4.4.4 Zovšeobecnenie pojmu spektra

V druhej kapitole sme ukázali možnosti vyhodnotenia $Z\{x(n)\}$ vo frekvenčnej oblasti, čo znamenalo vyhodnotiť $X(z)$ na jednotkovej kružnici,t.j. dosadiť $z = e^{j\Omega}$. Vzťah (4.6) vyhodnocuje funkciu $X(z)$ analyzovaného signálu tiež na jednotkovej kružnici v rovine z, ale v ekvidistantne rozložených bodoch $z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$. Táto úvaha viedla mnohých autorov k zavedeniu nového pojmu **všeobecné spektrum.**

Porovnaním vzťahov $z = e^{j\Omega}$ a $z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ vidíme, že kým v prvom vzťahu dostávame frekvenčné charakteristiky vypočítané postupne pre každú zadanú hodnotu Ω, druhý vzťah umožňuje výpočet spektra v celej dávke N v bodoch $\frac{2\pi}{N}k$ samozrejme, tiež na jednotkovej kružnici roviny z. Predpokladajme hľadanie spektra signálu $x(n)$ na kružnici o polomere R. Zamýšľané zovšeobecnenie môžeme dosiahnuť pomocou vzťahu:

$$z \to R.e^{j\frac{2\pi}{N}k} \tag{4.56}$$

Zavedením tejto substitúcie zmeníme predpis pre výpočet DFT na vzťah:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n).\left(R.e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)^{-n} \tag{4.57.a}$$

alebo prepísaním na vzťah:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n).R^{-n}.e^{-j\frac{2\pi}{N}k.n} \tag{4.57.b}$$

čo je obraz na kružnici o polomere R.

Ak chceme pri výpočte rov.(4.48.b) využiť výhodu algoritmov FFT, potom namiesto pôvodného signálu $x(n)$ musíme priviesť na vstup FFT procesora predspracovaný signál:

$$x(n)^{\sim} = x(n).R^{-n} \tag{4.58}$$

Tento predpis umožňuje výpočet obrazu $X(z)$ v rovine z na kružnici o polomere R pomocou DFT.

Urobme výber iných bodov spektra na jednotkovej kružnici.Podľa rov.(4.6) prvá hodnota spektra je v bode e^{j0} t.j. v bode 1 na jednotkovej kružnici. Od tohoto bodu sú ostatné body rovnomerne rozložené v bodoch $e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$. V prípade, ak chceme mať prvú hodnotu vypočítanú v bode $e^{j\Theta}$ zavedieme substitúciu:

$$z \to e^{j\left(\Theta + \frac{2\pi}{N}k\right)} \tag{4.59}$$

Predpis pre výpočet DFT je:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-jn\Theta}.e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (4.60)$$

Takto získané spektrum je obrazom na jednotkovej kružnici v ekvidistantne rozložených bodoch $\frac{2\pi}{N}k$, pričom prenásobenie výrazom $e^{-jn\Theta}$ posúva tieto body o uhol Θ.

Možnosti výpočtu spektra v iných bodoch pomocou FFT algoritmov môžeme úplne zovšeobecniť zmenou definície na tvar:

$$z \to e^{j\frac{2\pi}{N}k} \to e^{(a+jb)}.e^{j\frac{2\pi}{N}k} \qquad (4.61)$$

kde môžeme voliť reálne konštanty a a b a tým dostávame realizáciu rôznych požiadaviek. Ak totiž $a = b = 0$ výsledky sú totožné s definíciou DFT.

V prípade $b = 0$ súbory bodov v ktorých sa určuje hodnota $X(k)$, sú rovnomerne rozložené na kružnici, ktorej polomer je daný hodnotou e^{a}. Iná možnosť je zmeniť konštantu a napr. na lineárnu závislosť

$a_0 + a_1 n$

kde a_0 a a_1 sú nové konštanty. Potom hodnoty $X(k)$ sa premiestnia na logaritmickú špirálu, ktorá podľa číselných hodnôt týchto konštánt sa môže zatvárať, alebo otvárať.

Samozrejme, že taktiež zmenou konštanty b na funkciu $b(n)$ môžeme zmeniť pôvodné rovnomerné rozloženie bodov $e^{j\frac{2\pi}{N}}$ na nerovnomerné.

Špeciálny prípad je, ak a aj b sú komplexné funkcie, potom hovoríme o tzv. čvrlikavej transformácii z.