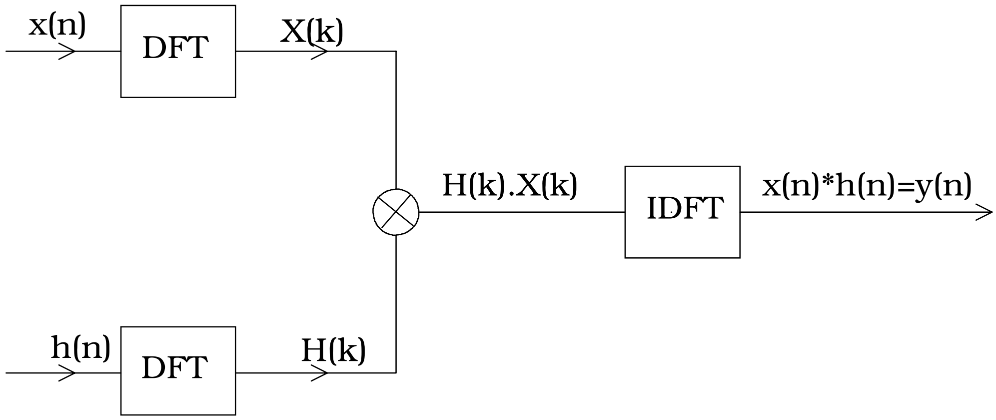
4.4.3 Kruhová konvolúcia

V prvej kapitole sme definovali možnosti modelovania sústav LDKI novým spôsobom - pomocou lineárnej konvolúcie , tiež nazývanej pomalá konvolúcia. Azda najvážnejšia možnosť aplikácie DFT sa týka práve tohoto modelovania.



Obr.4.7 *Proces konvolúcie*

Na obr.4.7 je ilustrovaný proces konvolúcie pomocou DFT a IDFT.

Na základe definície lineárnej konvolúcie môžeme napísať pre kruhovú konvolúciu dvoch periodických signálov s periódou N vzťah

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m).h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m).x(n-m) \tag{4.50}$$

kde $y(n)$ je periodická postupnosť s periódou N. Podľa obr.4.7 $y(n)$ získame pomocou inverznej diskrétnej Fourierovej transformácie produktu, ktorý dostaneme súčinom dvoch postupností DFT

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k).H(k)W^{kn} \tag{4.51}$$

kde

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i).W^{-ki}$$
$$H(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} h(m).W^{-km} \tag{4.52}$$

po dosadení rov.(4.52) do rov.(4.51) dostávame

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i).W^{-k.i} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h(m).W^{-k.m}.W^{k.n} \qquad (4.53)$$

úpravou dostaneme

$$y(n) = \frac{1}{N.N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(i).h(m). \sum_{k=0}^{N-1} W^{-k(i+m-n)} \qquad (4.54)$$

Vzťah $\sum_{k=0}^{N-1} W^{-k(i+m-n)}$ je rovný N za prekpokladu, že $i = n - m$, ináč je tento vzťah rovný nule. Potom ale rov.(4.54) môžeme prepísať do tvaru rov.(4.50).

Ako vieme, algoritmus DFT pracuje na základe periodických, resp. periodifikovaných signálov, pričom na výstupe poskytuje údaje o jednej perióde spektra. Analogicky je výstup IDFT jednou periódou generovaného periodického signálu. Ak chceme teda pomocou DFT a IDFT počítať neperiodickú konvolúciu, musíme voliť dávku N rovnú aspoň dĺžke lineárnej konvolúcie (rov.(1.24)). V modeli na obr.4.7 musíme preto zabezpečiť dávku vstupného signálu $x(n)$ úsekmi dĺžky D_x, ktoré doplnia potrebnú hodnotu $N \geq D_x + D_h - 1$ nulovými vzorkami. Samozrejme, pri tom vychádzame z predpokladu, že impulzová charakteristika sústavy $h(n)$ je konečná s dĺžkou D_h. Pred vstupom do subsystému DFT aj túto dopĺňame na potrebnú dávku N nulami. Týmto spôsobom môžeme spracovať aj signál nekonečnej dĺžky s konečnou impulzovou charakteristikou podľa predpisu

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) * h(n) \qquad (4.55)$$

pri zabezpečení správnej superpozície výsledkov.