4.1 Definícia DFT a IDFT

Majme diskrétny periodický signál $x(n)$ s periódou N. Potom diskrétna Fourierova transformácia (DFT) je daná:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{4.6}$$

kde $X(k)$ je obraz signálu $x(n)$ vo frekvenčnej oblasti, alebo stručne hovoríme o spektre signálu $x(n)$.

Majme diskrétne periodické spektrum $X(k)$ s periódou N, potom diskrétny signál $x(n)$ vyjadríme pomocou inverznej diskrétnej Fourierovej transformácie (IDFT)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{4.7}$$

Zavedieme označenie, ktoré je bežné v literatúre

$$W = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

potom definíca DFT má tvar:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot W^{-kn} \tag{4.8}$$

a definícia IDFT

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cdot W^{kn} \tag{4.9}$$

Kým $x(n)$ je postupnosť vzoriek diskretného periodického signálu, $X(k)$ sú koeficienty konečnej postupnosti dlžky N ktoré predstavujú frekvenčné spektrum tohoto signálu. Z predchádzajúcej kapitoly už vieme, že frekvenčné charakteristiky môžeme získať z rov.(2.3), ak dosadíme $z = e^{j\Omega}$. Ak porovnáme teraz rov.(4.6) s rov.(2.3) vidíme, že koeficienty $X(k)$ môžeme získať aj pomocou definície transformácie Z aplikovanej na $x(n)$ a dosadením $z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$. Kým v prvom prípade získavame frekvenčné charakteristiky ako spojité funkcie Ω, výpočtom pomocou DFT získavame frekvenčné spektrum v N ekvidistantných bodoch na jednotkovej kružnici.

Zamyslime sa, ako z koeficientov $X(k)$, ktoré sme vypočítali pomocou DFT, vypočítame $X(\Omega)$.

Do rov.(2.3) dosadíme za $x(n)$ rov.(4.7)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right)z^{-n} \tag{4.10}$$

ktorú môžeme prepísať :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}\right)^n \tag{4.11}$$

Druhá sumácia predstavuje geometrický rad, ak urobíme jeho súčet

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \tag{4.12a}$$

resp.

$$X(z) = (1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{\left(1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}\right)} \tag{4.12b}$$

Frekvenčné charakteristiky dostaneme, ak dosadíme $z = e^{j\Omega}$

$$X(e^{j\Omega}) = (1 - e^{-j\Omega N}) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{\left(1 - e^{-j\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}\right)} \tag{4.13}$$

Tento vzťah je známy ako polynomiálna (Lagrangeova) interpolačná formula pre výpočet $X(\Omega)$ zo známej postupnosti $X(k)$ vypočítanej pomocou DFT.