2.3 Súvis medzi z a p rovinou

Podrobme rozboru súvislosť komplexných rovín z a p. Ak si uvedomíme význam člena z v prenosovej funkcii $H(z)$, tento predstavuje neskreslené oneskorenie vzoriek signálu o jeden taktovací interval $T_{vz} = \frac{1}{f_{vz}}$. Laplaceova transformácia pre rovnakú úlohu ponúka exponenciálny člen e^{pt}
 Na základe tejto úvahy môžeme napísať vzťah medzi týmito dvomi komplexnými rovinami

$$z \rightarrow e^{pT_{vz}} = e^{(\sigma+j\omega)T_{vz}} = e^{\frac{\sigma+j\omega}{f_{vz}}} = e^{\Sigma+j\Omega} \qquad (2.36)$$

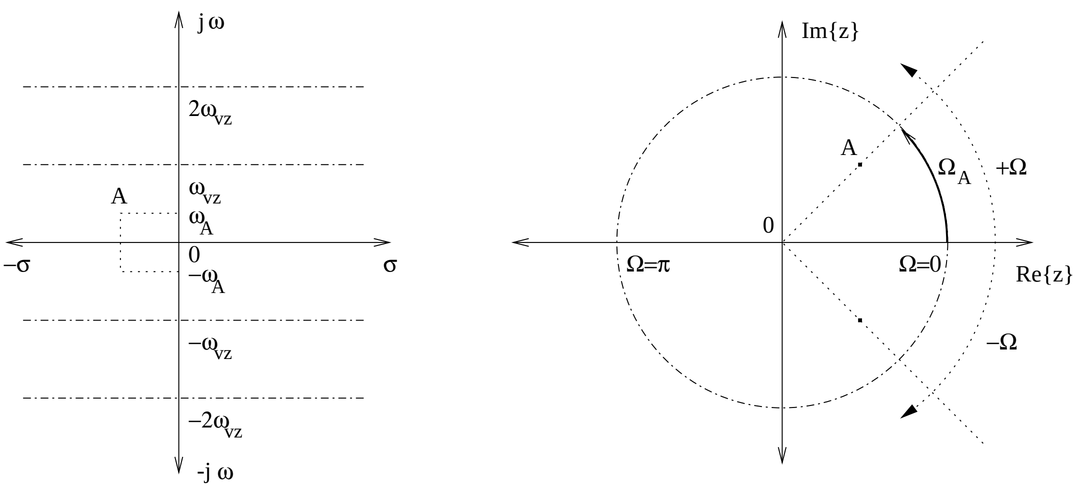
kde

$\Omega = 2\pi\dfrac{f}{f_{vz}} = 2\pi\Phi$ je pomerová kruhová frekvencia

Φ je pomerová frekvencia

Exponenciálna závislosť daná výrazom (2.36) hovorí, že do každého bodu roviny z sa konformne zobrazuje nekonečne veľa bodov komplexnej roviny p. Perióda opakovania je daná kmitočtom vzorkovania f_{vz}, ktorý rozdeľuje rovinu p na rovnako široké pruhy ako je to zobrazené na obr.2.10. Pre bod A je $p_A = \sigma_A + j\omega_A$ a periodicky opakujúce sa obrazy tohoto bodu v rovine p (body so súradnicami $\sigma_A, j(\omega_A + k.\omega_{vz})$)sa prenesú do bodu A v rovine z, ktorý je určený veľkosťou e^{σ_A} a argumentom, ktorého hodnota je $\Omega_A = \dfrac{\omega_A}{f_{vz}}$.

Z výrazu (2.36) vidíme, že všetky body z ľavej poloroviny komplexnej roviny p sa prenášajú dovnútra jednotkovej kružnice roviny z, pravá polorovina sa zobrazí mimo jednotkovú kružnicu a jednotková kružnica v rovine $z \rightarrow e^{j\Omega}$ je obrazom imaginárnej osi $j\omega$.



Obr.2.10 *Súvis roviny p a z*

Pre $\Omega = 0$ dostaneme v rovine z bod $|z| = 1$. Do tohoto bodu sa konformne zobrazí jednak začiatok komplexnej roviny p a všetky body nachádzajúce sa na osi $j\omega$ v hodnotách $\omega_{vz}, -\omega_{vz}, 2\omega_{vz}, -2\omega_{vz}\dots$

Pre $\Omega = \pi$ dostaneme v rovine z bod $z = -1$. Do tohoto bodu zobrazia sa body roviny p , ktoré sa nachádzajú na osi $j\omega$ v hodnotách $\frac{\omega_{vz}}{2}, -\frac{\omega_{vz}}{2}, \frac{3\omega_{vz}}{2}, -\frac{3\omega_{vz}}{2} \dots.$

Bod komplexnej p roviny, ktorý leží na osi $j\omega$ a má hodnotu $\frac{\omega_{vz}}{4}$ sa transformuje do bodu $e^{j\frac{\pi}{2}}$ komplexnej roviny z, kým bod ležiaci v $-\frac{\omega_{vz}}{4}$ do bodu $e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Z úvahy je zrejmé, že dráha bodu po osi $j\omega$ v komplexnej p rovine z hodnoty $j\omega = 0$ do $j\omega_{vz}$ sa transformuje do jednotkovej kružnice v komplexnej rovine z v smere proti pohybu hodinových ručičiek, kým dráha z hodnoty $j\omega = 0$ do $-j\omega_{vz}$ sa transformuje do jednotkovej kružnice s opačnou orientáciou, teda v smere pohybu hodinových ručičiek. (pozri obr.2.10).

Príklad 2.5