4.4 Využitie DFT a IDFT

4.4.1 Spektrálna analýza

Dôležitosť analyzovania prirodzených signálov biomedicínskych, seizmických, zvukových, atď. viedla k rozsiahlemu použitiu DFT. Umožňuje nám identifikovať spektrálne zložky. Napriek tomu, že naprostá väčšina analyzovaných signálov má charakter aperiodický, pre spracovanie signálov sa úspešne používa práve DFT. V týchto prípadoch musíme voliť veľkosť dávky N rovnú dĺžke signálu. Tento proces je v literatúre známy ako periodifikácia signálu. V prípade periodického signálu musíme zase voliť veľkosť dávky N rovnú aspoň jednej perióde.

Pri výpočte spektra analyzovaného signálu sa podľa definície DFT predpokladá, že signál je periodický s periódou rovnou práve veľkosti dávky N. Ako sme uviedli už skôr, napriek tomu pomerne prísnemu obmedzeniu algoritmu DFT, tento sa s úspechom používa aj na analýzu signálov s inou dávkou periódy, resp. neperiodických signálov.

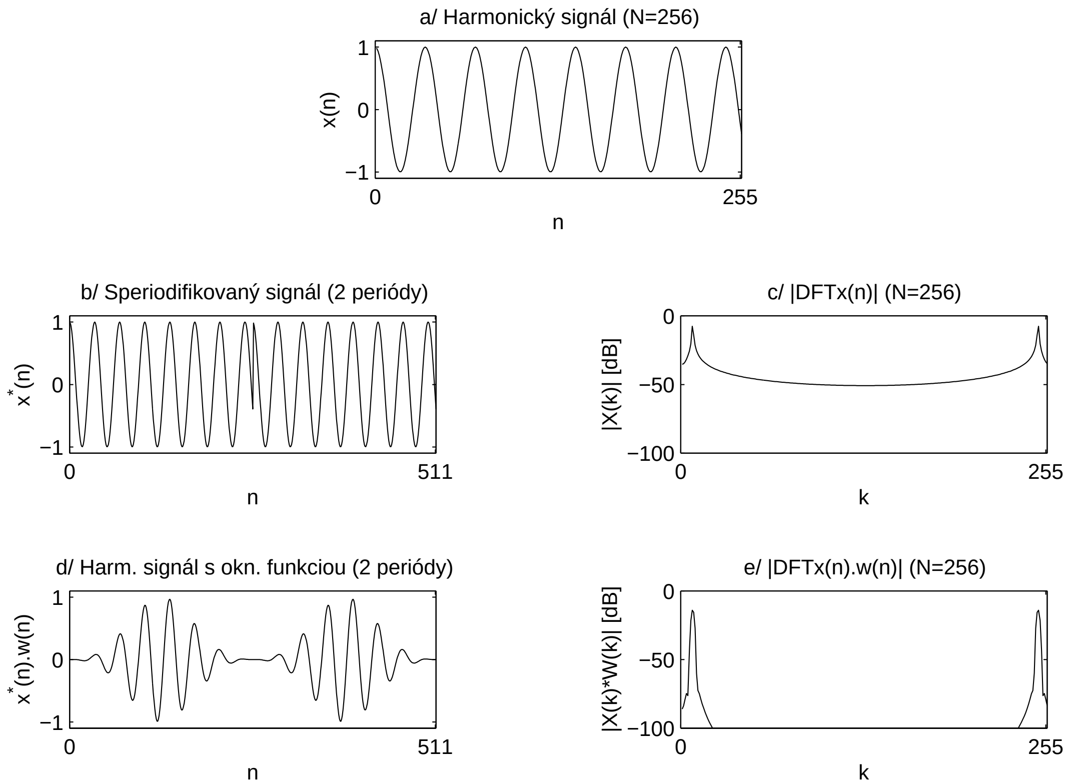
Pozrime sa najprv na prípad, keď dávka periódy signálu nekorešponduje s veľkosťou dávky N DFT.

Príklad je opísaný na obr. 4.6. Všetky signály na obr. 4.6 sú diskrétne, pre lepšiu názornosť však miesto vzoriek zobrazujeme obálky týchto signálov.

Uvažujme diskrétny signál $x(n)$ podľa obr. 4.6a. Jedná sa vlastne o diskrétny harmonický signál s periódou $M = 35$ vzoriek, prenásobený pravouhlým oknom. Nech dávka DFT, ktorou tento signál budeme analyzovať, je $N = r.M$, pričom $r = 7,3$. To znamená, že N vzoriek signálu $x(n)$ je vstupom pre DFT. Algoritmus DFT vzhľadom na predpoklad periodicity analyzovaných signálov predpokladá, že vstupom do DFT je signál $x^*(n)$, ktorý dostaneme speriodifikovaním signálu $x(n)$ s periódou N podľa obr.4.6b. Poznamenajme, že podobný jav dosiahneme aj pri analýze neperiodických signálov. Amplitúdové spektrum $|X(k)|$ analyzovaného signálu je na obr. 4.6c. Podľa poznatkov z predchádzajúcich príkladov spektrum by malo obsahovať iba dve nenulové hodnoty a to v bode $k = r$ a $k = N - r$. To je však iba teoretická úvaha. Takýto výsledok môžeme očakávať iba ak r je celé číslo, t. j. do dávky N algoritmu DFT vojde celistvý násobok períód analyzovaného harmonického signálu. V našom prípade r nie je celé číslo. Namiesto dvoch paličiek dostali sme pomerne bohaté spektrum, ktoré vykazuje dve maximá a to práve v okolí bodov $k = r$ a $k = N - r$. Obohatenie, alebo tiež ako sa hovorí, "rozliatie" spektra je spôsobené nespojitosťou signálu podľa obr. 4.6b., ktorá je spôsobená skutočnosťou, že r nie je celé číslo. Tento jav spôsobuje komplikácie pri spektrálnej analýze dlhých neperiodických signálov, akými sú napr. rečové signály.

Z matematického hľadiska sa jedná vlastne o prenásobenie analyzovaného signálu pravouhlým oknom. (teórii oknových funkcií sa bližšie venujeme v 5. kapitole.) Tu iba poznamenajme, že z hľadiska potlačenia "rozliatia" spektra je vhodné, ak vzniknutú nespojitosť analyzovaného signálu obmedzíme použitím iného okná ako pravouhlého.

Na obr. 4.6d vidíme pôvodný harmonický signál prenásobený Blackmanovým oknom. (Pre názorné porovnanie s obr. 4.6b sme opäť zobrazili dve periódy takéhoto signálu.) Na obr. 4.6e je amplitúdové spektrum signálu z obr. 4.6d. Ak porovnáme obr. 4.6c a obr. 4.6e, použitím vhodných oknových funkcií výrazne obmedzíme "rozliatie" spektra a obraz spektra analyzovaného signálu sa blíži k teoretickým hodnotám.



Obr 4.6 *Analýza neperiodického signálu pomocou okien*

Ako sme v predchádzajúcich príkladoch ukázali, DFT je určená na výpočet spektier periodických signálov. Vyplýva to priamo z definície. Napriek tomu, DFT je nástroj, ktorý umožňuje analýzu signálov konečnej dĺžky a s výhodou sa na to používa. Pre neperiodické signály konečnej dĺžky najjednoduchším prípadom je, ak veľkosť dávky N je totožná s dĺžkou analyzovaného signálu. Samozrejme, že týmto sme pôvodný signál periodifikovali a vlastne vytvorili sme signál $x^1(n)$ nekonečnej dĺžky s periódou N, t.j.

$$x^1(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} x(n+sN) \tag{4.41}$$

a pre tento signál vypočítame spektrum $X^1(k)$, ktoré je taktiež periodické, t.j. platí:

$$X^1(k) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} X^1(k+sN) \tag{4.42}$$

Pôvodný signál $x(n)$ môžeme vyjadriť z rov.(4.41)

$$x(n) = \begin{cases} x^1(n) & \text{pre } 0 \le n \le (N-1) \\ 0 & \text{pre } n \text{ iné} \end{cases} \tag{4.43}$$

čo je jedna perióda signálu $x^1(n)$.

Spektrum pôvodného signálu $x(n)$ je

$$X(k) = \begin{cases} X^1(k) & \text{pre } 0 \le k \le (N-1) \\ 0 & \text{pre } k \text{ iné} \end{cases} \tag{4.44}$$

Potom pre spektrum $X(k)$ signálu konečnej dĺžky môžeme napísať

$$X(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{pre } 0 \le k \le (N-1) \\ 0 & \text{pre } k \text{ iné} \end{cases} \tag{4.45}$$

a pre inverznú diskrétnu Fourierovu transformáciu

$$x(n) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{pre } 0 \le k \le (N-1) \\ 0 & \text{pre } n \text{ iné} \end{cases} \tag{4.46}$$

Rov.(4.45) a (4.46) reprezentujú analýzu a syntézu pomocou diskrétnej Fourierovej transformácie signálu konečnej dĺžky.

V prípade, že dĺžka analyzovaného signálu M je menšia ako je dávka N potom analyzovaný signál musíme doplniť na konci nulovými hodnotami vzoriek. Dôsledkom je výpočet viacerých spektrálnych vzoriek, čo sa často nazýva zhusťovanie (interpolácia) v spektrálnej oblasti.

V prípade neobmedzene dlhého signálu $x(n)$, ktorý má nenulové hodnoty v rozsahu $n \in \langle 0, \infty \rangle$, rozložíme tento na úseky dĺžky L, takže

$$x(n) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(n) \tag{4.47}$$

kde $x_r(n) = x(n)$ pre $rL \le n \le (r+1)L$ a $r \in \langle 0, \infty \rangle$ a spektrálna analýza potom ale vyžaduje použitie princípu superpozície čiastkových dávok.