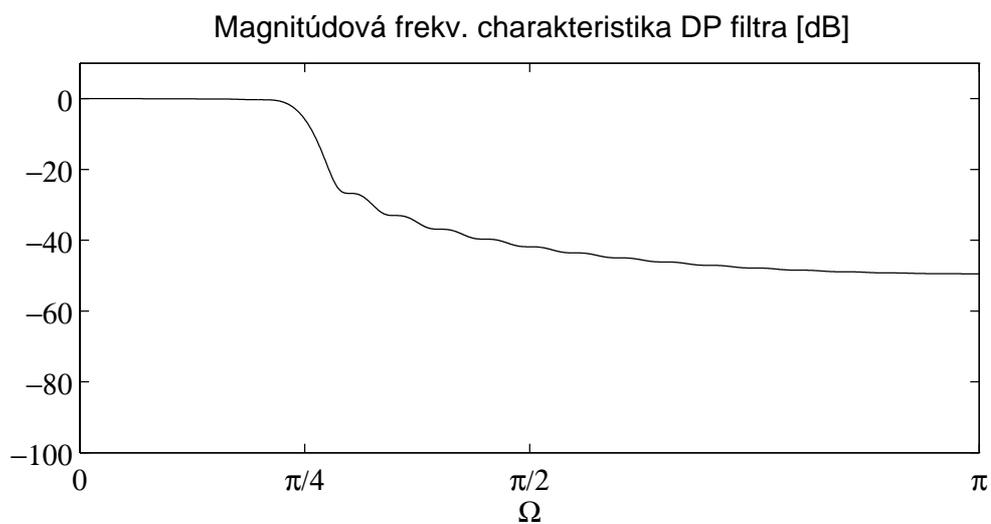
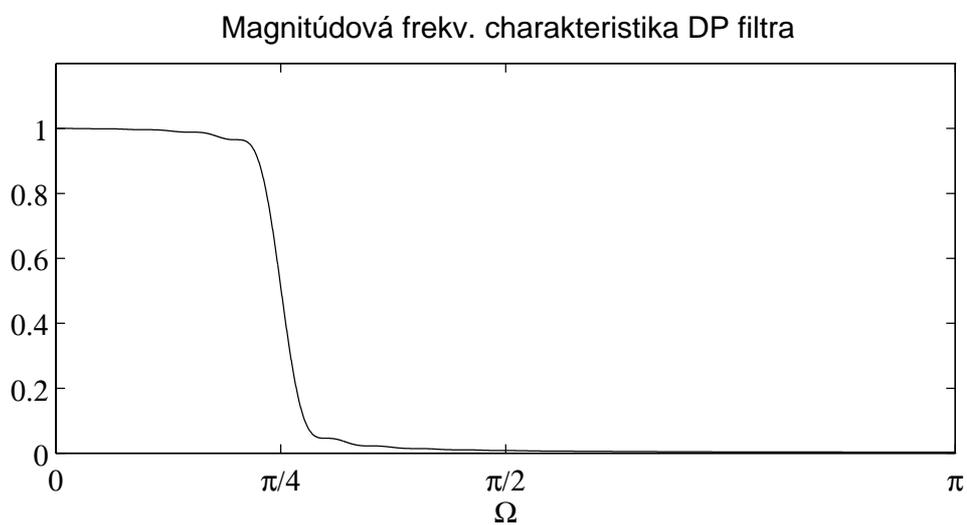
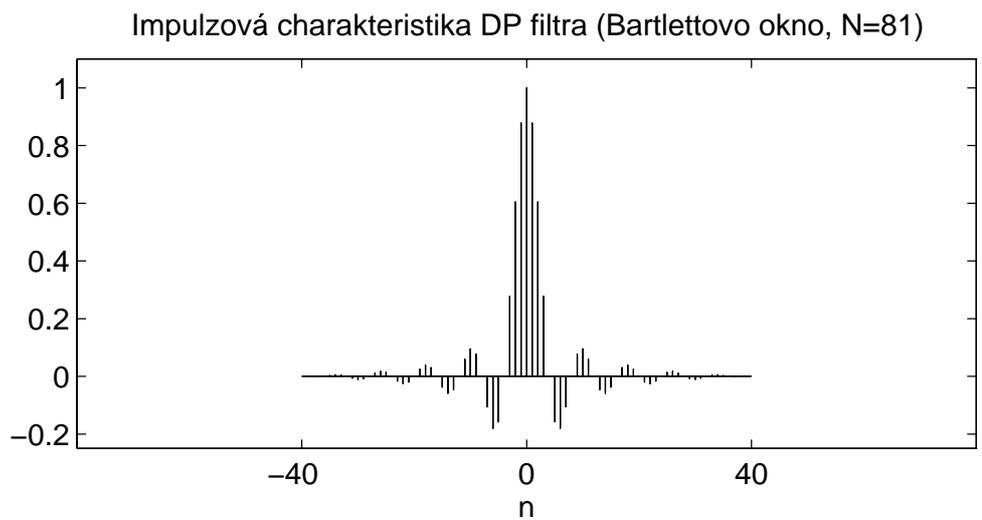
Hammingovo okno sa podobá na Hanningovo, ale obsahuje o niečo väčšiu jednosmernú zložku.

$$w_H(n) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n/(N-1)) \quad \text{pre } \frac{(N-1)}{2} \leq n \leq \frac{(N-1)}{2} \quad (5.14)$$

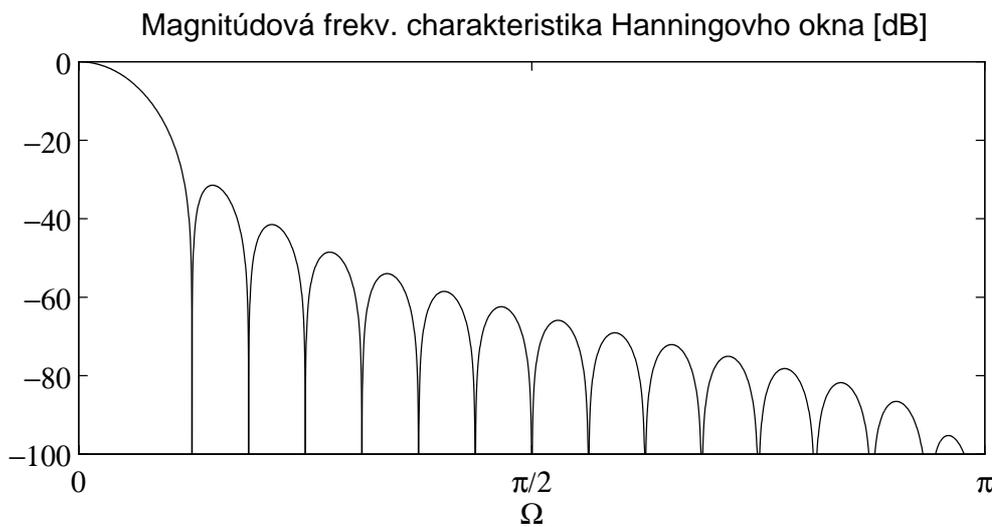
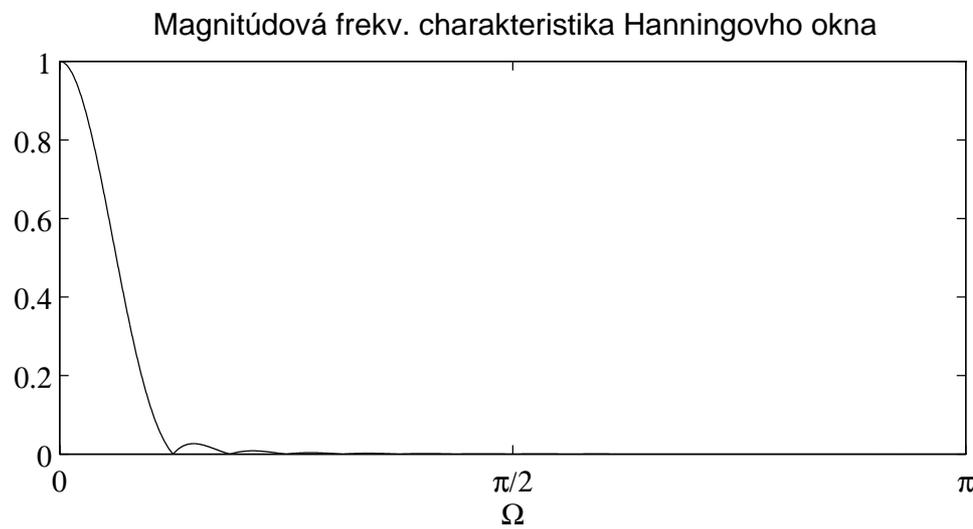
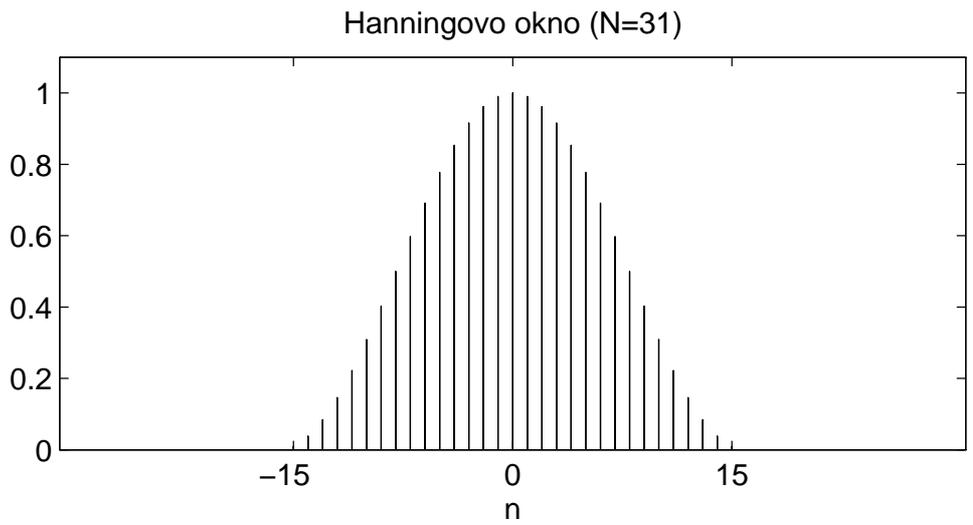
Princíp potlačenia postranného laloku je podobný ako pri Hanningovom okne, kde je pomer frekvenčnej zložky Hannigovho okna v bode $\Omega=0$ k vedľajšej zložke $1:2$. Pri Hammingovom okne je tento pomer $1:2.35$, čo vedie k optimálnemu potlačeniu postranného laloka pre tento prístup, čiže asi $-41dB$. Priebeh Hammingovho okna v časovej a vo frekvenčnej oblasti je na obr.5.14, aproximácia ideálneho DP filtra pomocou Hammingovho okna je na obr. 5.15. Odstup pásma tlmenia od pásma prepúšťania je asi $-51dB$, čo je o asi $-7dB$ lepšie ako pri Hanningovom okne. Šírka hlavného laloku je taká istá ako pri Hanningovom okne. Skoro izoextremálny priebeh v pásme tlmenia nasvedčuje, že Hammingovo okno predstavuje isté optimum pre daný prístup, čiže využitie jednej v magnitúde posunutej kosínusovej funkcie na vytvorenie oknovej funkcie.



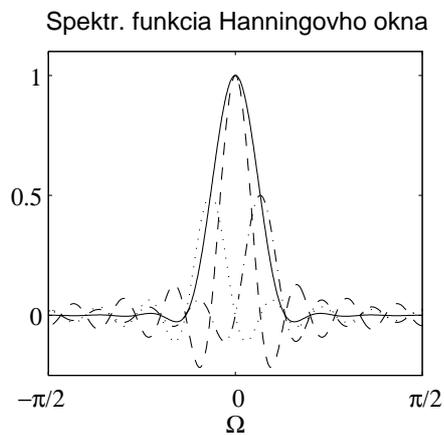
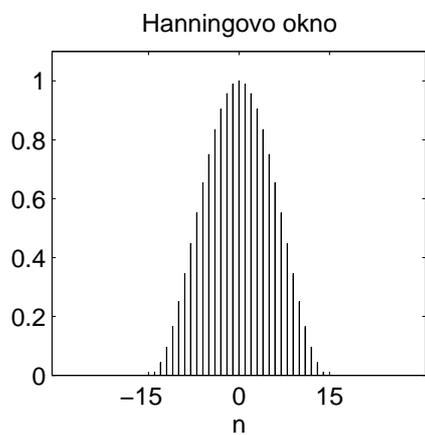
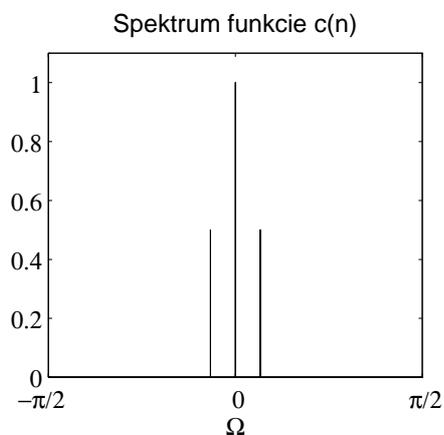
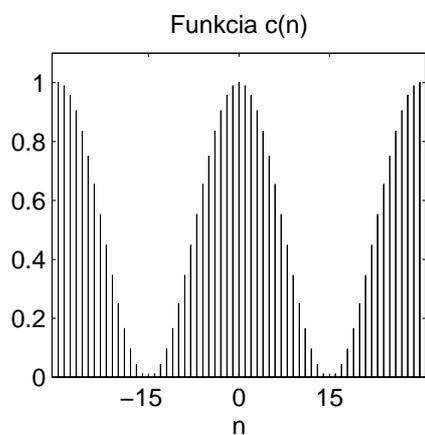
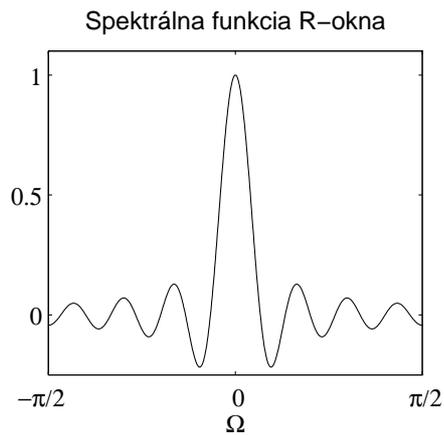
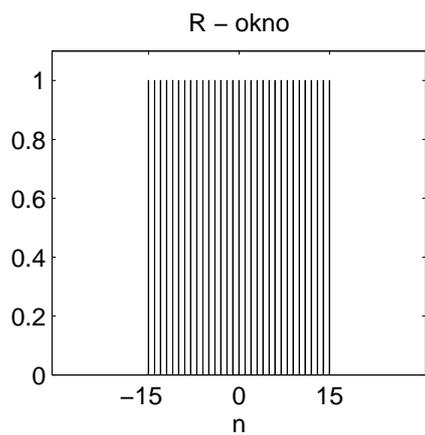
Obr. 5.9 Bartlettovo okno a jeho magnitúdová frekvenčná charakteristika



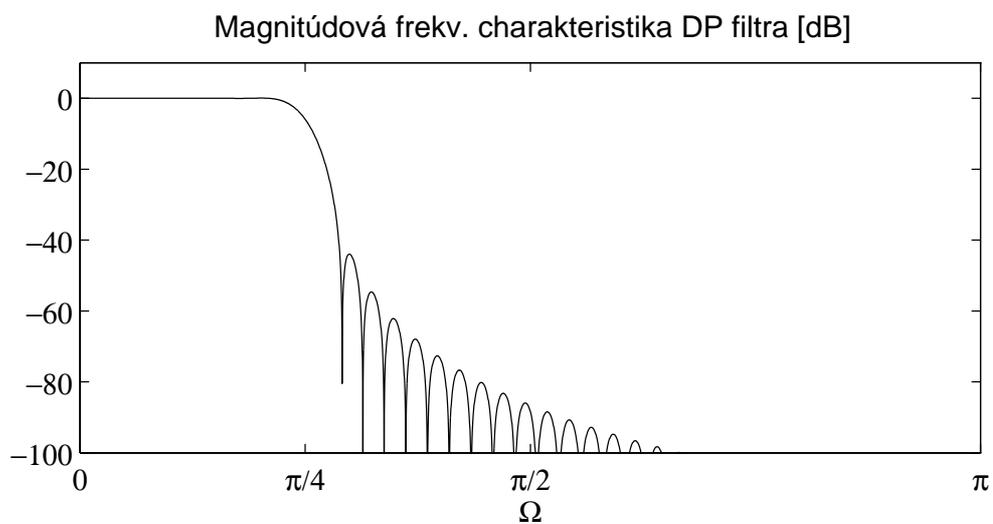
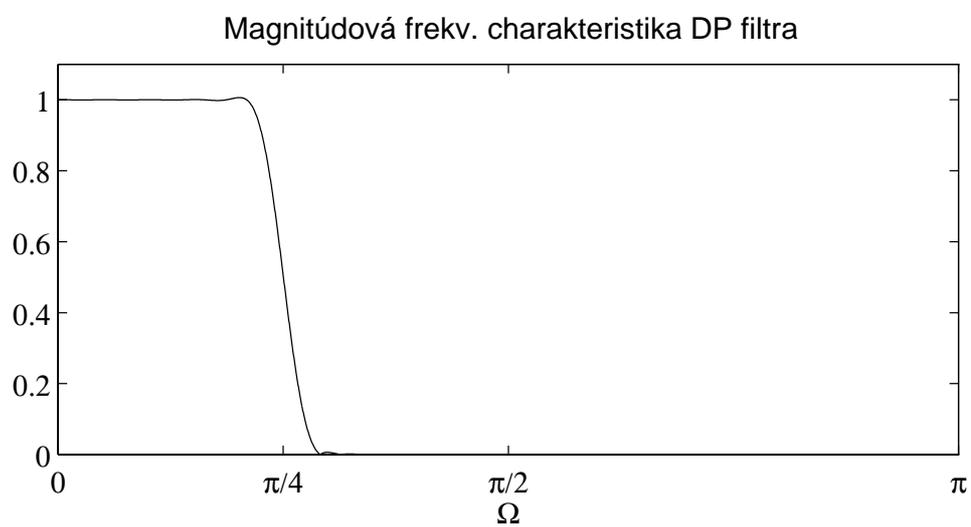
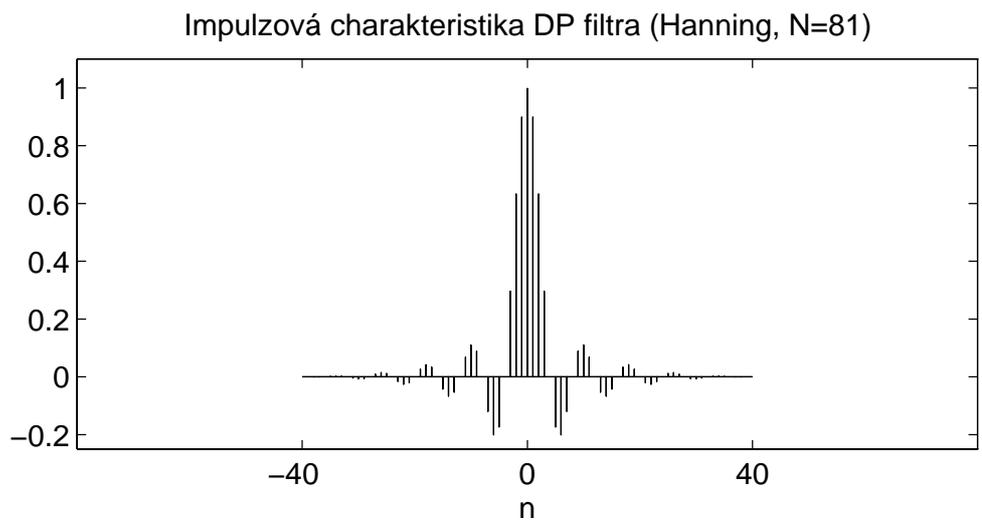
Obr. 5.10 Magnitudová frekvenčná charakteristika DP filtra získaná pomocou Bartlettovho okna



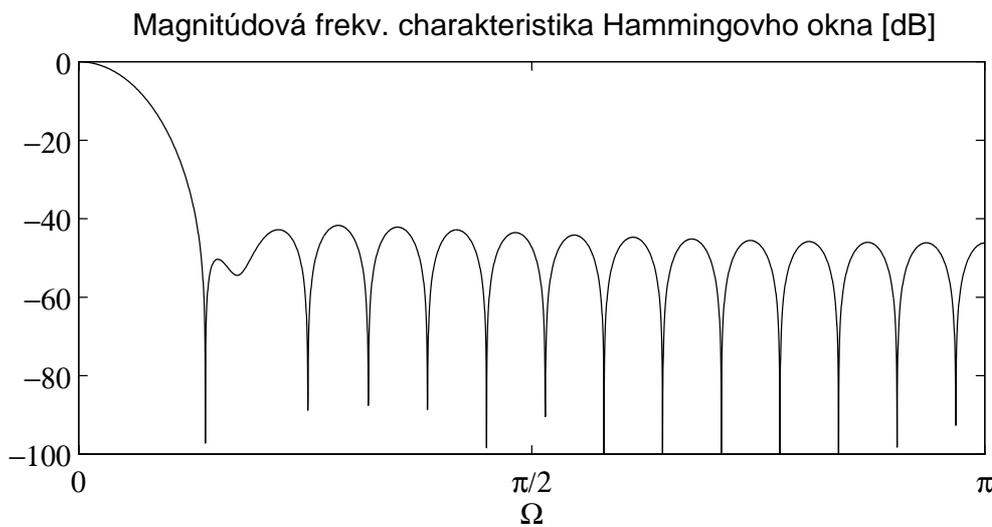
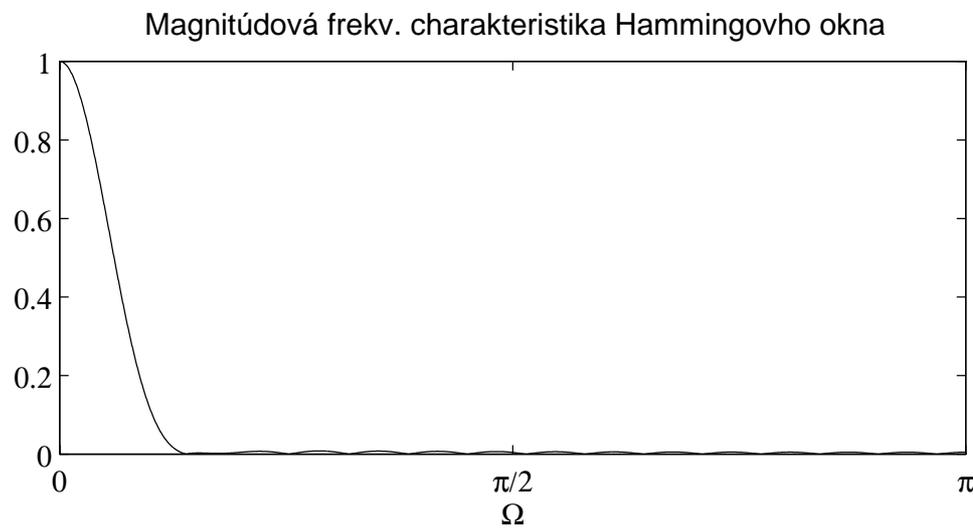
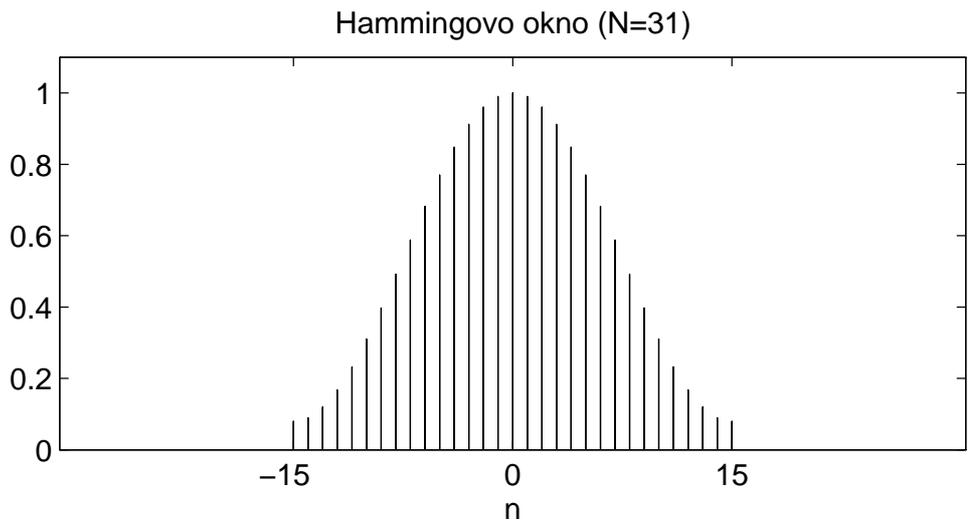
Obr. 5.11 Hanningovo okno a jeho magnitúdová frekvenčná charakteristika



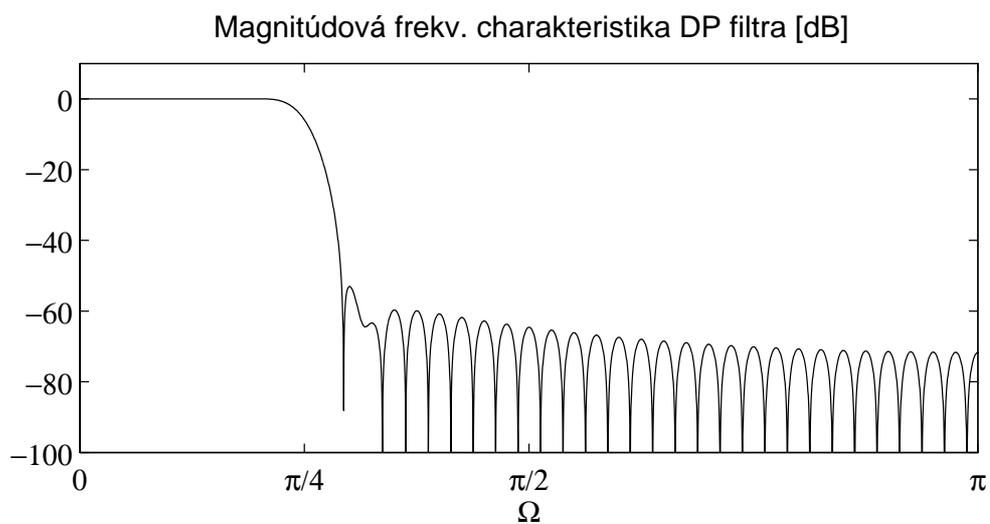
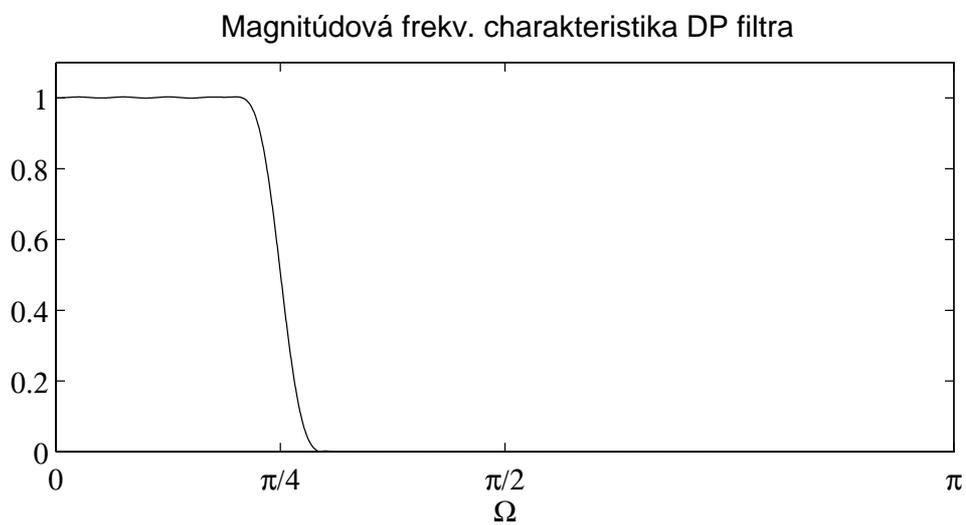
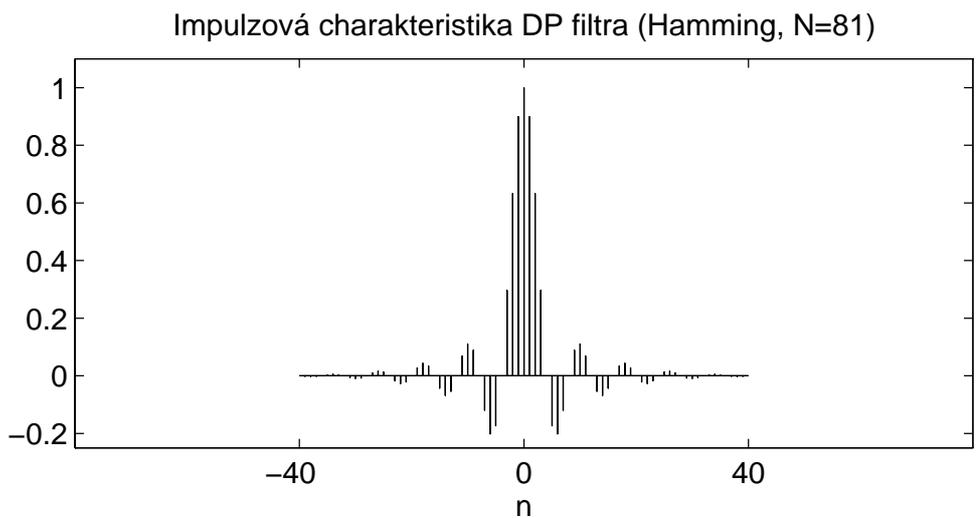
Obr. 5.12 $c(n) * w_R(n)$ a jeho spektrum



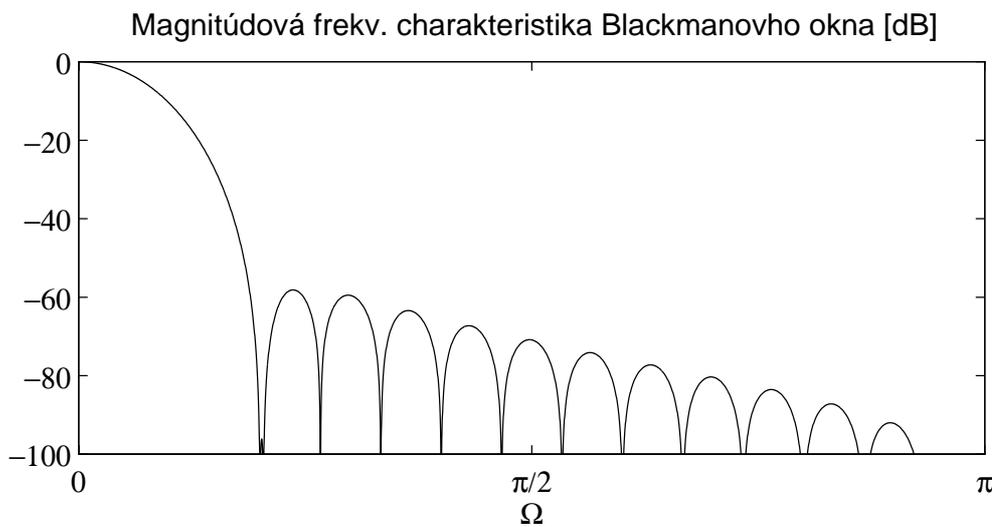
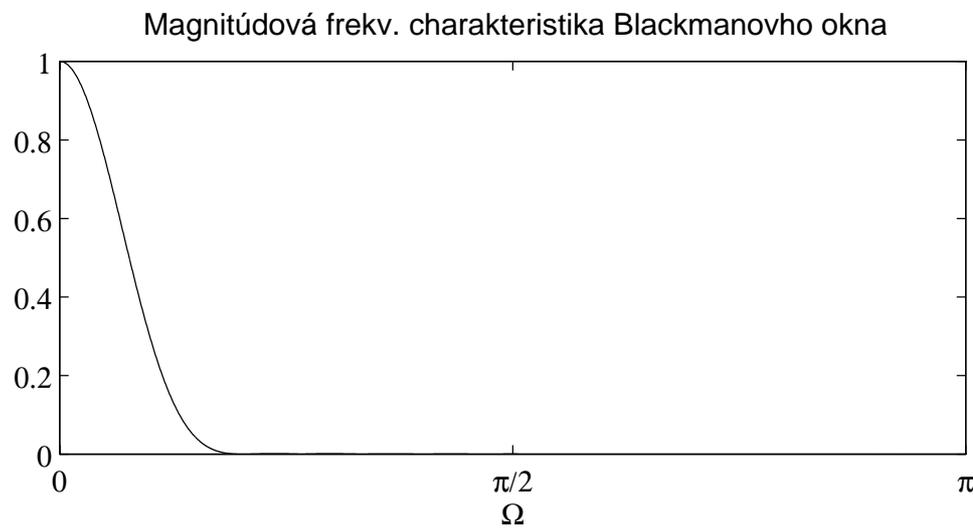
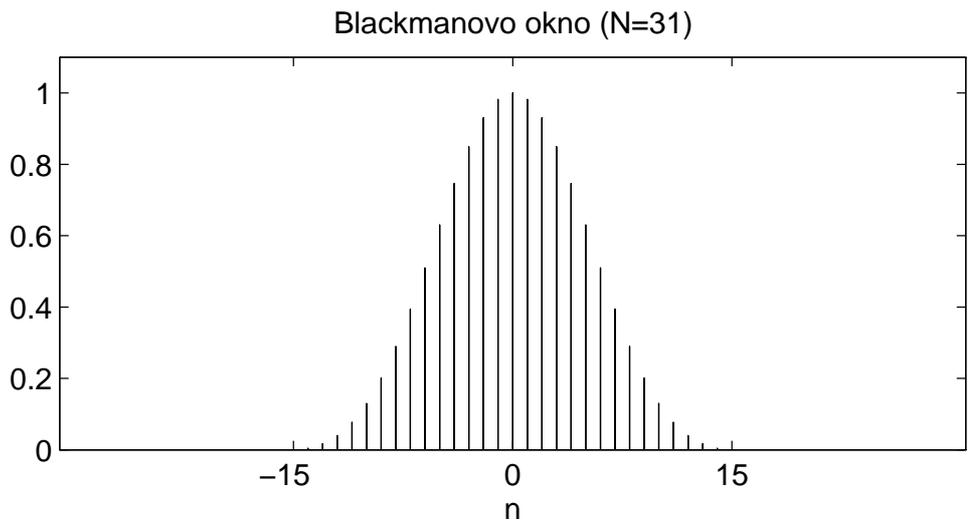
Obr. 5.13 Magnitúdová frekv. charakteristika DP filtra získaná pomocou Hanningovho okna



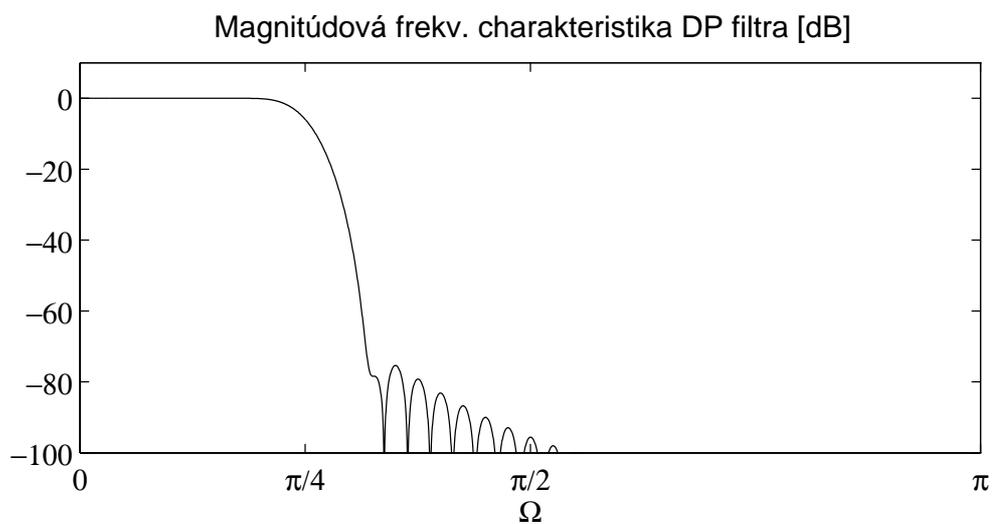
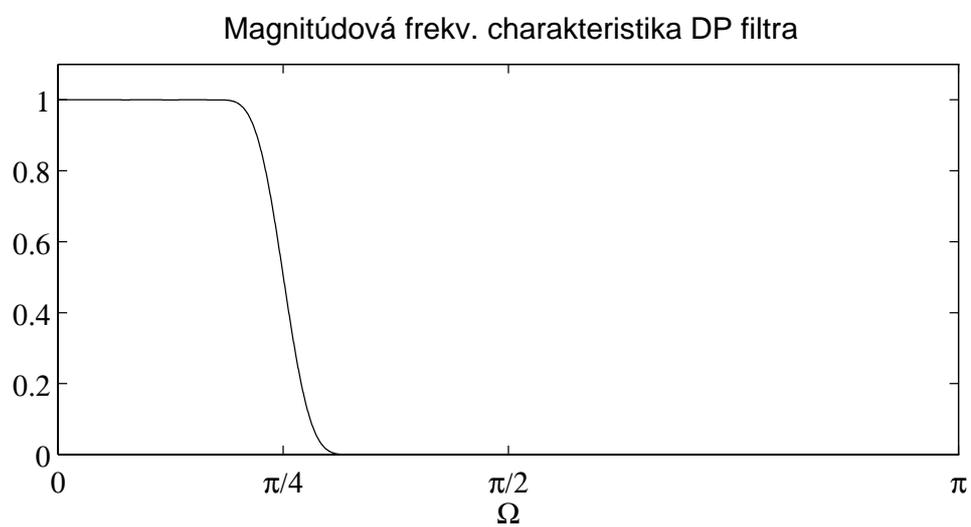
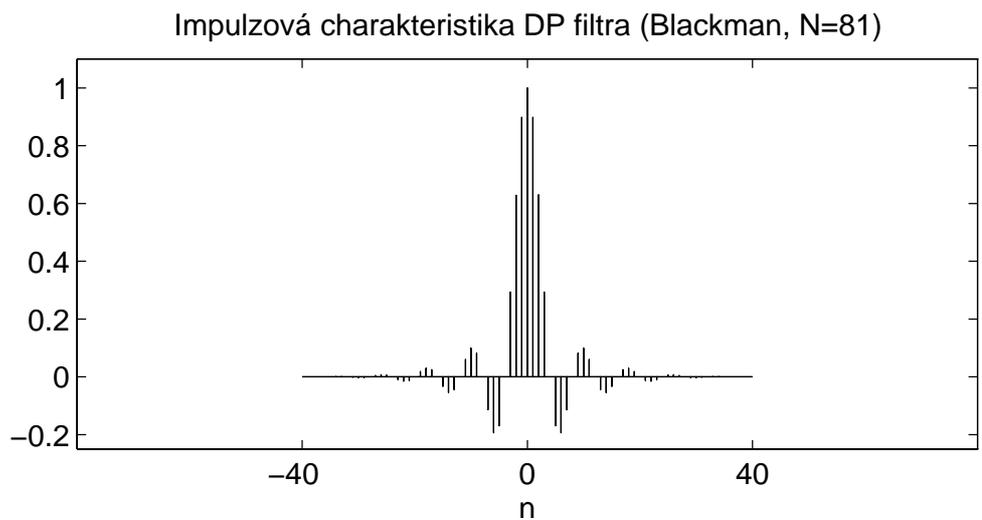
Obr. 5.14 Hammingovo okno a jeho magnitúdová frekvenčná charakteristika



Obr. 5.15 Magnitúdová frekvenčná charakteristika DP filtra získaná pomocou Hammingovho okna



Obr. 5.16 Blackmanovo okno a jeho magnitudová frekvenčná charakteristika



Obr. 5.17 Magnitúdová frekv. charakteristika DP filtra získaná pomocou Blackmanovho okna

Blackmanovo okno

Blackmanovo okno redukuje ďalej výšku postranných lalokov ale na úkor šírky hlavného laloka. Blackman prišiel na myšlienku, že ďalšie potlačenie postranných lalokov je možné pridaním ďalšej kosínusovej zložky do analytického vyjadrenia oknovej funkcie

$$w_B(n) = 0.42 + 0.5 \cos(2\pi n/(N-1)) + 0.08 \cos(4\pi n/(N-1)) \quad (5.15)$$

pre $-\frac{(N-1)}{2} \leq n \leq \frac{(N-1)}{2}$

Priebeh Blackmanovho okna v časovej a vo frekvenčnej oblasti je na obr.5.16. Veľkosť postranného laloka je zredukovaná na $-57dB$. Šírka hlavného laloka je však $\frac{12\pi}{N}$.

Princíp potlačenia postranných lalokov je podobný ako pri Hannigovom okne, ale magnitúdová frekvenčná charakteristika nekonečne dlhého Blackmanovho okna sa skladá z piatich frekvenčných zložiek oproti 3 zložkám pri Hanningovom okne.

Priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky DP filtra navrhnutého pomocou Blackmanovho okna je na obr.5.17. Odstup pásma tlmenia od pásma prepúšťania je asi $-74dB$, čo predstavuje výrazne zlepšenie oproti Hanningovmu, resp, Hammingovmu oknu.

Existuje niekoľko modifikácií Blackmanovho okna, ktoré redukovujú výšku postranných lalokov na úkor šírky hlavného laloka a naopak. Analýza týchto ako aj ďalších okien však presahuje rámec tejto publikácie. Najdôležitejšie oknové funkcie sú uvedené v Tab.5.3.