2.4.1 Vplyv koreňov na vlastnosti frekvenčných charakteristík

Prenosovú funkciu diskrétnej sústavy môžeme napísať v tvare koreňových súčiniteľov, ako je zrejmé z rov.(2.28). Vlastnosti sústav jednoznačne určujú koeficienty prenosovej funkcie (2.24), resp. jej korene. Skúsme analyzovať vplyv jednotlivých typov koreňových súčiniteľov na priebeh frekvenčných charakteristík sústav.

Uvažujme **reálny koreň** ako nulový bod prenosovej funkcie. Prenosová funkcia má potom tvar:

$$H(z) = (1 - z_{0k} z^{-1}) \tag{2.58}$$

a jej frekvenčné charakteristiky dostaneme , ak $z = e^{j\Omega}$

$$H(\Omega) = (1 - z_{0k} e^{-j\Omega}) = 1 - z_{0k} \cdot \cos\Omega + j\, z_{0k} \sin\Omega \tag{2.59}$$

Magnitúdová frekvenčná charakteristika prenosovej funkcie má tvar:

$$M(\Omega) = \sqrt{(1 - z_{0k} \cdot \cos\Omega)^2 + (z_{0k} \cdot \sin\Omega)^2} \tag{2.60}$$

a fázová frekvenčná charakteristika

$$\varphi(\Omega) = \operatorname{arctan} \frac{z_{0k} \cdot \sin\Omega}{1 - z_{0k} \cdot \cos\Omega} \tag{2.61}$$

Komplexný výraz (2.59) môžeme znázorniť v komplexnej z rovine pomocou kružnice so stredom v bode $z = 1$ (obr.2.13). Polomer kružnice je určený veľkosťou koreňa z_{0k} a koreňový súčiniteľ zobrazujeme pomocou vektora, ktorý má jeden koncový bod v bode $z = 0$ a druhý leží na tejto kružnici a premiestňuje sa po nej v závislosti od zmeny hodnoty Ω. V dvoch bodoch je vektor práve na reálnej osi a to pre $\Omega = 0$ a pre $\Omega = \pi$. Kým v prvom prípade dostávame minimum

$$M_{MIN}(\Omega) = 1 - z_{0k} \tag{2.62}$$

v prípade $\Omega = \pi$ dostávame maximum

$$M_{MAX}(\Omega) = 1 + z_{0k} \tag{2.63}$$

Samozrejme, že uvedená úvaha platí, ak nulový bod je kladný, t.j. $z_{0k} > 0$. V prípade, že nulový bod je záporný t.j. $z_{0k} < 0$, rov.(2.58) bude mať tvar

$$H(z) = (1 + z_{0k} z^{-1})$$

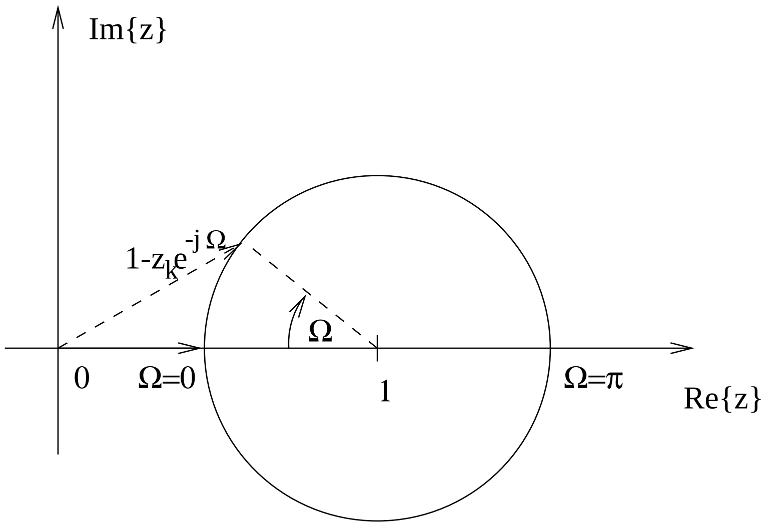
a jej frekvenčné charakteristiky

$$M(\Omega) = \sqrt{(1 + z_{0k} \cos\Omega)^2 + (z_{0k} \sin\Omega)^2}$$

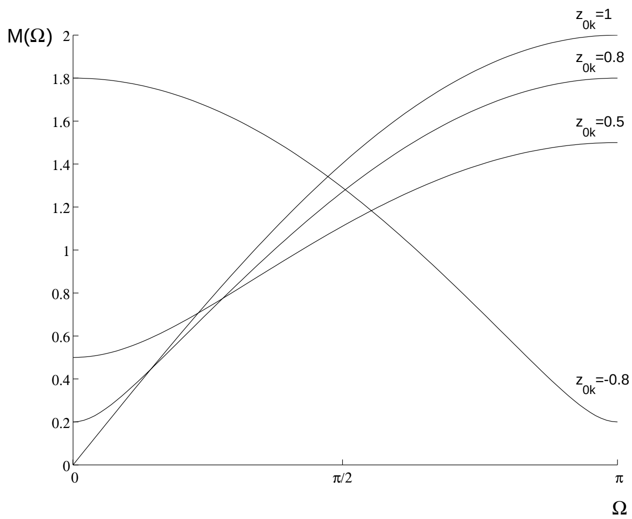
$$\varphi(\Omega) = \arctan \frac{z_{0k} \sin \Omega}{1 + z_{0k} \cos \Omega}$$

Z uvedených rovníc je zrejmé, že nastáva zmena smeru pohybu koncového vektora po kužnici v obr.2.13 a extrémy si vzájomne vymenia miesta.

Priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky prenosovej funkcie v rozsahu $\langle 0, \pi \rangle$ pre niektoré hodnoty reálnych nulových bodov je na obr.2.14.



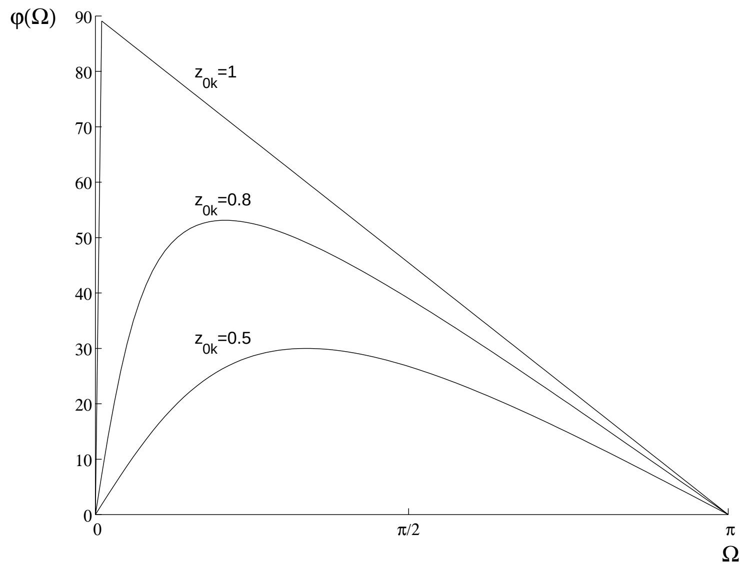
Obr.2.13 *Zobrazenie vektora $H(\Omega)$ v z rovine*



0br.2.14 *Priebeh $M(\Omega)$ pre niektoré hodnoty z_{0k}*

Ako ukazuje obr.2.14, ak reálny koreň je nulovým bodom prenosovej funkcie a je kladný, t.j.$z_{0k}\rangle 0$, potom priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky je charakteristický pre hornopriepustný systém, kým pre záporný nulový bod, t.j. $z_{0k}\langle 0$ vedie k systému s dolnopriepustným charakterom. Z vektorového zobrazenia môžeme získať predstavu aj o fázovej frekvenčnej charakteristike prenosovej sústavy (rov.(2.61)). Táto má dva extrémy a to pri kmitočtoch, kedy sa vektor stáva dotyčnicou ku kružnici. Na obr.2.15 sú nakreslené priebehy fázových charakteristík pre tie isté hodnoty nulových bodov,ako v obr.2.14.

Kým pri magnitúdovej frekvenčnej charakteristike zmena veľkosti koreňa ovplyvňuje hodnotu extrémov, ale ich poloha sa nemení, pri fázovej frekvenčnej charakteristike veľkosť koreňa ovplyvňuje veľkosť aj polohu extrému. Spoločným znakom oboch charakteristík je monotónnosť ich priebehov medzi extrémami.



Obr.2.15 *Priebeh* φ(Ω) *fázovej charakteristiky pre rôzne* z_{0k}

V prípade, že reálny koreň je pólom prenosovej funkcie, táto má tvar:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z_{xk} \cdot z^{-1}} \qquad (2.64)$$

magnitúdová frekvenčná charakteristika má priebeh recipročný k priebehu z obr.2.14, maximum sa mení na minimum a naopak. Ak si to uvedomíme, potom kladný reálny pól bude reprezentovať dolnopriepustnú sústavu a záporný pól zase hornopriepustnú sústavu.

Pozrime sa teraz na sústavu s prenosovou funkciou $H(z)$ ako na sústavu, ktorá generuje impulzovú charakteristiku $h(n)$. V prípade, že $H(z)$ je daná vzťahom (2.58), impulzová charakteristika je konečná a má tvar:

$$\mathbf{h}(n) = \{1, -z_{0k}\} \tag{2.65}$$

V prípade, že $H(z)$ je v tvare (2.64), postupným delením dostávame

$$1 : 1 - z_{xk}z^{-1} = 1 + z_{xk}z^{-1} + z_{xk}^2 z^{-2} + z_{xk}^3 z^{-3} + \ldots$$

takže impulzová charakteristika je daná:

$$\mathbf{h}(n) = \{\, 1,\, z_{xk},\, z_{xk}^2,\, z_{xk}^3,\, z_{xk}^4,\, \ldots\} \tag{2.66}$$

z čoho nám hneď vyplýva, že ak má byť sústava stabilná, musí byť $z_{xk} \langle 1$, čiže pól musí ležať vovnútri jednotkovej kružnice.

V prípade, že $z_{xk} = 1$, impulzová charakteristika $h(n)$ je konštantná a rovná 1, hovoríme, že sústava je na hranici stability.

Dvojica komplexne združených koreňov.

Ak má prenosová funkcia $H(z)$ komplexne združené nulové body, potom má tvar:

$$H(z) = (1 - z_{0k}z^{-1})(1 - \overline{z_{0k}}z^{-1}) = 1 - 2\mathrm{Re}(z_{0k}) \cdot z^{-1} + |z_{0k}|^2 \cdot z^{-2} \tag{2.67}$$

ak $z_{0k} = |z_{0k}|e^{j\psi_{0k}}$ a $2{\cdot}\mathrm{Re}(z_{0k}) = 2|z_{0k}|\cos\psi_{0k}$, potom môžeme napísať:

$$H(z) = 1 - 2|z_{0k}| \cdot \cos\psi_{0k} \cdot z^{-1} + |z_{0k}|^2 \cdot z^{-2} \tag{2.68}$$

Pre vzťah (2.68) vyjadrime štvorec magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky:

$$\begin{aligned} M^2(\Omega) = {} & 1 + 4|z_{0k}|^2\cos^2\Psi_{0k} + |z_{0k}|^4 + 2|z_{0k}|^2(2\cos^2\Omega - 1) - \\ & -4|z_{0k}| \cdot \cos\Psi_{0k}\left(1 + |z_{0k}|^2\right) \cdot \cos\Omega \end{aligned} \tag{2.69}$$

Derivovaním vzťahu (2.69) podľa Ω dostaneme výraz

$$4|z_{0k}|\cos\Psi_{0k}\left(1 + |z_{0k}|^2\right)\sin\Omega - 8|z_{0k}|^2\cos\Omega\sin\Omega \tag{2.70}$$

z ktorého môžeme určiť extrém. Je zrejmé, že jedno triviálne riešenie je, ak $\sin\Omega = 0$, t.j. pre $\Omega = 0$ a aj pre $\Omega = \pi, 2\pi$.

Ďalšie riešenia dostávame z výrazu(2.70) za predpokladu, že ho položíme rovný nule. Potom dostávame

$$\cos\Omega_e = \frac{1}{2}\cos\Psi_{0k}\left(|z_{0k}| + \frac{1}{|z_{0k}|}\right) \tag{2.71}$$

Prvé riešenie predstavuje dva extrémy. ktoré sú na okrajoch pásma pomerovej kruhovej frekvencie Ω, druhé riešenie určuje tretí extrém, ktorý je však obmedzený podmienkou

$$\cos\Omega_e \le 1 \tag{2.72.a}$$

resp.

$$\frac{1}{2}\left(|z_{0k}| + \frac{1}{|z_{0k}|}\right) \cdot \cos\Psi_{0k} \leq 1 \qquad (2.72.b)$$

Riešením rov.(2.72.b) dostaneme:

$$|z_{0k}| \leq \frac{1}{\cos\Psi_{0k}} \pm \tan\Psi_{0k} \qquad (2.73)$$

Vzťah (2.73) určuje hraničné hodnoty veľkosti komplexného koreňa.

Na základe toho môžeme zostrojiť krivku, ktorá pre každý uhol ψ_{0k} určí intervaly:

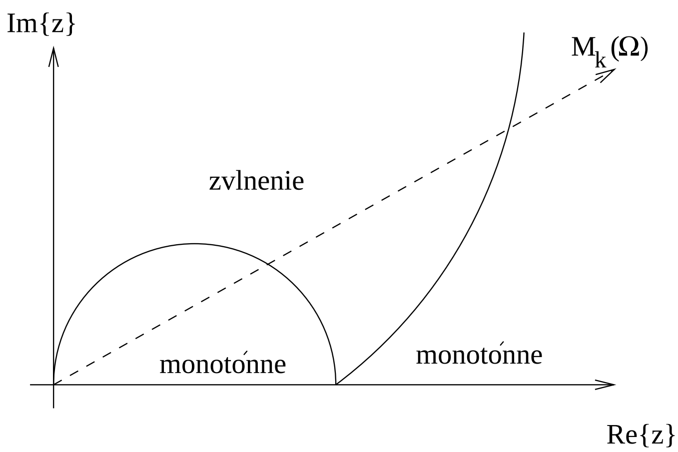
a)v ktorom sa vyskytuje tretí extrém (dostávame zvlnenú magnitúdovú frekvenčnú charakteristiku)

b)v ktorom sa tretí extrém nevyskytuje (magnitúdová charakteristika má monotónny priebeh) .

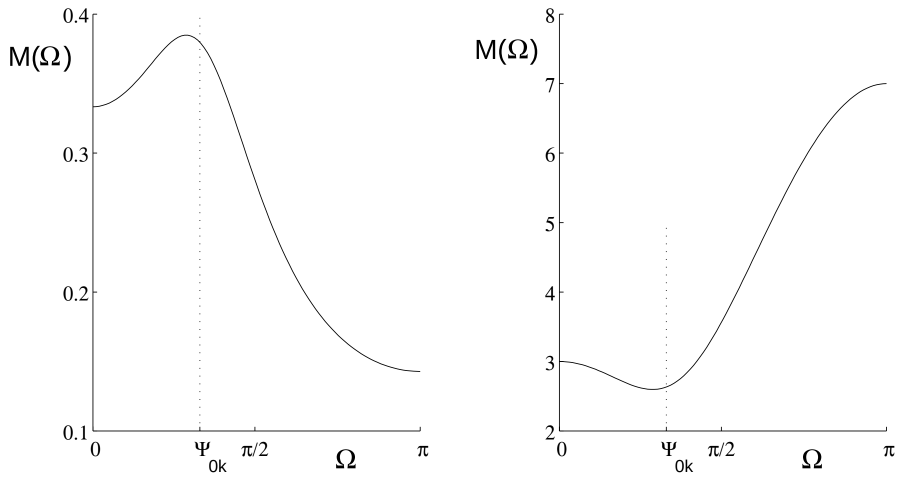
Ako je zrejmé z obr.2.16 (ale aj zo vzťahu (2.73)) pre $\psi_{0k} = \frac{\pi}{2}$ získame tretí extrém, pričom na veľkosti $|z_{0k}|$ vôbec nezáleží. Pre iné hodnoty ψ_{0k} sú oblasti diferencované.

Charakteristický priebeh magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky v prípade, že koreň reprezentuje nulový bod, je na obr.2.17.b.

V prípade, že koreň predstavuje pól prenosovej funkcie , priebeh $M(\Omega)$ je na obr.2.17.a. V tomto prípade musíme dbať, aby koreň neležal mimo jednotkovej kružnice, lebo systém by bol nestabilný.



Obr.2.16 *Oblasti monotónnej a zvlnenej magnitúdovej frekvenčnejcharakteristiky v z rovine*



a) koreň z_{xk} je pólom b) koreň z_{0k} je mulovým bodom

Obr. 2.17 *Priebehy magnitúdovej frekvenčnej charakteristiky*

Vyšetrime teraz vplyv koreňov na fázovú charakteristiku. Predovšetkým vyjadrime si vzťah pre fázovú charakteristiku

$$\tan\varphi(\Omega) = \frac{2|z_{0k}|\cos\Psi_{0k}\sin\Omega - |z_{0k}|^2\sin 2\Omega}{1 - 2|z_{0k}|\cos\Psi_{0k}\cos\Omega + |z_{0k}|^2\cos 2\Omega} \tag{2.74}$$

Tento vzťah ukazuje na nelineárnosť fázovej charakteritiky.

Analyzujme vlastnosti koreňového súčiniteľa a jeho vplyv na príslušnú impulzovú charakteristiku. Ak sa jedná o nulové body, potom impulzová charakteristika $h(n)$ nadobúda hodnoty

$$\mathbf{h}(n) = \{1, -2\mathrm{Re}\{z_{0k}\}, |z_{0k}|^2\} \tag{2.75}$$

veľkosť $|z_k|$ neovplyvní stabilitu systému.

Ak sa jedná o pól sústavy, potom delením od najvyšších mocnín dostaneme triviálne vyjadrenie $Z\{h(n)\}$. Impulzová charakteristika má tvar:

$$\mathbf{h}(n) = \{1, -2|z_{xk}|\cos\Psi_{xk}, |z_{xk}|^2(4\cdot\cos^2\Psi_{xk} - 1), \\ |z_{xk}|^3 4\cos\Psi_{xk}(1 - 2\cos^2\Psi_{xk}), \ldots\} \tag{2.76}$$

a vzhľadom na narastajúce mocniny z, podmienka stability vyžaduje, aby $|z_{xk}| < 1$, t.j. póly musia ležať vovnútri jednotkovej kružnice.